CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DOCENCIA ECONÓMICAS A.C.

CIDE

Desarrollo sustentable: situaciones y comportamientos básicos

TESINA

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

MAESTRO EN ECONOMÍA

PRESENTA

CARLOS ANDRÉS LÓPEZ MORALES

DIRECTOR DE LA TESINA: DR. CÉSAR GUERRERO LUCHTENBERG

MÉXICO D.F., JUNIO DE 2006

Desarrollo sustentable: situaciones y comportamientos básicos

---

Introducción 1

I. Fundamentos 5

A. Escenario base **5**

B. Herramientas analíticas **12**

II. Condiciones para la sustentabilidad 19

A. Recurso no renovable **19**

B. Recurso renovable **36**

III. Conclusiones 53

Referencias y bibliografía 57

I. Introducción

Este trabajo se sitúa sobre la base de la literatura que estudia el desarrollo sustentable en una economía que optimiza dinámicamente. En pocas palabras, se puede decir que dicha literatura surge al realizar preguntas nuevas sobre resultados ya conocidos. En efecto, su cimiento teórico principal se constituye con los viejos artículos de Hotelling (1931) y de Ramsey (1928), en donde se estudia el patrón óptimo de agotamiento de un recurso agotable, en el primero, y se presenta lo que tiempo después se llamaría convencionalmente el "criterio utilitarista", en el segundo. A lo largo del siglo pasado, un subconjunto importante de la literatura económica construida sobre dicho cimiento se dedicó a estudiar las características de los patrones óptimos de agotamiento de recursos en escenarios alternativos (renovabilidad de los recursos, escenarios con producción, inversión en el desarrollo de sustitutos, situaciones diversas de incertidumbre, etc.).[1]

Sin embargo, a pesar de la profundidad y el alcance de este desarrollo teórico, faltan en ella referencias explícitas a la sustentabilidad del desarrollo que sus patrones óptimos de consumo implican para las economías estilizadas bajo estudio.[2] De ninguna manera es éste un reproche: el concepto de desarrollo sustentable comenzaría a motivar desarrollos teóricos después de su surgimiento en 1987. Así, por ejemplo, en Pezzey (1992) se puede encontrar un excelente planteamiento que analiza las diversas interpretaciones sobre dicho concepto y algunas de sus implicaciones para economías que optimizan dinámicamente. Yendo aún más lejos, Chichilnisky (1993) introduce un enfoque axiomático para el desarrollo sustentable aplicable a este tipo de economías, siendo ésta una de las

[1] Una buena muestra de dicha literatura puede encontrarse en el número especial de la *Review of Economic Studies* (en su volumen 41) y puede complementarse con el *Survey* de Peterson y Fisher (1977).
[2] Incluso el trabajo de Solow (1974), a pesar de contener un estudio sobre la equidad generacional, no está motivado por el concepto de desarrollo sustentable, sino por hacer una revisión de la crítica de Rawls al criterio utilitarista de la literatura basada en Ramsey (1928)

aportaciones más ambiciosas a esta literatura en los últimos 15 años. Con todo, en Heal (1998) y, más recientemente, en Pezzey y Toman (2002) se puede encontrar un excelente recuento de este campo de investigación en crecimiento.

En este trabajo se pretende dar una discusión básica sobre las condiciones para el desarrollo sustentable en una modelación muy cercana a la más simple posible. Es, en cierto sentido, una extensión a un trabajo previo de Farzin (2000), en el que se prueba que una economía como la analizada en Hotelling (1931) no puede mantener un bienestar constante en todo el horizonte de planeación, lo que es un requisito para un desarrollo sustentable (Pezzey, 1992). Sin embargo, se procede de esta manera para estudiar dos vertientes fundamentales de las condicionantes del desarrollo sustentable, no tratadas en Farzin (2000).

La primera va en el sentido de estudiar las consecuencias de algunos comportamientos posibles en la planificación temporal óptima de una economía. En particular, se estudian los comportamientos sobre el descuento del futuro y sobre el reconocimiento de la contribución directa del acervo de los recursos al bienestar. La literatura sobre desarrollo sustentable identifica ambos comportamientos como cruciales para garantizar el desarrollo sustentable. En este trabajo se estudian los efectos de sus combinaciones posibles.

Los condicionantes de la segunda vertiente irían en el sentido de identificar dos situaciones asociadas a las características particulares de los recursos naturales. En particular, interesan aquí dos de esas situaciones: cuando el recurso es renovable y cuando no lo es. Así, en el trabajo se estudian las combinaciones entre comportamientos y situaciones en el sentido de identificar cuál de ellas genera una política óptima de consumo que se asocie con un desarrollo sustentable.

El trabajo está organizado de la siguiente manera. En la sección I se exponen los fundamentos teóricos que orientan el estudio. Allí se exponen los supuestos generales que definen a la economía que optimiza dinámicamente que se someterá a análisis. Se presentan, grosso modo, los problemas de optimización que resultan de las combinaciones entre los comportamientos y las situaciones referidas. Se utiliza uno de los aspectos analíticos introducidos por Farzin (2000): el desarrollo sustentable se asocia con el mantenimiento de un nivel constante de bienestar, lo que en el contexto de la optimización dinámica se expresa en la condición de que la función "Hamiltoniano" evaluada en el óptimo es estacionaria. Esta condición se acompaña de un indicador de equidad intergeneracional aquí construido. En un desarrollo sustentable, dicho indicador debe ser estacionario e igual a uno.

En la sección II se presenta el análisis propiamente dicho. Se ordenan las combinaciones entre comportamientos y situaciones del siguiente modo: para cada situación se estudian los resultados de los diversos comportamientos (*i.e.*, reconociendo o no la importancia directa del acervo en el bienestar, descontando el futuro a una tasa positiva o a una tasa cero). Se obtiene el resultado convencional de que cuando el recurso es no renovable no existe política óptima de consumo tal que implique un desarrollo sustentable (Farzin, 2000; Chichilnisky, 1993; Heal, 1998).

En la otra situación, cuando el recurso es renovable, la única política óptima de consumo que implica un desarrollo sustentable es, de entre las aquí estudiadas, aquella que se asocia a los comportamientos de no descontar el futuro y de no reconocer la importancia directa del acervo al bienestar. De hecho, en ella sucede que el consumo es equivalente a la tasa de renovación del recurso. Esta solución permite decir que el requerimiento convencional para la sustentabilidad que impone la práctica “explotar los recursos a la misma tasa en la que se renuevan” puede implicar una política óptima de consumo, es decir, puede maximizar una función específica de bienestar social. Esta política tiene, además, la virtud de dejar intacto el nivel de acervo inicial del recurso con el que cuenta la economía. Adicionalmente, se encuentra que el requerimiento convencional de “preocuparse por los recursos”, lo que aquí se expresa en incluir al acervo del recurso como argumento de la función de utilidad, no genera, bajo ninguna de las combinaciones estudiadas, un desarrollo sustentable. Por último, cierra el trabajo un conjunto de notas finales.

I. Fundamentos

Esta sección se organiza de la siguiente manera: en el apartado A se presentan las características especiales de una economía que optimiza dinámicamente y que depende del consumo de un recurso natural. Luego, a partir de la definición convencional del concepto "desarrollo sustentable", en el apartado B se presentan a detalle las herramientas que lo interpretan en el escenario establecido. Cierra la sección una definición de desarrollo sustentable en el contexto de ese escenario utilizando dichas herramientas.

A. Escenario base

Este apartado se divide en dos acápites. El primero de ellos presenta los supuestos que definen las características generales de una economía dependiente de un recurso natural que optimiza dinámicamente. En él se presentan, también, los problemas de optimización dinámica que se obtienen de dos situaciones definidas por las características del recurso (*i.e.*, si es renovable o si es no renovable). El segundo acápite presenta la definición convencional de desarrollo sustentable tal y como fue sugerida por la Comisión Brundtland.

<u>Un mundo estilizado</u>

La economía a analizar en este trabajo se caracteriza por tener población constante cuyo bienestar instantáneo depende del consumo de un recurso natural que puede o no ser renovable, y del que se cuenta con un acervo inicial positivo. El consumo de dicho recurso puede ser indispensable para la existencia. Se asume que las preferencias individuales respecto al consumo del recurso son homogéneas en la población, por lo que la función de utilidad instantánea del individuo representará el bienestar instantáneo de la población. Será útil pensar que la población que habita el mundo en un instante constituye una generación, y que la que lo habita en otro instante es una generación diferente.

Por sencillez, se asumirá que las preferencias también son homogéneas en el tiempo: en cualquier instante, la función de utilidad reflejará el bienestar de la generación en ese instante. Esto implica que los padres heredan sus preferencias a sus hijos, a sus nietos, etc. Este supuesto puede ser poco adecuado si se prefiere un escenario en que cada generación fija independientemente sus preferencias, pero aquí se considera que los esquemas de valores se heredan de generación en generación. Es decir, la población considera que el consumo del recurso es un “bien” independientemente del momento en que ésta viva. En términos formales, tendríamos que el consumo del recurso en el instante t, $C(t)$, otorga felicidad al individuo representativo, hecho que se representa por medio de una función de utilidad instantánea, $U(C(t))$, creciente, dos veces diferenciable y cóncava estricta.[3]

Si el consumo del recurso es indispensable para el mantenimiento de la vida ocurre que $\lim_{C\to 0} U_C = \infty$, es decir, la utilidad marginal tiende a ser infinitamente grande cuando el consumo tiende a ser nulo. En cambio, si la existencia no depende ineludiblemente del consumo del recurso, ocurre que $\lim_{C\to 0} U_C < \infty$. En cualquier caso, se asume que $U(C(t))$ es tal que $\lim_{C\to \infty} U_C = 0$. Con el fin de aportar algunos ejemplos, en ocasiones se asumirá que $U(C(t))$ pertenece a la familia de funciones “isoelásticas”, es decir, con elasticidad-consumo de la utilidad marginal constante. La Figura 1 interpreta geométricamente estos supuestos.

[3] Se asume que la utilidad marginal del consumo es positiva, lo que implica que la función $U(\cdot)$ es creciente. Si dicha función es cóncava estricta entonces la utilidad marginal es decreciente.

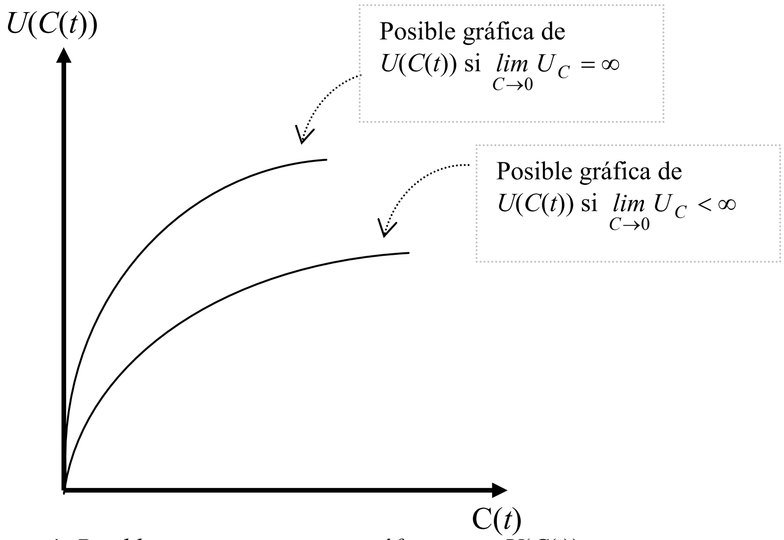

Figura 1. *Posibles comportamientos gráficos para $U(C(t))$*
Si ocurre que $\lim_{C\to 0} U_C = \infty$ entonces la pendiente de $U(C(t))$ tiende a ser la de una vertical conforme disminuye C. De otro modo, si $\lim_{C\to 0} U_C < \infty$, entonces la pendiente será positiva y finita conforme disminuye C.

Ahora bien, se asume la existencia de un planificador benevolente que buscará maximizar el bienestar social como función de la utilidad instantánea del individuo representativo. La literatura existente sobre uso de recursos naturales trabaja con horizontes de planeación finitos o infinitos.[4] Desde que interesa la sustentabilidad en el largo plazo en un mundo como el hasta aquí planteado, se preferirá una duración infinita del horizonte de planeación.[5] Se asumirá que la función de bienestar social cuyo máximo busca el planificador es

$$W = \int_0^{\infty} \delta(t) U(C(t)) dt \qquad \text{(IA.1)}$$

[4] Ver Dasgupta y Heal (1974) para una exposición sintética de la modelación estándar con horizonte infinito. Ver Koopmans (1973 y 1974) para modelaciones con horizontes finitos.
[5] Es decir, desde que una economía sustentable debe mantenerse infinitamente, no interesa fijar un horizonte finito, lo que implica asumir, de entrada, que la economía debe planificarse tomando en cuenta un final ineludible.

en donde $U(C(t))$ es la función instantánea de utilidad de la generación que vive en t y $\delta(t)$ es el factor de descuento del futuro. Se consideran dos escenarios generales sobre la ponderación del presente y el futuro en (IA.1). Si al planificador pondera equivalentemente el bienestar de las infinitas generaciones consideradas en *W*, lo que implica tener una tasa de descuento del futuro igual a cero, entonces $\delta(t)=1$ y el problema del planificador consistirá en buscar el máximo del flujo de la utilidad instantánea a valor corriente. Denominaremos a este escenario "trato intergeneracional equitativo".[6] Si dicha ponderación no es equilibrada, lo que se asocia con una tasa de descuento positiva, entonces, por lo general, $\delta(t)\neq 1$. Se asumirá por sencillez que, para este caso, $\delta(t)=e^{-\rho t}$, donde ρ es la tasa positiva y constante a la que se descuenta el futuro. Si así ocurre, el problema del planificador consistirá en buscar el máximo del flujo de utilidad instantánea a valor presente.

Ahora bien, completa el cuadro dibujado hasta aquí un conjunto simple de restricciones sobre las que el planificador resuelve el problema de optimización dinámica. Sus características dependen de si el recurso natural es o no renovable. Si dicho recurso es no renovable, el planificador debe percatarse que la política de consumo instantáneo que determine no debe superar el acervo inicial del recurso. Formalmente, si *R* es el acervo inicial, tenemos que dicha política debe cumplir:

$$\text{(IA.2)} \qquad \int_0^\infty C(t)\,dt \leq R$$

[6] El trato intergeneracional equitativo se refiere, únicamente, a la ponderación asignada en la función de bienestar social al bienestar de cada generación. Una ponderación equitativa no implica necesariamente equidad en cuanto al monto de consumo de cada generación.

Para facilitar el tratamiento, se construye una variable que indique el monto de acervo del recurso que está disponible para el consumo a partir de t. Definiendo a $S(t)$ como este acervo disponible, se tiene

(IA.3) $$S(t) = R - \int_0^t C(\tau) d\tau .$$

Diferenciando (IA.3) con respecto a t se obtiene la siguiente expresión para la dinámica de $S(t)$:

(IA.4) $$\frac{dS}{dt} = -C(t).$$

Ahora bien, si dicho recurso es renovable la dinámica del acervo depende de la relación entre las tasas a las que éste se renueva y se consume. Si $r(S(t))$ es la tasa a la que el acervo se renueva, su comportamiento dinámico vendría dado por:

(IA.5) $$\frac{dS}{dt} = r(S(t)) - C(t).$$

Un escenario sencillo consiste en suponer, como en Dasgupta y Heal (1974), que la tasa de renovación es constante, *i.e.*, $r(S(t))$=M. Este supuesto puede indicar una situación en la que existe alguna fuente que provee a la economía de un monto constante del recurso independientemente de su acervo disponible. Por último, se pueden considerar restricciones técnicas de no negatividad de las variables de interés: $C(t) \geq 0$ y $S(t) \geq 0$. Con los elementos expuestos hasta aquí, es posible construir el problema al que se enfrenta el planificador en dos situaciones alternativas. Consideremos primero el caso en el que el recurso es no renovable. Formalmente, tenemos

$$
\left.\begin{array}{l}
\max\limits_{[C(t)]} \int\limits_0^{\infty} \delta(t) U(C(t)) dt \\
s.a \\
\dfrac{dS}{dt} = -C(t) \\
C(t) \geq 0 \\
S(t) \geq 0
\end{array}\right\} \text{I.1}
$$

Una economía que optimice dinámicamente y que se enfrente a un problema como el de I.1 suele denominarse en la literatura como "*cake-eating economy*", haciendo referencia a uno de los ejemplos de Gale (1967). Si el recurso natural fuera renovable, el planificador se enfrenta al siguiente problema:

$$
\left.\begin{array}{l}
\max\limits_{[C(t)]} \int\limits_0^{\infty} \delta(t) U(C(t)) dt \\
s.a \\
\dfrac{dS}{dt} = r(S(t)) - C(t) \\
C(t) \geq 0 \\
S(t) \geq 0
\end{array}\right\} \text{I.2}
$$

Tanto en I.1 como en I.2 se puede asumir que $\delta(t) = 1$ o que $\delta(t) = e^{-\rho t}$ para indicar que se descuenta el futuro a tasa cero o a tasa positiva, respectivamente. Como veremos en la sección segunda de este trabajo, el supuesto sobre $\delta(t)$ resulta crucial para la obtención de soluciones a los problemas.

<u>Sustentabilidad: la definición convencional</u>

Durante los últimos treinta años, la Organización de las Naciones Unidas (ONU) ha convocado a diversas cumbres internacionales para discutir la relación entre el bienestar humano y el medio ambiente. De ellas sobresalen por su importancia la de Estocolmo en 1972, la de Rio de Janeiro en 1992 y la de Johannesburgo en 2002. Como parte de ese proceso, en los años ochenta la ONU delegó a la Comisión Mundial sobre Medio Ambiente y Desarrollo la realización de un estudio amplio de la relación entre desarrollo humano y medio ambiente orientado hacia el futuro. A dicha comisión se le conoce como "Comisión Brundtland", pues la que fuera Primer Ministro de Noruega, Gro Harlem Brundtland, la encabezaba.

El principal fruto de la Comisión Brundtland es el documento *Nuestro futuro común*, también conocido como la "Agenda XXI" o como el "Informe Brundtland", del que sobresale un concepto que hoy es ampliamente utilizado y referido: "el desarrollo sustentable". La definición sugerida por la Comisión es la siguiente: "El desarrollo sustentable es el desarrollo que satisface las necesidades del presente sin comprometer la capacidad de las generaciones futuras para satisfacer las propias" (World Commission on Environment and Development, 1987).

Existen varias interpretaciones, desde diversos niveles, sobre dicho concepto,[7] pero aquí interesa interpretarlo de un modo sencillo en el contexto de una economía como la dibujada líneas arriba para estudiar algunas de las condiciones que permitirían su sustentabilidad. Para cumplir con este objetivo, nos valdremos de dos herramientas analíticas: la dinámica de la función "Hamiltoniano" asociada a los problemas analizados de optimización dinámica y la dinámica de la equidad intergeneracional en cuanto al consumo del recurso natural. El detalle de estas herramientas se presenta en el siguiente apartado.

[7] Ver, para un recuento general, a Pezzey (1992) y, para una exposición sobre algunas interpretaciones a distintos niveles de reflexión, a Pezzey y Toman (2002). Una breve pero concisa discusión, orientada hacia la modelación económica, se encuentra en Heal (1998).

B. Herramientas analíticas

En este apartado se exponen las herramientas con las que se interpretará la definición convencional de desarrollo sustentable en el contexto de una economía como la definida en el apartado anterior. Primero se estudiarán algunas características de la función llamada "Hamiltoniano" construida para obtener las soluciones a los problemas de optimización dinámica. Luego se expondrá lo relativo a la construcción de un indicador de equidad generacional en el consumo del recurso. Por último, se utilizan tanto la función Hamiltoniano como el indicador referido para interpretar las condiciones de un desarrollo sustentable en una economía que optimiza dinámicamente.

Interpretaciones del Hamiltoniano

La definición convencional de desarrollo sustentable suele interpretarse en términos del comportamiento del bienestar en el tiempo. En pocas palabras, la literatura sobre sustentabilidad suele identificar como una de sus principales características un bienestar social no decreciente (ver Pezzey, 1992; y Pezzey y Toman, 2002). En la literatura sobre control óptimo y sustentabilidad existe una interpretación útil sobre la función Hamiltoniano en términos de la evolución del bienestar. A continuación se expone su detalle siguiendo de cerca el planteamiento de Farzin (2000) quien, a su vez, interpreta algunos resultados de Weitzman (1976).

Consideremos el siguiente problema de optimización:

$$\left.\begin{aligned} &\max_{[x(t)]} \int_0^{\infty} e^{-\rho t} f\left(x(t), y(t), t\right) dt \\ &s.a \\ &\frac{dy}{dt} = g\left(x(t), y(t), t\right) \\ &y(0) = y_0 \end{aligned}\right\} \text{I.3.}$$

donde $x(t)$ y $y(t)$ son, respectivamente, las variables de control y de estado; $f(x(t), y(t), t)$ es una función de utilidad instantánea, y $g(x(t), y(t), t)$ es la ley del movimiento de la variable de estado. El Hamiltoniano a valor corriente asociado al problema I.3 es

(IB.1) $$H = f(x(t), y(t), t) + \lambda(t) g(x(t), y(t), t).$$

Supongamos que el problema encuentra solución en $x^*(t)$, $y^*(t)$ y $\lambda^*(t)$. En su artículo seminal de 1976, Weitzman observa que el bienestar descontado obtenido en la trayectoria óptima a partir de algún *t*,

$$\int_t^\infty e^{-\rho t} f(x^*, y^*, t) dt,$$

es equivalente al valor descontado en *t* del Hamiltoniano evaluado en el óptimo (que se supone autónomo, es decir, no dependiente de *t* en forma directa), $\frac{H^*}{\rho}$, es decir

(IB.2) $$H^*(t) = \rho \int_t^\infty e^{-\rho(s-t)} f(x^*, y^*, t) ds.$$

Supongamos, para probar esto, que $\{x^*(t)\}_0^\infty$ es una política óptima de la variable de control. Ahora diferenciamos el Hamiltoniano evaluado en el óptimo, H^*, con respecto a *t* para obtener

(IB.3) $$\frac{dH^*}{dt} = \frac{\partial H^*}{\partial t} + \frac{\partial H^*}{\partial x}\frac{dx^*}{dt} + \frac{\partial H^*}{\partial y}\frac{dy^*}{dt} + \frac{\partial H^*}{\partial \lambda}\frac{d\lambda^*}{dt}.$$

Puesto que x^*, y^*, λ^* son óptimos, tenemos, del Principio del Máximo, que $\frac{\partial H^*}{\partial x} = 0$ y que $-\frac{\partial H^*}{\partial y} = \frac{d\lambda}{dt} - \rho\lambda^*(t)$, por lo que la derivada anterior queda

$$\frac{dH^*}{dt} = \frac{\partial H^*}{\partial t} + \left[\rho\lambda^*(t) - \frac{d\lambda}{dt}\right]\frac{dy^*}{dt} + \frac{dy^*}{dt}\frac{d\lambda^*}{dt}$$

Si H^* es autónomo, ocurre $\frac{\partial H^*}{\partial t}$=0, por lo que lo anterior queda

(IB.4)
$$\frac{dH^*}{dt} = \rho\lambda^*(t)\frac{dy^*}{dt} = \rho\lambda^*(t)g\left(x^*, y^*, t\right) .$$

Ahora bien, tomando en cuenta que $H^* = f\left(x^*, y^*, t\right) + \lambda^* g\left(x^*, y*, t\right)$, tenemos, a partir de (IB.4),

$$\frac{dH^*}{dt} = \rho\lambda^*(t)g\left(x^*, y^*, t\right) + \rho f\left(x^*, y^*, t\right) - \rho f\left(x^*, y^*, t\right)$$

(IB.5)
$$\Rightarrow \frac{dH^*}{dt} = \rho\left(H^*(t) - f\left(x^*, y^*, t\right)\right)$$

La última expresión es una ecuación diferencial con solución en

$$H^*(t) = \rho\int_t^\infty e^{-\rho(s-t)} f\left(x(s)^*, y(s)^*, s\right)ds$$

pues $\frac{dH^*}{dt} = -\rho f\left(x^*(t), y^*(t), t\right) + \rho^2 \int_t^\infty e^{-\rho(s-t)} f\left(x^*(s), y^*(s), s\right)ds = \rho\left(H^*(t) - f\left(x^*, y^*, t\right)\right)$.

Por lo tanto, el valor presente del Hamiltoniano evaluado en el óptimo en algún t es equivalente al flujo de bienestar descontado a partir de dicho t. Lo interesante de esto es que la dinámica del Hamiltoniano evaluado en la trayectoria óptima indicará la dinámica del bienestar en dicha trayectoria. De hecho, como Farzin (2000) prueba, un Hamiltoniano estacionario es condición necesaria para el sostenimiento de un patrón constante de utilidad instantánea. Resulta fácil ver esto a partir de (IB.5): Si H^* es estacionario, se cumple que $f\left(x^*(t), y^*(t), t\right) = H^* = constante$ para cualquier $t \in [0, \infty)$. Con todo, sobre la base de la interpretación aquí presentada se puede ver que el objetivo definido en la concepción convencional del desarrollo sustentable implicaría que el Hamiltoniano sea estacionario en el tiempo, lo que se asocia al mantenimiento de un bienestar generacional constante.

Un indicador de equidad intergeneracional

Los problemas de optimización dinámica expuestos en el apartado previo buscan una función de consumo en el tiempo que maximice la función objetivo sujeto a las restricciones respectivas. Notemos que dicha función, bajo el supuesto relativo a las generaciones, indica el monto del recurso que cada generación consume. Así, por ejemplo, la generación que "vive" en el instante τ_1 consume un monto $C(\tau_1)$ del recurso. Se define una política de consumo, $\{C(t)\}_0^\infty$, como el flujo de consumo en el horizonte de planeación definido por alguna función $C(t)$. Para analizar el trato intergeneracional se construye, sobre esta base, un indicador de equidad intergeneracional para cualquier política de consumo $\{C(t)\}_0^\infty$ de la siguiente forma:

$$\phi(t): \Re^+ \longrightarrow \Re^+$$

$$\text{tal que } \phi(t) = \frac{C_0}{C(t)}, \text{ para } t \in [0,\infty),$$

donde C_0 es el consumo inicial de $\{C(t)\}_0^\infty$.

En cualquier t, $\phi(t)$ será un indicador de la diferencia entre el consumo de la generación que vive en $t = 0$ y el de la generación que vive en $t \geq 0$. Si ocurriera que $\phi = 1 \ \ \forall t \in [0,\infty)$ entonces el flujo $\{C(t)\}_0^\infty$ se caracterizaría por mantener equidad intergeneracional. Si ocurriera que $\phi \to 0$, para $t \to \infty$, entonces $\{C(t)\}_0^\infty$ se caracterizaría por mantener inequidad intergeneracional a favor de las generaciones futuras. Si, en otro caso, $\phi \to \infty$ para $t \to \infty$, entonces $\{C(t)\}_0^\infty$ se caracterizaría por mantener inequidad intergeneracional a favor de las generaciones tempranas. La dinámica del indicador de inequidad generacional viene dada por

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{dC}{dt}\frac{C_0}{[C(t)]^2} = -\phi(t)\frac{dC}{dt}\frac{1}{C(t)},$$

por lo que su tasa de crecimiento será el inverso aditivo de la tasa del crecimiento del consumo, es decir

$$\frac{d\phi}{dt}\frac{1}{\phi(t)} = -\frac{dC}{dt}\frac{1}{C(t)}.$$

La Figura 2 representa algunas de las posibilidades sobre el comportamiento del flujo de consumo y del indicador respectivo. En el panel izquierdo se representan tres políticas posibles de consumo: una constante, $\{C^*\}_0^\infty$, en la que $C(t)=C^*$ $\forall t \in [0,\infty)$, una creciente, $\{\hat{C}(t)\}_0^\infty$, y una decreciente, $\{\tilde{C}(t)\}_0^\infty$. Se han dibujado a diferentes niveles de consumo inicial. En el panel derecho se dibujan los indicadores respectivos de equidad generacional: $\phi^*(t) = 1$ $\forall t \in [0,\infty)$ dado que $\{C^*\}_0^\infty$ es constante, $\tilde{\phi}(t)$ es creciente dado que $\{\tilde{C}(t)\}_0^\infty$ es decreciente y, por último, $\hat{\phi}(t)$ es decreciente dado que $\{\hat{C}(t)\}_0^\infty$ es creciente.

En el contexto de una economía como la dibujada en el apartado previo, el concepto de desarrollo sustentable requiere la satisfacción de las necesidades de la generación presente sin alterar la capacidad de satisfacción de las generaciones futuras. ¿Cómo se relaciona este requerimiento con el indicador de equidad intergeneracional construido aquí? Sobre los tres casos posibles expuestos en la Figura 2, se puede decir que si $\phi(t)$ es creciente, las generaciones cercanas al presente (*i.e.*, al tiempo inicial t = 0) satisfacen sus necesidades consumiendo un mayor monto del recurso que las generaciones futuras. Si se asume que el conjunto de necesidades es estable en el tiempo (es decir, requiere un mismo monto de consumo para satisfacerse), un indicador creciente no sería reflejo de una economía sustentable.

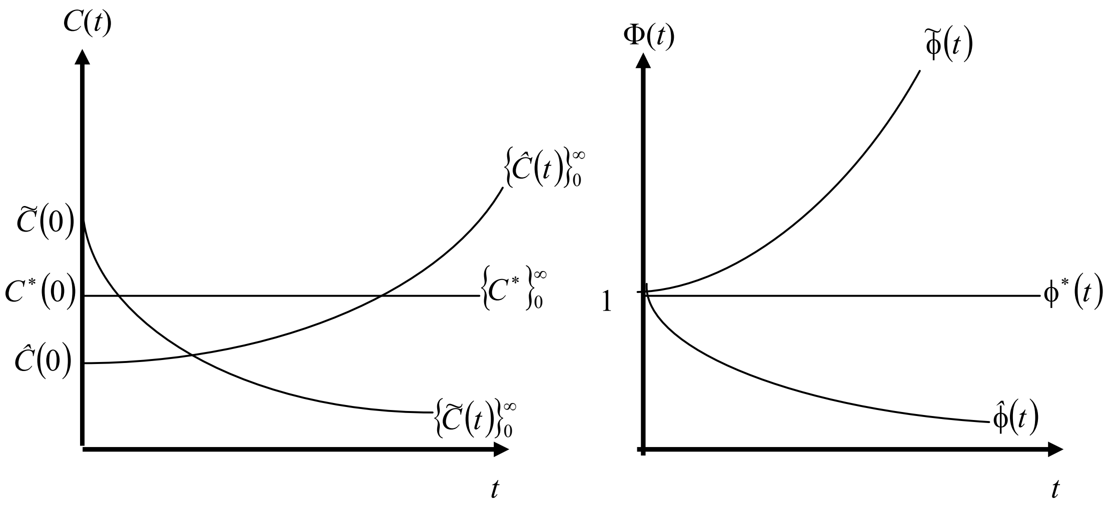

Figura 2. *Posibles políticas de consumo y equidad intergeneracional No importando el nivel de consumo inicial de la política de consumo, ocurre que* $\phi(0)=1$.

Fuente: elaboración propia.

Por otro lado, si $\phi(t)$ es decreciente, el monto de consumo con el que se satisfacen necesidades es creciente, por lo que las generaciones futuras se verían, en este sentido, beneficiadas respecto a las generaciones presentes. Si esto fuera posible, sería reflejo de que la satisfacción de necesidades en el presente no compromete la capacidad de satisfacción en el futuro, lo que se aviene bien con la definición de un desarrollo sustentable. Por último, si $\phi(t)$ es constante en el tiempo, el monto de consumo que satisface necesidades es también constante, lo que sería reflejo de que en el presente no se compromete la capacidad futura de su satisfacción. De igual forma, se puede hablar, en este caso, de un desarrollo sustentable. Así pues, se puede brindar una interpretación del concepto convencional del desarrollo sustentable en una economía como la descrita en el apartado A de esta sección:

En una economía como la supuesta en el apartado A, el desarrollo sustentable es una situación tal que la política óptima de consumo del recurso natural implica:

a) que la función Hamiltoniano sea estacionaria en el tiempo. Esta condición, como vimos en este apartado, implica que la utilidad generacional sea constante para todas las generaciones (y, por tanto, no decreciente).

b) que el indicador de equidad intergeneracional sea no creciente, es decir, $\frac{d\phi}{dt}\frac{1}{\phi(t)} \leq 0$. En el caso en que $\phi(t)$ sea constante en todo el horizonte de planeación, el consumo del recurso es también constante. Si, de otra forma, $\phi(t)$ es decreciente, el consumo del recurso es creciente. En ambos casos, la satisfacción de necesidades en el presente no compromete la capacidad de satisfacción en el futuro, pues la política de consumo puede ser constante o creciente.

II. Condiciones para la sustentabilidad

Esta sección está organizada de la siguiente manera: en el apartado A se presentan las políticas óptimas de consumo que se obtienen de resolver el problema de optimización dinámica cuando el recurso es no renovable. Se obtiene que en esta situación no es posible un desarrollo sustentable. En el apartado B se hace lo propio con las políticas óptimas de consumo que se obtienen cuando el recurso es renovable. Existen condiciones tales que permiten un desarrollo sustentable. La exposición trata distintas combinaciones entre el descuento del futuro y el reconocimiento de la importancia directa del acervo en el bienestar de cada generación.

A. Recurso no renovable

Este apartado expone, en el primer acápite, la solución óptima cuando el bienestar instantáneo sólo depende del consumo del recurso. Las características de la política óptima de consumo no implican un desarrollo sustentable de la economía. En el segundo acápite se obtiene la política óptima cuando se reconoce la importancia del acervo del recurso en el bienestar instantáneo. De igual forma, sus características no generan un desarrollo sustentable de la economía.

"*Cake-eating economy*"

Para familiarizar la mecánica de solución con la que se opera en el resto de esta sección, se resuelve primero para una economía *cake-eating*, es decir, una economía que depende del consumo de un recurso no renovable. Consideremos, primero, el caso en que el planificador busca maximizar el valor presente del flujo de utilidad instantánea (es decir que descuenta el futuro a una tasa positiva, por lo que $\delta(t) = e^{-\rho t}$.[8] El problema que resuelve el planificador es:

$$\left.\begin{array}{l} \max\limits_{(C(t))} \int_0^\infty e^{-\rho t} U(C(t))dt \\ s.a \\ \dfrac{dS}{dt} = -C(t) \end{array}\right\} \text{II.1}$$

Notemos que la restricción del planificador, dada la no renovabilidad del recurso natural, es, en principio, $\int_0^\infty C(t)dt \leq R$; pero, para facilitar el tratamiento, se ha construido una variable que indique el monto disponible del acervo en el tiempo *t*, tal como en las expresiones (IA.3) y (IA.4) de la sección previa, por lo que el problema queda como está expuesto en II.1. La función Hamiltoniano a valor corriente es

(IIA.1) $$H = U(C(t)) - \lambda(t)C(t),$$

donde $\lambda(t)$ es la variable de coestado a valor corriente. La condición de primer orden para maximizar a *H* con respecto al control, *C*(*t*), es

(IIA.2) $$U_C = \lambda(t).$$

Del Principio del Máximo se sigue que

(IIA.3) $$\frac{d\lambda}{dt} - \rho\lambda(t) = 0,$$

La ecuación (IIA.3) es una ecuación diferencial con solución en

[8] Si el planificador buscara maximizar el flujo del valor corriente de la utilidad instantánea asignaría una tasa de descuento igual a cero. Gale (1967) probó que, si así fuera, no existe política óptima que asigne un monto de consumo positivo a todas las generaciones. La política óptima de consumo sería una que asignara un monto nulo, situación que Gale denominó como "el peor programa posible". Dado que nos interesan situaciones en las que se satisfacen las necesidades de las generaciones con montos positivos de consumo, el análisis excluye esta posibilidad.

(IIA.3')

$$\lambda(t) = e^{\rho t},$$

es decir, la variable de coestado crece a la tasa a la que el planificador descuenta el futuro. Diferenciando (IIA.2) con respecto a *t* y combinando con (IIA.3) se obtiene:

(IIA.4)

$$\frac{dC}{dt}\frac{1}{C} = -\frac{\rho}{\eta(C)}$$

en donde $\eta(C) = -\frac{U_{CC}}{U_C}C$, es decir, representa la elasticidad-consumo de la utilidad marginal. La ecuación (IIA.4) representa la tasa de crecimiento del consumo en el óptimo. En el caso en que *U*(*t*) pertenezca a la familia de funciones isoelásticas se tiene que $\eta(C) = \eta = constante$, a partir de lo cual se puede obtener una expresión para la función óptima de consumo:

(IIA.5)

$$C^*(t) = C_0^* e^{-\frac{\rho}{\eta}t}$$

La función (IIA.5) da el monto de consumo que la política óptima asigna a cada generación al resolver el problema II.1. Es claro que (IIA.5) debe, por tanto, cumplir con la restricción de recursos, es decir $\int_0^\infty C_0^* e^{-\frac{\rho}{\eta}t}dt = R$.[9] Resolviendo esta integral se obtiene que $C_0^* = \frac{\rho}{\eta}R$, y sustituyendo este valor en (IIA.5) se obtiene

(IIA.6)

$$C^*(t) = \frac{\rho}{\eta}Re^{-\frac{\rho}{\eta}t}.$$

[9] Esta restricción debe cumplirse con igualdad. De otra forma, una política de consumo estaría dejando una fracción del acervo inicial intacto, lo que bajo el problema planteado sería subóptimo.

Varias lecciones útiles se pueden obtener de (IIA.6).[10] En la medida en que la tasa a la que se descuenta el futuro aumenta ocurrirá que *a*) el consumo inicial será mayor y *b*) el consumo decrecerá más rápido con respecto al tiempo (pues la tasa de crecimiento negativa será menor –más alejada del cero–). Ahora bien, la elasticidad-consumo de la utilidad marginal puede interpretarse aquí como un indicador de la aversión a la inequidad intergeneracional: si dicha elasticidad aumenta, disminuyen el consumo incial y la velocidad a la que cae el consumo (pues la tasa de crecimiento negativa es mayor –más cercana a cero–).

¿Qué se puede decir sobre la sustentabilidad de un desempeño como éste? En la sección anterior se interpretó el concepto de desarrollo sustentable de forma tal que el estudio de la dinámica del Hamiltoniano y del indicador de inequidad intergeneracional brinde los criterios para definirlo en el contexto de este problema. Diferenciando (IIA.1) evaluado en el óptimo obtenemos:

$$\frac{dH^*}{dt} = U_C \frac{dC^*}{dt} - \lambda^*(t)\frac{dC^*}{dt} - C^*(t)\frac{d\lambda^*}{dt}.$$

Considerando (IIA.2) y (IIA.3) lo anterior queda

(IIA.7) $$\frac{dH^*}{dt} = -\rho C^*(t) U_C < 0$$

Notemos que (IIA.7) es la expresión de (IB.4) para el problema II.1. La dinámica del Hamiltoniano indica que éste no es estacionario en el tiempo, sino decreciente, por lo que no se cumple la condición para asegurar un bienestar generacional constante.

[10] Estos resultados son estándar en la literatura. Interpretaciones similares a la que aquí se presenta se pueden encontrar en Koopmans (1973 y 1974), en Farzin (2000), en Pezzey (1992) y en Pezzey y Toman (2002).

Para ilustrar sobre lo anterior, podemos suponer que $U(C(t))= ln(C(t))$. Notemos que en este caso, $\eta = 1$ y que $\lim_{C \to 0} U_C = \infty$, por lo que se asume que el consumo del recurso resulta esencial para el mantenimiento de la vida. Bajo estos supuestos adicionales sobre la función de utilidad instantánea se ve fácilmente que el Hamiltoniano es negativo y decreciente a la tasa a la que se descuenta el futuro. Consideremos la ecuación (IIA.1) evaluada en el óptimo:

(IIA.1') $$H^*(t) = ln(C^*(t)) - \lambda^*(t)C^*(t) = ln(\rho R) - \rho(t + R),$$

ahora evaluemos (IIA.1') en $t = 0$:

(IIA.1'') $$H^*(0) = ln(\rho R) - \rho R < 0.$$

La ecuación (IIA.1'') informa que, no importando el valor de la tasa de descuento ni el nivel del acervo inicial, el Hamiltoniano es menor a cero en $t = 0$. Tanto de (IIA.1') como de (IIA.7) se ve directamente que $\frac{dH^*}{dt} = -\rho < 0$, por lo que la velocidad a la que H^* cae es equivalente al negativo de la tasa a la que se descuenta el futuro.

Con respecto a la equidad intergeneracional del consumo, el indicador $\phi(t)$ evaluado en la política $\{C^*(t)\}_0^\infty$ es:

(IIA.8) $$\phi^*(t) = \frac{C_0^*}{C^*(t)} = e^{\frac{\rho}{\eta}t},$$

por lo que su tasa de crecimiento es

(IIA.9) $$\frac{d\phi^*}{dt}\frac{1}{\phi^*(t)} = \frac{\rho}{\eta} > 0.$$

La expresión (IIA.9) informa que el indicador es creciente en el tiempo, por lo que la política óptima $\{C^*(t)\}_0^\infty$ favorece a las generaciones tempranas con relación a las futuras. Si la función de utilidad instantánea fuera $U(C(t))= ln(C(t))$, se tiene que dicho indicador crece a una tasa equivalente en valor a la tasa a la que decrecen el consumo y el Hamiltoniano. La Figura 3 interpreta geométricamente estos resultados.

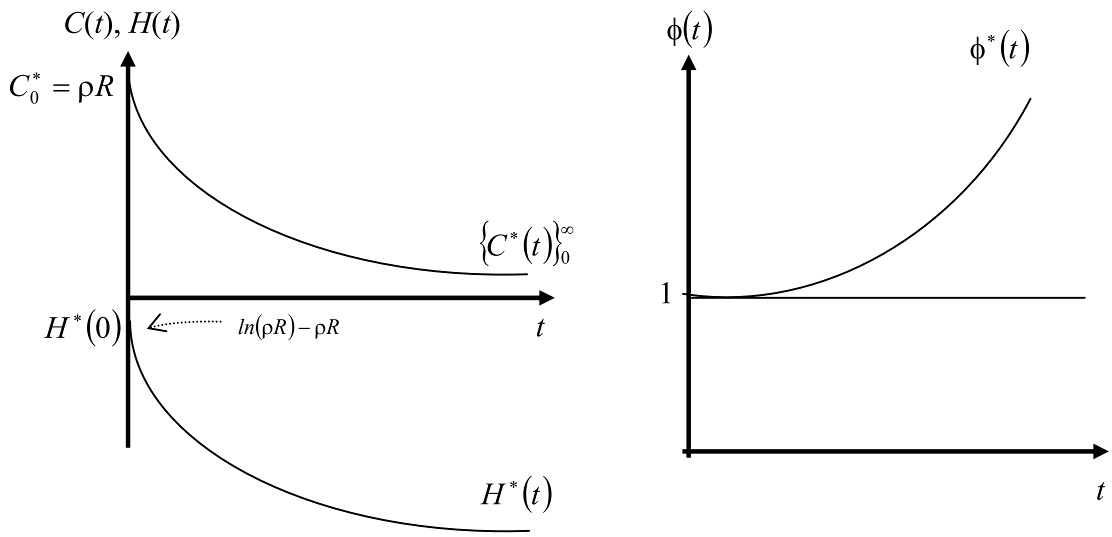

Figura 3. *Comportamientos temporales en una cake-eating economy La política óptima de consumo es decreciente, el indicador de equidad intergeneracional creciente y el Hamiltoniano decreciente. Los valores específicos del panel izquierdo corresponden al caso en el que U(t)=ln(C(t)).*

Reconociendo al recurso en la función de utilidad

Supongamos que el planificador, al percatarse de que la política óptima del problema II.1 no genera un desarrollo sustentable, se pregunta qué hacer para buscarlo. Supongamos que decide reconocer la importancia directa del recurso natural al bienestar de cada generación.[11] De esta forma, la función de utilidad tendrá dos argumentos en vez de uno: el consumo del recurso y su acervo. Por sencillez, supondremos aquí que dicha función es aditivamente separable en sus argumentos. Formalmente,

(IIA.10) $$B = B(C(t), S(t)) = U(C(t)) + V(S(t)),$$

donde, como antes, se asume que $U(C(t))$ es creciente y que U_C es decreciente.[12] Además, $V(S(t))$ será tal que $V_S > 0$ y $V_{SS} < 0$. Veamos, primero, el caso en el que el planificador busca maximizar el flujo del valor corriente de la utilidad instantánea. Formalmente, tendrá que resolver el siguiente problema:

$$\left.\begin{aligned} &\max_{[C(t)]} \int_0^\infty [U(C(t)) + V(S(t))]dt \\ &s.a \\ &\frac{dS}{dt} = -C(t) \end{aligned}\right\} \text{II.2}$$

el Hamiltoniano asociado a II.2 es:

(IIA.11) $$H = U(C(t)) + V(S(t)) - \lambda(t)C(t)$$

donde $\lambda(t)$ es la variable de coestado a valor corriente. La condición de primer orden de maximizar H con respecto a $C(t)$) es:

(IIA.12) $$U_C - \lambda(t) = 0,$$

mientras que del Principio del Máximo se obtiene

(IIA.13) $$-V_S = \frac{d\lambda}{dt}.$$

---

[11] Varios tipos de recursos naturales tienen una influencia directa en el bienestar. Pensemos, por ejemplo, en un bosque maderable, una fuente acuífera, la calidad del suelo, etc.

[12] Lo primero es una implicación de asumir que $U_C > 0$. Lo segundo implica que $U_{CC} < 0$.

Ahora bien, diferenciando (IIA.12) respecto a *t* y combinando con (IIA.13) se tiene

(IIA.14) $$\frac{dC}{dt}\frac{1}{C}=\frac{V_S}{\eta(C)}>0$$

en donde, como antes, $\eta(C)=-\frac{U_{CC}}{U_C}C$. ¿Puede ser posible una política de consumo que cumpla (IIA.14) y que sea factible? Es claro que cualquier política $\{C(t)\}_0^\infty$ que se caracterice por tener una tasa de crecimiento como en (IIA.14) no puede serlo. La razón es muy simple: el recuso es no renovable. Por tanto, si $C(t)$ asignara por siempre montos crecientes de consumo a medida que pasan las generaciones no podría cumplir $\int_0^\infty C(t)dt=R$. Además, si el comportamiento dinámico de $C(t)$ se rigiera por (IIA.14), y si $U(t)$ fuera isoelástica, el consumo crecería aceleradamente, pues a medida que disminuye $S(t)$ aumenta V_S. Con todo, no existe una política óptima $\{C(t)\}_0^\infty$ que resuelva el problema II.2.

Estudiemos ahora el caso en el que el planificador busca maximizar el flujo del valor presente de la utilidad instantánea:

$$\left.\begin{array}{l} \max\limits_{[C(t)]}\int_0^\infty e^{-\rho t}\left[U(C(t))+V(S(t))\right]dt \\ s.a \\ \frac{dS}{dt}=-C(t) \end{array}\right\}\text{II.3}$$

El Hamiltoniano a valor corriente asociado a II.3 es

(IIA.15) $$H=U(C(t))+V(S(t))-\lambda(t)C(t)$$

donde $\lambda(t)$ es el multiplicador a valor corriente. Tal como antes, la condición de primer orden de maximizar H respecto a $C(t)$ es:

(IIA.16) $$U_C - \lambda(t) = 0\,,$$

pero el Principio del Máximo impone una condición distinta:

(IIA.17) $$-V_S = \frac{d\lambda}{dt} - \rho\lambda(t).$$

Diferenciando (IIA.16) respecto a t y combinando con (IIA.17) se obtiene

(IIA.18) $$\frac{dC}{dt}\frac{1}{C} = -\frac{1}{\eta(C)}\left(\rho - \frac{V_S}{U_C}\right)$$

Notemos que $\eta(C) = -\frac{U_{CC}}{U_C}C$. Como se puede ver en esta expresión, el signo de la tasa de crecimiento del consumo depende de algunos factores. Si $\frac{V_S}{U_C} > \rho$ ocurre que la tasa marginal de sustitución entre el consumo del recurso y el nivel de su acervo es mayor a la tasa a la que se descuenta el futuro. Cuando así sucede, será óptimo mantener una tasa de crecimiento positiva. Si, por el contrario, $\frac{V_S}{U_C} < \rho$, la política óptima de consumo será decreciente. Además, puede ocurrir que, eventualmente, $\frac{V_S}{U_C} = \rho$, lo que implicaría una dinámica estacionaria del consumo. Presumiblemente, si así fuera, el consumo del recurso tendría que ser nulo, so pena de violar la restricción de recursos. La ocurrencia de estos casos depende en buena medida de los supuestos sobre el comportamiento de la función de utilidad instantánea. A continuación se analizan dos casos posibles:

Caso 1. Si el consumo del recurso se considera indispensable para el mantenimiento de la vida, sucede que $\lim_{C \to 0} U_C = \infty$, y, consecuentemente, que $\lim_{S \to 0} v_S(S) < \infty$.[13] En consecuencia, se excluyen los escenarios en los que sea óptimo el mantenimiento de un monto positivo del acervo al finalizar el periodo de planeación. La Figura 4 expone una interpretación geométrica sobre la base de Heal (2001).

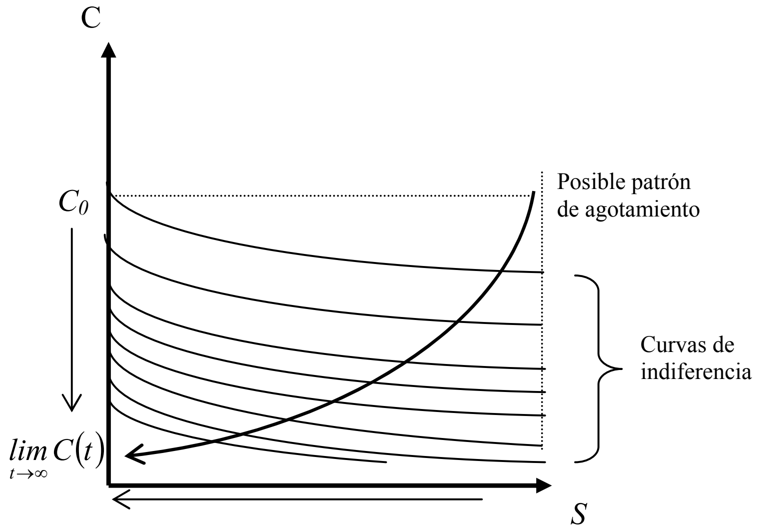

Figura 4. *Un caso en el que el consumo del recurso es esencial*
Dado que $\lim_{C \to 0} U_C(C) = \infty$, *las curvas de indiferencia no tocan C=0.*
Si $\lim_{S \to 0} V_S(S) < \infty$, *un patrón de agotamiento podrá tener consumo positivo hasta agotarse el acervo.*

Fuente: Elaboración propia con base en Heal (1998).

[13] Si, por el contrario, $\lim_{S \to 0} v_S(S) = \infty$ y $\lim_{C \to 0} U_C(C) = \infty$ ocurrieran simultáneamente tendríamos una paradoja: el primer límite impide agotarse el acervo pues éste presta servicios que resultan indispensables para la vida mientras que el segundo establece que el consumo del acervo es también indispensable para la vida. Para no agotarse el acervo (y disfrutar en consecuencia de los servicios que éste presta) habría que dejar de consumirlo. Pero no consumirse el acervo implica que el planificador no pueda vivir (y si el planificador no existe ¿cómo podría disfrutar cualquier cosa?). Así, para evitar esta suerte de contradicción, se asume que $\lim_{C \to 0} U_C(C) = \infty$ y $\lim_{S \to 0} v_S(S) < \infty$. Un argumento adicional en favor de este supuesto es que puede asociarse a un criterio antropocéntrico de preferir siempre escenarios en los que la existencia humana es posible sobre aquellos en los que no lo sea.

Al imponer $\lim_{C\to 0} U_C(C(t)) = \infty$ las curvas de indiferencia no tocan el eje horizontal, y el consumo será siempre positivo en el horizonte de planeación. Si, además, ocurre que $\lim_{S\to 0} v_S(S) < \infty$, entonces las curvas de indiferencia podrán tocar el eje vertical y el acervo podrá agotarse bajo alguna política óptima de consumo. En este caso, una política óptima de consumo $\{C(t)\}_0^\infty$ no puede ser constante. Arriba se comentó que si dicha política fuera constante, entonces asigna a cada generación un consumo nulo del recurso. Toda vez que éste es indispensable para el mantenimiento de la vida, una política con esa característica no podría ser óptima.

Definiendo a una política óptima en el problema II.3 como $\{C^{**}(t)\}_0^\infty$, en ella debe ocurrir que $\frac{V_S}{U_C} < \rho$ para todo $t \in [0, \infty)$, es decir, que la tasa marginal de sustitución es siempre menor a la tasa a la que se descuenta el futuro. De lo contrario, *C*(*t*) sería creciente en todo el horizonte de planeación, lo que violaría la restricción $\int_0^\infty C(t)dt = R$.[14] Así, se tiene que

$$-\frac{\rho}{\eta(C)} < \frac{dC^{**}}{dt}\frac{1}{C} = -\frac{1}{\eta(C^{**})}\left(\rho - \frac{V_S}{U_C}\right) < 0\,,$$

[14] Recordemos que $\frac{V_S}{U_C} > \rho$ implica $\frac{dC}{dt}\frac{1}{C} > 0$ (ver ecuación IIA.18). Notemos que esta situación no es reversible (*i.e.*, no puede haber una fase de consumo creciente seguida por una de consumo decreciente): A medida que C crece, U_C disminuye y V_S aumenta, asegurando que la diferencia entre $\frac{V_S}{U_C}$ y ρ se incremente, contribuyendo así a que la tasa de crecimiento del consumo se eleve aún más. Si el recurso no es renovable, esta situación no se puede mantener indefinidamente.

por lo que $\{C^{**}(t)\}_0^\infty$ decrecerá más lento que $\{C^{*}(t)\}_0^\infty$. Para el caso en que $U(t)$ sea isoelástica, esto implica, como veremos, que el consumo inicial de $\{C^{**}(t)\}_0^\infty$ es menor al de $\{C^{*}(t)\}_0^\infty$. Para probar esto, notemos que la diferencia en las tasas de crecimiento implica que, para cualquier t,

$$C^{**}(t) > C_0^{**} e^{-\frac{\rho}{\eta}t};$$

ahora bien, integrando ambos lados de la desigualdad obtenemos

$$\int_0^\infty C^{**}(t)dt = R > C_0^{**}\frac{\eta}{\rho}.$$

Recordemos que, para el problema II.1, se obtuvo que $C_0^{*} = \frac{\rho}{\eta}R$, por lo que en la desigualdad anterior se puede escribir

$$\frac{\rho}{\eta}R = C_0^{*} > C_0^{**},$$

es decir, que el consumo inicial bajo $\{C^{**}(t)\}_0^\infty$ es menor que el consumo inicial bajo $\{C^{*}(t)\}_0^\infty$.[15]

¿Es suficiente reconocer la influencia directa del acervo en la utilidad instantánea para atender las preocupaciones del planificador sobre el desarrollo sustentable? Para este caso 1, la dinámica del Hamiltoniano evaluado en el óptimo vendría dada por

$$\frac{dH^{**}}{dt} = U_C\frac{dC^{**}}{dt} + V_S\frac{dS^{**}}{dt} - \lambda^{**}(t)\frac{dC^{**}}{dt} - C^{**}(t)\frac{d\lambda^{**}}{dt},$$

[15] En Kautkraemer (1985) se da una prueba de esto para un modelo más general.

considerando (IIA.12) y (IIA.13), lo anterior queda

(IIA.19) $$\frac{dH^{**}}{dt} = -C^{**}(t)\rho U_C < 0$$

Es decir, el Hamiltoniano es no estacionario y decreciente. Poco se puede decir sobre la relación entre la velocidad de cambio de H^{**} con respecto a la de H^{*}. Por ejemplo, si $U(t)$ fuera isoelástica, la velocidad de cambio de H^{**} sería equivalente al inverso aditivo de la tasa a la que se descuenta el futuro, tal como en el problema II.1, pero no es posible asegurarlo si $U(t)$ no es isoelástica. Es así que, en lo que hace a este indicador, el reconocimiento de la influencia directa del recurso natural al bienestar no es suficiente para mantener un bienestar generacional constante.

Por otro lado, bajo $\{C^{**}(t)\}_0^\infty$, la dinámica del indicador de equidad intergeneracional vendría definida por

$$0 < \frac{d\phi^{**}}{dt}\frac{1}{\phi^{**}(t)} = \frac{1}{\eta(C)}\left(\rho - \frac{V_S}{U_C}\right) < \frac{d\phi^{*}}{dt}\frac{1}{\phi^{*}(t)} = \frac{\rho}{\eta(C)},$$

es decir, $\phi^{**}(t)$ tendría una tasa de crecimiento menor a la de $\phi^{*}(t)$. La Figura 5 compara los resultados del caso 1 con los obtenidos para el problema II.2 cuando $U(C(t))$ es isoelástica. La política $\{C^{**}(t)\}_0^\infty$ comienza a un menor consumo inicial y decrece más lento que la de $\{C^{*}(t)\}_0^\infty$. A pesar de eso, H^{**} es una función decreciente (para funciones de utilidad sobre el consumo isoelásticas, H^{*} y H^{**} decrecen a la misma velocidad). En la figura referida H^{*} y H^{**} se han dibujado arbitrariamente con diferentes valores negativos para t=0 por motivos de ilustración. Por otro lado, el indicador de equidad intergeneracional, $\phi^{**}(t)$, es creciente, aunque a una tasa menor que la de $\phi^{*}(t)$.

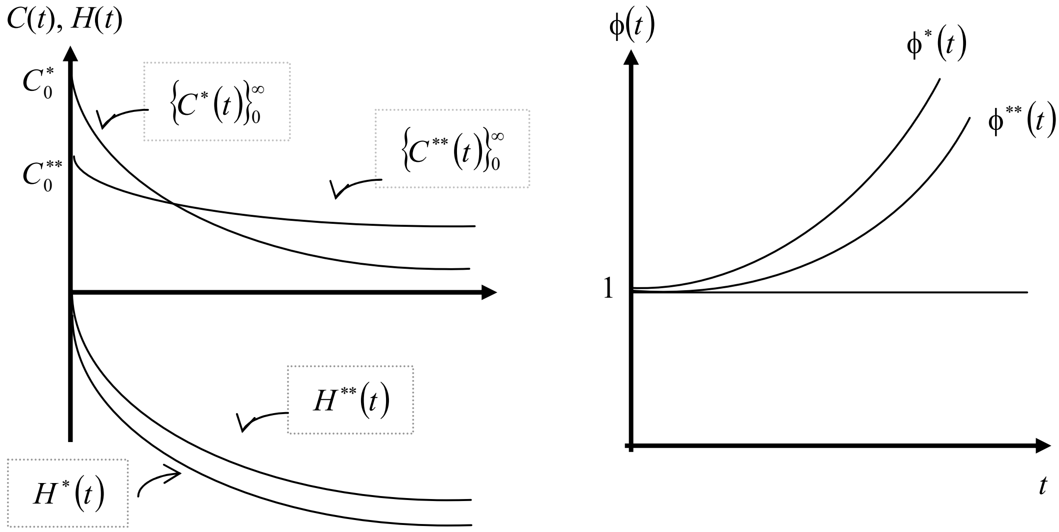

Figura 5. *Patrones de consumo, de bienestar y de equidad intergeneracional comparados La inclusión del acervo como argumento de la función de utilidad instantánea, bajo el caso 1, no implica un desarrollo sustentable de la economía*

Fuente: elaboración propia.

Caso 2. Consideremos el caso en el que el recurso no resulta esencial para el mantenimiento de la vida. Esto se puede representar con $\lim_{C \to 0} U_C(C) < \infty$. Esta modificación sobre los supuestos altera el conjunto de las posibles soluciones. Se sigue de cerca, para este caso, la exposición de Heal (1998). En la Figura 6 se presenta una interpretación geométrica de las curvas de indiferencia: a diferencia del caso anterior, éstas podrán tocar el eje horizontal y, por tanto, puede ser óptima una política de consumo que agote el acervo hasta que éste alcance cierto nivel crítico. Si para cada generación es tolerable una situación de consumo nulo del recurso, entonces puede existir un nivel de acervo, digamos S^*, tal que se cumpla $\frac{V_S}{U_C} = \rho$. Si así ocurriera, a partir de (IIA.18) se puede deducir que en la política óptima de consumo existe un T tal que para cualquier $t \geq T$ el consumo del recurso es nulo.

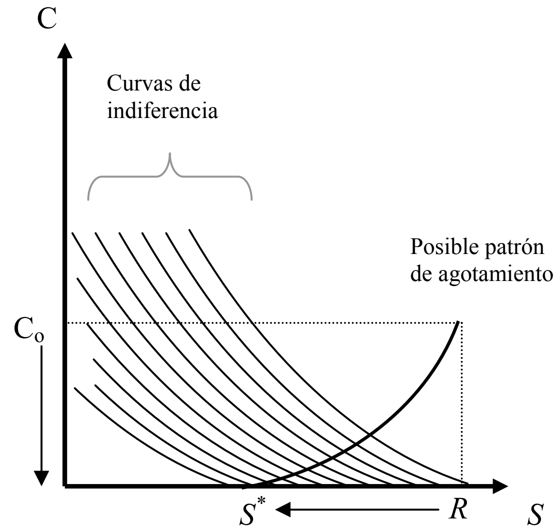

Figura 6. *Un caso en el que el consumo del recurso no es esencial*
Las curvas de indiferencia pueden tocar el eje horizontal,
y una situación con $S^* \geq 0$ y $C=0$ puede ser óptima.

Fuente: Heal (1998)

Así, la política óptima implicaría consumir el acervo a una tasa decreciente hasta que éste alcance el nivel S^* que satisface $\frac{V_S}{U_C} = \rho$. Una vez alcanzado, el consumo sería nulo por siempre y S^* sería mantenido indefinidamente. ¿Cómo es el consumo inicial en esta política? Notemos, primero, que en ésta se pueden distinguir dos fases: en la primera, que comprende el intervalo $[0, T]$, la política óptima, que seguiremos definiendo como $\{C^{**}(t)\}_0^\infty$, tendrá un comportamiento dinámico definido en (IIA.18). En la segunda, definida para $t > T$, ésta asignará un monto nulo de consumo a cada generación. Ahora bien, para cualquier t en el intervalo $[0, T]$ se sigue cumpliendo que

$$C^{**}(t) > C_0^{**} e^{-\frac{\rho}{\eta}t}.$$

Integrando ambos lados de la desigualdad, y reconociendo que, en este caso, la política óptima no agota necesariamente el acervo inicial del recurso, de lo anterior se obtiene que

$$R \geq \int_0^T C^{**}(t)dt > C_0^{**} \frac{\eta}{\rho},$$

de donde se sigue directamente que

$$\frac{\rho}{\eta} R = C_0^{*} > C_0^{**},$$

es decir, el consumo inicial de $\{C^{**}(t)\}_0^\infty$ es menor que el de $\{C^{*}(t)\}_0^\infty$.¿Cómo se traduce esto en términos de los indicadores de sustentabilidad? Para este caso, existen, como decíamos, dos etapas a analizar. Durante la primera, que comprende el intervalo $[0, T]$, la dinámica del Hamiltoniano, igual que en el caso 1, viene dada por

(IIA.19) $$\frac{dH^{**}}{dt} = -C^{**}(t)\rho U_C < 0,$$

mientras que en la segunda etapa, que comprende el intervalo (T,∞), se tiene que

(IIA.20) $$\frac{dH^{**}}{dt} = 0,$$

pues en ella el consumo del recurso es nulo. En la primera etapa, por tanto, la política de consumo no se caracteriza por ser sustentable en el sentido de un Hamiltoniano estacionario. Sin embargo, esto es posible en la segunda etapa, en la que cada generación consumo un monto nulo del acervo. En ella, el Hamiltoniano estacionario es igual a

$$H^{**}(t) = U(0) + V(S^*) > 0$$

Notemos que, en la primera etapa, el valor de H^* depende de las formas particulares de la función de utilidad y de la función $C^{**}(t)$; mientras que en la segunda éste es siempre positivo y constante. En cuanto al indicador de equidad intergeneracional, se tiene que, en la primera etapa, su dinámica se guía, como en el caso 1, por la expresión

$$\frac{d\phi^{**}}{dt}\frac{1}{\phi^{**}(t)} = -\frac{dC^{**}}{dt}\frac{1}{C^{**}(t)} = \frac{1}{\eta(C)}\left(\rho - \frac{V_S}{U_C}\right) < \frac{d\phi^*}{dt}\frac{1}{\phi^*(t)}$$

Sin embargo, durante la segunda etapa, no es posible hacer afirmación alguna respecto a la equidad generacional en cuanto al consumo, a no ser de que todas las generaciones que viven en esta etapa consumen un monto nulo de consumo. Pero esto no puede representarse por medio de la función $\phi(t)$, pues se indetermina cuando $C(t) = 0$. Con todo, mirando lo relativo al tratamiento generacional de acceso al consumo, la política óptima no se caracteriza en este caso por ser sustentable. La Figura 7 interpreta estos resultados y los compara con los del problema II.1.

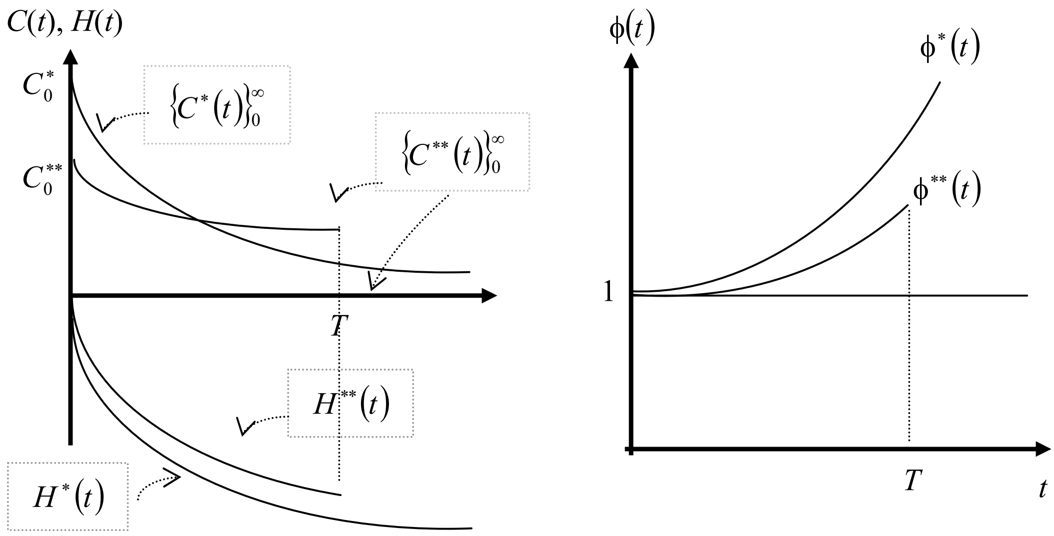

Figura 7. *Patrones de consumo, de bienestar y de equidad intergeneracional comparados En el caso 2, la política de consumo del problema II.3 asigna montos nulos a las generaciones que viven después de T. Por su parte, el Hamiltoniano es decreciente en* $t \in [0, T]$ *y constante en t > T.*

Fuente: elaboración propia.

B. Recurso renovable

Consideremos ahora la situación en la que el recurso natural es renovable. Por sencillez, seguiremos el planteamiento expuesto en Dasgupta y Heal (1978), por lo que asumiremos que existe en la economía una fuente que le provee de un monto constante del recurso independientemente del nivel de su acervo. Estos autores argumentan que un escenario así representa la existencia de un substituto disponible del recurso, de suerte tal que un flujo del bien de consumo se provee a la economía a una tasa constante *M*. Operando de un modo similar al de la exposición anterior, se construye una variable que indique el acervo total del recurso disponible en *t*:

(IIB.1) $$S(t) = R + \int_0^t M d\tau - \int_0^t C(\tau) d\tau .$$

La dinámica del acervo estará determinada por la diferencia entre las tasas a la que aumenta, *M*, y a la que disminuye, *C*(*t*). Derivando (IIB.1) respecto a *t*, obtenemos:

(IIB.2) $$\frac{dS}{dt} = M - C(t)$$

Supongamos que el planificador busca maximizar el flujo a valor presente de utilidad instantánea cuando ésta sólo depende del consumo del recurso y que descuenta el futuro a una tasa positiva y constante ρ. Formalmente, el problema es:

$$\left.\begin{array}{l} \max\limits_{[C(t)]} \int_0^{\infty} e^{-\rho t} U(C(t))dt \\ s.a \\ \dfrac{dS}{dt} = M - C(t) \\ S(t) \geq 0 \end{array}\right\} \text{II.4}$$

El Hamiltoniano a valor corriente para el problema II.4 es

(IIB.3) $$H = U(C(t)) + \lambda(t)[M - C(t)] + q(t)S(t)$$

donde $q(t) \geq 0$ es el multiplicador asociado a la no negatividad de $S(t)$. Debe ocurrir que $q(t)S(t) = 0$. La condición de primer orden de maximizar *H* respecto a $C(t)$ es:

(IIB.4) $$U_C - \lambda(t) = 0,$$

mientras que del Principio del Máximo se requiere:

(IIB.5) $$-q(t) = \frac{d\lambda}{dt} - \rho\lambda(t).$$

Diferenciando (IIB.4) respecto a *t* y combinando con (IIB.5) se obtiene

(IIB.6) $$\frac{dC}{dt}\frac{1}{C} = -\frac{\rho}{\eta(C)} + \frac{1}{\eta(C)}\frac{q(t)}{U_C}.$$

De nueva cuenta, $\eta(C) = -\frac{U_{CC}}{U_C}C$. Ahora bien, mientras $S(t) > 0$, se tiene que $q(t) = 0$, por lo que (IIB.6) es, simplemente,

(IIB.6') $$\frac{dC}{dt}\frac{1}{C} = -\frac{\rho}{\eta(C)}.$$

Lo anterior implica que la política de óptima de consumo decrece a la misma tasa que la del problema II.1. Igual que antes, si $U(C(t)$ es isoelástica la política óptima de consumo, $\{\tilde{C}(t)\}_0^\infty$, estará dada por

(IIB.7) $$\tilde{C}(t) = \tilde{C}_0 e^{-\frac{\rho}{\eta}t}.$$

Ahora bien, la dinámica en $\{\tilde{C}(t)\}_0^\infty$ no puede estar definida por (IIB.6') para todo $t \in [0,\infty)$. Dasgupta y Heal (1974) proporcionan un razonamiento sencillo: si así fuera, entonces para algún $\varepsilon \in (0, M)$, y dado algún $\tilde{C}_0$, existiría algún T tal que para $t>T$ se tendría que $\tilde{C}(t) < \varepsilon$, lo que implicaría que $S(t)\to\infty$, lo que sería subóptimo. Por esta razón, argumentan, es factible tener, a partir de (B.2), $\tilde{C}(t) \geq M$ para todo $t \in [0,\infty)$. A partir de lo anterior es posible identificar dos etapas en $\{\tilde{C}(t)\}_0^\infty$: la etapa uno, comprendiendo un intervalo $[0,T]$ en el que la dinámica de $\{\tilde{C}(t)\}_0^\infty$ se define por (IIB.6'), en la que tanto el valor específico de T como el valor de $\tilde{C}_0$ deben cumplir con las siguientes condiciones:

$$\int_0^T \tilde{C}(t)dt = R + \int_0^T M dt = R + MT, \text{ y}$$

$$\lim_{t\to T}\tilde{C}(t) = M.$$

En la etapa uno la política óptima agota el acervo total del recurso en T (*i.e.*, el monto inicial (R) más lo que se haya acumulado por la tasa autónoma de renovación (MT)). Al final de esta etapa, en T, el consumo del recurso debe ser equivalente a la tasa a la que este se renueva. Si no lo agotara, dicha política estaría dejando para un $t > T$ un acervo $S(t)$ positivo, por lo que $\{\tilde{C}(t)\}_0^{\infty}$ podría seguir decreciendo a la tasa representada por (IIB.6'), y la etapa uno continuaría aún después de T. Si el consumo fuera menor a M en la etapa 2, ocurriría que $S(t)\rightarrow\infty$, lo que sería ineficiente. Por estas razones, se debe cumplir que $S(t)=0$ y que $\frac{dS}{dt}=0$ para $t \geq T$.

Esto da pie al inicio de la etapa dos, que comprendería el intervalo $[T,\infty)$, en la que $C(t)=M$ y, por tanto, $\frac{dC}{dt}\frac{1}{C}=0$. Imponiendo esto en (IIB.6) se obtiene que $q(t)=U_C(M)\rho = constante$ para todo $t \in [T,\infty)$. Así, la etapa dos se caracteriza por no mantener acervo positivo y por mantener un consumo equivalente a la tasa autónoma de renovación del recurso. ¿Es un desempeño como el de $\{\tilde{C}(t)\}_0^{\infty}$ sustentable? Veamos los comportamientos asociados de los indicadores sugeridos. En cuanto al Hamiltoniano, ocurre que, para todo $t \in [0,\infty)$, este es, evaluado en el óptimo,

(IIB.8) $$\tilde{H} = U(\tilde{C}(t)) + \tilde{\lambda}(t)[M - \tilde{C}(t)].$$

Notemos que, en la etapa uno, $\tilde{S}(t) \geq 0$ y $\tilde{q}(t) \geq 0$, por lo que $\tilde{S}(t)\tilde{q}(t)=0$; mientras que en la etapa dos ocurre $\tilde{S}(t)=0$ y $\tilde{q}(t)>0$, lo que resulta, también, en que $\tilde{S}(t)\tilde{q}(t)=0$. El supuesto de que el recurso es renovable hace posible que la dinámica del Hamiltoniano no sea estable, es decir, que no sea siempre constante o siempre decreciente. La dinámica del

Hamiltoniano evaluado en el óptimo se clasifica dependiendo de la etapa en la que se encuentre. Así, en la etapa uno, en la que $\tilde{q}(t)=0$, ésta se regirá por

(IIB.9)
$$\frac{d\tilde{H}}{dt}=\left[\rho U_C-\tilde{q}(t)\right]\left[M-\tilde{C}(t)\right]=\rho U_C\left[M-\tilde{C}(t)\right]<0$$

para todo $t\in[0,T]$,

Por su parte, en la etapa dos el comportamiento es el siguiente:

(IIB.10)
$$\frac{d\tilde{H}}{dt}=\left[\rho U_C-\tilde{q}(t)\right]\left[M-\tilde{C}(t)\right]=0$$

para todo $t\in[T,\infty)$,

pues tanto $\rho U_C=\tilde{q}(t)$ como $\tilde{C}(t)=M$. Así, en la etapa uno el Hamiltoniano es decreciente y en la etapa dos es constante. De hecho, en esta última ocurre que $\tilde{H}(t)=U(M)>0$. Por su parte, el indicador de equidad generacional también tiene comportamientos diferenciados respecto a la etapa de la que trate. Así, para las generaciones que viven en $[0,T]$, se tiene que $\tilde{\phi}(t)=\frac{\tilde{C}_0}{\tilde{C}(t)}$, mientras que para las que viven en (T,∞) ocurre $\tilde{\phi}(t)=\frac{\tilde{C}_0}{M}$. La dinámica de $\tilde{\phi}(t)$ se define, entonces, como

$$\frac{d\tilde{\phi}}{dt}\frac{1}{\tilde{\phi}(t)}=\begin{cases}\dfrac{\rho}{\eta(C)} & \text{si } t\in[0,T]\\ 0 & \text{si } t\in(T,\infty)\end{cases};$$

es decir, en todo el horizonte de planeación la inequidad en el acceso al consumo es a favor de las generaciones tempranas: en la etapa uno ésta es constante mientras que en la etapa dos es constante. Notemos también que, en todo el horizonte de planeación, $\tilde{\phi}(t)>1$. Con todo, si miramos el desempeño de esta economía considerando todo el horizonte de planeación es claro que, bajo la política óptima $\{\tilde{C}(t)\}_0^\infty$, no es sustentable. Pero si miramos el desempeño etapa por etapa, se hace notar que a partir de la segunda el desempeño es sustentable pues, en ella, todas las generaciones consumen el mismo monto del recurso indefinidamente y todas gozan de un mismo nivel de bienestar instantáneo. ¿Existe algún escenario en el que el planificador pueda trasladar, por decirlo así, los resultados de la segunda etapa a todo el horizonte de planeación y obtener así un desarrollo sustentable? La respuesta es positiva, pero pasa por asumir, de entrada, un trato generacional equitativo en la función objetivo. Es decir, el planificador debe descontar el futuro a tasa cero.

Para ver el detalle de la solución sustentable, supongamos que el planificador busca maximizar el flujo a valor corriente de utilidad instantánea cuando ésta sólo depende del consumo del acervo. Formalmente, el problema es:

$$\left.\begin{array}{l} \max\limits_{[C(t)]} \int_0^\infty U(C(t))dt \\ s.a \\ \dfrac{dS}{dt} = M - C(t) \\ S(t) \geq 0 \end{array}\right\} \text{II.5}$$

El Hamiltoniano asociado a II.4 es:

(IIB.11) $$H = U(C(t)) + \lambda(t)[M - C(t)] + q(t)S(t),$$

donde $q(t) \geq 0$ es el multiplicador asociado a la no negatividad de $S(t)$. Debe ocurrir que $q(t)S(t) = 0$. La condición de primer orden de maximizar H respecto a $C(t)$ es:

(IIB.12) $$U_C - \lambda(t) = 0,$$

mientras que del Principio del Máximo se sigue que

(IIB.13) $$-q(t)=\frac{d\lambda}{dt}.$$

Derivando (IIB.12) respecto a *t* y combinando con (IIB.13) se obtiene

(IIB.14) $$\frac{dC}{dt}\frac{1}{C}=\frac{q(t)}{\eta(C)U_C}$$

Notamos que, mientras $S(t) > 0$ ocurre que $q(t) = 0$, por lo que (IIB.14) es, simplemente,

(IIB.14’) $$\frac{dC}{dt}\frac{1}{C}=0;$$

esto implica que en la política óptima del problema II.5, $\{\hat{C}(t)\}_0^\infty$, la función de consumo asigna un monto constante a las infinitas generaciones equivalente a *M*. Veremos por qué. Supongamos que no es así: *a*) si $\hat{C}(t)<M$ entonces ocurre que $\lim_{t\to\infty} S(t)=\infty$, lo que resultaría ineficiente en términos de la maximización dinámica del bienestar generacional; *b*) si $\hat{C}(t)>M$ entonces existe un *T* tal que para cualquier $t \geq T$ se tendría que $S(t) = 0$. Lo anterior implica que $\hat{C}(t)=M$ para $t \geq T$. Sin embargo, por las ecuaciones (IIB.12) y (IIB.13) se debe cumplir que $U_C = \lambda(t) =$ *constante* en todo el horizonte infinito. ¿Por qué es así? Para $t < T$ ocurre que $S(t) > 0$, por lo que $q(t) = 0$. Esto implica, por (IIB.13), que $\lambda(t) =$ *constante*. Ahora bien, para $t \geq T$ se tiene que $\hat{C}(t)=M$, por lo que, de nueva cuenta, $q(t) = 0$ (ver ecuación (IIB.14)).

Es así que para $t\in[0,\infty)$ ocurre que $U_C = \lambda(t) =$ *constante*, lo que excluye la posibilidad de que una política $\{\hat{C}(t)\}_0^\infty$ tal que $\hat{C}(t)>M$ para $t < T$ y $\hat{C}(t)=M$ para $t \geq T$ sea óptima. Una política $\{\hat{C}(t)\}_0^\infty$ es óptima si $\hat{C}(t)=M$ para $t\in[0,\infty)$. Además, esta política es sustentable bajo los dos criterios sugeridos. Evaluando (IIB.11) en el óptimo se obtiene $\hat{H}(t) = U(M) = constante > 0$, de donde se sigue que el Hamiltoniano es estacionario. Por otro lado, el indicador de equidad generacional de acceso al consumo es, evaluado en la política óptima $\{\hat{C}(t)\}_0^\infty$, $\hat{\phi}(t) = 1$, pues ésta asigna $\hat{C}(t) = M$ para $t \in [0, \infty)$.

La Figura 8 compara estos resultados con los del problema II.4. Allí, se ha dibujado arbitrariamente un valor negativo de $\tilde{H}(t)$ para la etapa 1 del problema II.4. Se ha procedido así por fines de ilustración. En la etapa dos de dicho problema, $\tilde{H}(t) = U(M)$, es decir, el Hamiltoniano es constante y positivo e igual al Hamiltoniano del problema II.5.

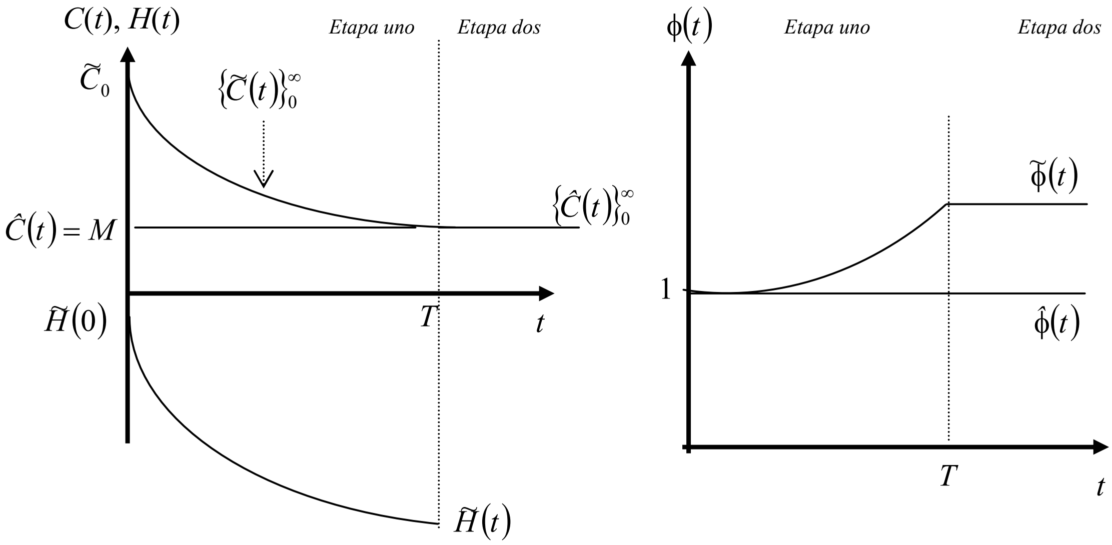

Figura 8. *Patrones de consumo, de bienestar y de equidad generacional comparados: En la etapa uno del problema II.4 el indicador de equidad es creciente y el Hamiltoniano decreciente; en su etapa dos ambos son constantes. El problema II.5 permite un desarrollo sustentable pues estos indicadores son constantes.*

Fuente: elaboración propia.

<u>Reconociendo el acervo como argumento de la función de utilidad</u>

Ahora se analiza el desempeño de una economía que depende de un recurso renovable en la que las generaciones reconocen la influencia directa que su acervo tiene en la provisión de utilidad. Igual que en el apartado A de esta sección, esto se puede representar por medio de la siguiente función de utilidad:

(IA.10) $$B = B(C(t), S(t)) = U(C(t)) + V(S(t)),$$

en donde se cumplen las mismas condiciones respecto a las funciones $U(C(t))$ y $V(S(t))$. Analicemos primero el caso en el que el planificador busca maximizar el flujo a valor corriente de la utilidad instantánea. La inclusión del acervo en la función de utilidad no permite, como se verá a continuación, la existencia de una política óptima. Formalmente, el problema es:

$$\left.\begin{array}{l} \max\limits_{[C(t)]} \int_0^\infty [U(C(t)) + V(S(t))]dt \\ s.a \\ \dfrac{dS}{dt} = M - C(t) \\ S(t) \geq 0 \end{array}\right\} \text{II.6}$$

El Hamiltoniano para el problema II.6 es

(IIB.15) $$H = U(C(t)) + V(S(t)) + \lambda(t)[M - C(t)] + q(t)S(t).$$

donde, como antes, $q(t) \geq 0$ es el multiplicador asociado a la no negatividad de $S(t)$. Debe ocurrir que $q(t)S(t) = 0$.La condición de primer orden de maximizar (IIB.15) con respecto a la función del consumo es

(IIB.16) $$U_C - \lambda(t) = 0,$$

mientras que del Principio del Máximo se obtiene que

(IIB.17) $$-V_S - q(t) = \frac{d\lambda}{dt}$$

Derivando (IIB.16) y combinando el resultado con (IIB.17) se obtiene la ecuación que rige el movimiento del consumo:

(IIB.18) $$\frac{dC}{dt}\frac{1}{C}=\frac{1}{\eta(C)}\left[\frac{V_S}{U_C}+\frac{q(t)}{U_C}\right].$$

Notemos que el consumo será no decreciente en todo el horizonte de planeación: si $S(t)>0$ ocurre que $q(t) = 0$ y (IIB.18) sería

(IIB.18') $$\frac{dC}{dt}\frac{1}{C}=\frac{1}{\eta(C)}\frac{V_S}{U_C}>0.$$

Independientemente del valor del consumo inicial (*i.e.*, no importando la relación de orden de éste con relación a M), existe un T (cuyo valor sí depende del consumo inicial) tal que para $t\geq T$ ocurre que $S(t) = 0$ y, en consecuencia, $C(t) = M$. Esto implica que para cualquier $t\geq T$ el consumo es estacionario, *i.e.*,

$$\frac{dC}{dt}\frac{1}{C}=0 \text{ para } t\in[T,\infty).$$

Imponiendo esto en (IIB.18) se obtiene que $q(t)=-V_S<0$ para $t\in[T,\infty)$, lo que contradice el requerimiento de que $q(t) \geq 0$. Por tanto, no existe política de consumo que cumpla las condiciones de una política óptima para el problema II.6. Supongamos ahora que, previniendo esto, el planificador busca maximizar el flujo a valor presente de la utilidad instantánea. Veamos el caso en el que descuenta el futuro a una tasa ρ positiva y constante. Formalmente, el nuevo problema es:

$$\left.\begin{array}{l} \max\limits_{[C(t)]} \int_0^\infty e^{-\rho t}\left[U(C(t))+V(S(t))\right]dt \\ s.a \\ \dfrac{dS}{dt} = M - C(t) \\ S(t) \geq 0 \end{array}\right\} \text{II.7}$$

El Hamiltoniano a valor corriente asociado a II.7 es,

(IIB.19) $$H = U(C(t)) + V(S(t)) + \lambda(t)[M - C(t)] + q(t)S(t)$$

donde, como antes, $q(t) \geq 0$ es el multiplicador asociado a la no negatividad de $S(t)$. Debe ocurrir, adicionalmente, que $q(t)S(t) = 0$. La condición de primer orden de maximizar (IIB.19) con respecto a $C(t)$ es

(IIB.20) $$U_C - \lambda(t) = 0,$$

mientras que del Principio del Máximo ahora se obtiene

(IIB.21) $$-V_S - q(t) = \frac{d\lambda}{dt} - \rho\lambda(t).$$

Operando con (IIB.20) y (IIB.21) del mismo modo que antes se llega a

(IIB.22) $$\frac{dC}{dt}\frac{1}{C} = \frac{1}{\eta(C)}\left[\frac{V_S}{U_C} - \rho\right] + \frac{1}{\eta(C)}\frac{q(t)}{U_C}$$

Cuando $S(t) > 0$, (IIB.22) queda

(IIB.22') $$\frac{dC}{dt}\frac{1}{C} = \frac{1}{\eta(C)}\left[\frac{V_S}{U_C} - \rho\right]$$

es decir, se llega a la misma tasa de crecimiento que se obtiene en el problema II.3, en el que el recurso es no renovable. Es necesario percatarse que una tasa positiva de consumo, lo que ocurre cuando $\frac{V_S}{U_C} > \rho$, no puede implicar una política óptima de consumo, pues, igual que antes, existiría un T tal que ocurre $S(t) = 0$ y $C(t) = M$ para $t \geq T$.[16] Esto implicaría que para cualquier $t \geq T$ el consumo sea estacionario, *i.e.*,

$$\frac{dC}{dt}\frac{1}{C} = 0 \text{ para } t \in [T, \infty);$$

y, si así ocurre, de (IIB.22') se obtiene que $q(t) = -U_C\left[\frac{V_S}{U_C} - \rho\right] < 0$ para $t \in [T, \infty)$, lo que contradice el requerimiento de que $q(t) \geq 0$. Se tiene, por tanto, que la política de consumo óptima para el problema II.7, que designaremos por $\{C'(t)\}_0^\infty$, es no creciente en el horizonte de planeación. Además, el consumo para cualquiera de las infinitas generaciones es no menor a M.[17] Ahora bien, el comportamiento del consumo depende de la función de utilidad y, en particular, de la evolución de la tasa marginal de sustitución. De nueva cuenta, aparecen dos casos susceptibles de análisis, aunque esta vez su distinción no depende del supuesto de la dependencia del mantenimiento de la vida sobre el consumo del acervo, sino de que si eventualmente existe un momento en el tiempo tal que $\frac{V_S}{U_C} = \rho$.

Caso 1. Supongamos que en todo el horizonte de planeación ocurre que $\frac{V_S}{U_C} < \rho$. El consumo, en consecuencia, sería no creciente: tendríamos un intervalo $(0, T)$ en el que el

[16] Notemos, intuitivamente, lo siguiente sobre la evolución de la tasa marginal de sustitución: si el consumo es decreciente, ocurre que U_C es creciente, mientras que el progresivo agotamiento del acervo implica que V_S sea también creciente. Tenemos, entonces, que tanto el numerador como el denominador están creciendo, por lo que si el cociente crece, se mantiene constante, o decrece depende de la función de utilidad particular que se haya elegido. Si, de otro modo, el consumo es creciente, el agotamiento progresivo del acervo implica que V_S es creciente mientras que U_C sea decreciente. En este caso no hay lugar a la ambigüedad: la tasa marginal será creciente.

[17] Si la política de consumo no creciente asignara montos menores a M, se tendría que $S(t) \rightarrow \infty$, lo que no sería eficiente.

consumo se rige por (IIB.22') de un modo tal que $S(T) = 0$, y un intervalo $[T,\infty)$ en el que sería estacionario, $C(\mathrm{t}) = M$. ¿Por qué ocurre así? Una vez que el consumo agota el acervo, no es posible mantener un consumo decreciente por debajo de M, pues si así fuera existiría un ε y un τ tales que $C(t)<\varepsilon$ para $t>\tau$, lo que implicaría que $S(t) \to \infty$, lo que no es eficiente. Por otro lado, una vez que se ha agotado el acervo, es claro que $C(t) > M$ no es factible. Así, tenemos que en $[T,\infty)$ ocurre que $C(t) = M$. Por este motivo, el consumo es estacionario en este último intervalo. A partir de (IIB.22) se tiene, como consecuencia de lo anterior, que $q(t) = -U_C\left[\frac{V_S}{U_C} - \rho\right] > 0$ para $t \in [T,\infty)$, pues se ha supuesto que $\frac{V_S}{U_C} < \rho$.[18] Una política para el problema II.7 que cumpla con las condiciones de este caso es óptima. Cabe ahora preguntarse si el desempeño de la política óptima en el caso 1 es sustentable.

Evaluando (IIB.19) en el óptimo, y calculando su derivada con respecto a t, se obtiene que el Hamiltoniano es no creciente:

$$\frac{dH'}{dt} = \begin{cases} -\rho U_C[M - C'(t)] < 0 & \text{si } t \in (0,T) \\ 0 & \text{si } t \in [T,\infty) \end{cases}$$

es decir, es decreciente en el intervalo en el que el acervo no se ha agotado y el consumo es decreciente, y es estacionario en el intervalo en el que el consumo es constante. En este último intervalo, el valor constante del Hamiltoniano se define como $H' = U(M) + V(0)$. Ahora bien, la dinámica del indicador de equidad generacional de acceso al consumo se rige por

[18] Notemos que $S(t) = 0$ en ese intervalo, lo que asegura que $S(t)q(t) = 0$.

$$\frac{d\phi'}{dt}\frac{1}{\phi'(t)}=\begin{cases}-\dfrac{1}{\eta(C)}\left[\dfrac{V_S}{U_C}-\rho\right]>0 & \text{si } t\in(0,T)\\ 0 & \text{si } t\in[T,\infty)\end{cases},$$

es decir, existe, en todo el horizonte de planeación, inequidad de acceso al consumo a favor de las generaciones tempranas. La inequidad es creciente para las generaciones que viven en el intervalo en el que no se ha agotado el acervo, mientras que es constante y menor a uno para aquellas que viven después de que éste se ha agotado.

Caso 2. Ahora supondremos que existe un momento en el tiempo, y un nivel de acervo, en el que $\frac{V_S}{U_C}=\rho$. Si llamamos *T* a dicho momento, tenemos que la política óptima de consumo es decreciente a la tasa (IIB.22') en el intervalo $(0,T)$ y estacionaria en $[T,\infty)$. En el último intervalo debe cumplirse que $C(t) = M$, por las mismas razones del caso uno. La única diferencia de este caso con relación al primero es que el consumo es estacionario dejando un monto de acervo positivo intacto por siempre. Sin embargo, el análisis de la sustentabilidad es análogo al del caso 1: el Hamiltoniano es decreciente en $(0,T)$ y estacionario en $[T,\infty)$. La diferencia referida implica que, en este caso, el Hamiltoniano estacionario es igual a $H'=U(M)+V(S^*)>U(M)+V(0)$, donde S^* es el nivel de acervo que cumple $\frac{V_S}{U_C}=\rho$. Por su parte, pare este caso, la dinámica del indicador de equidad generacional se define de la misma manera que en el caso 1. Sólo hay que notar que el momento *T* en el que dicho indicador comienza a ser estacionario puede ser distinto al del caso 1. Con todo, la inequidad opera a favor de las generaciones tempranas: es creciente en $(0,T)$ y constante (menor a uno) en $[T,\infty)$.

¿Existe alguna posibilidad de que la política la política óptima de consumo, $\{C'(t)\}_0^\infty$, sea la misma para los dos casos? La respuesta es positiva. Es decir, los casos no implican necesariamente situaciones mutuamente excluyentes: puede ocurrir que el nivel de acervo S^* que cumple con $\frac{V_S}{U_C} = \rho$ es igual a cero, situación en la cual el momento *T* en el que el consumo, el Hamiltoniano y el indicador de equidad generaciona comienzan a ser estacionarios es el mismo para ambos casos. Cuando así pasa, la política óptima que resuelve ambos casos es la misma. Fuera de esta posibilidad, dicha política será diferente para cada uno de los casos. Si el nivel S^* al que se cumple que $\frac{V_S}{U_C} = \rho$ es positivo, el caso 2 informa que $\{C'(t)\}_0^\infty$ no agota el acervo del recurso, lo que es condición suficiente, como veremos, para que cada uno de los casos requieran diferentes funciones de consumo en la política óptima.

En el caso 1, en el que $\{C'(t)\}_0^\infty$ agota el acervo en un momento dado, que llamamos T_1, la función de consumo debe cumplir con las siguientes condiciones:

$$\int_0^{T_1} C'(t)dt = R + MT_1 \text{, y}$$

$$\lim_{t \to T_1} C'(t) = M \text{ ,}$$

es decir, en el intervalo $[0, T_1]$ la política $\{C'(t)\}_0^\infty$ agota el acervo total de una manera en la que $C'(T_1)=M$. Por otro lado, en el caso 2, si S^* es positivo, la política $\{C'(t)\}_0^\infty$ no agota el acervo, sino que consume a un momento T_2 sólo una fracción del acervo total. Formalmente,

$$\int_0^{T_2} C'(t)dt = \beta(R + MT_2), \text{ con } \beta \in (0{,}1), \text{ y}$$

$$\lim_{t \to T_2} C'(t) = M \ ,$$

es decir que, igual que en el caso 1, se debe cumplir que $C'(T_2)=M$. De lo anterior se deduce directamente que

$$\int_0^{T_2} C'(t)dt = \beta(R + MT_2) < R + MT_1 = \int_0^{T_1} C'(t)dt \ ,$$

lo que implica, junto a $\lim_{t \to T_2} C'(t) = M$ y a $\lim_{t \to T_1} C'(t) = M$, que $T_2<T_1$ y que $C'(0)$ es menor en el caso 2 que en el caso 1. La Figura 9 interpreta estos resultados.

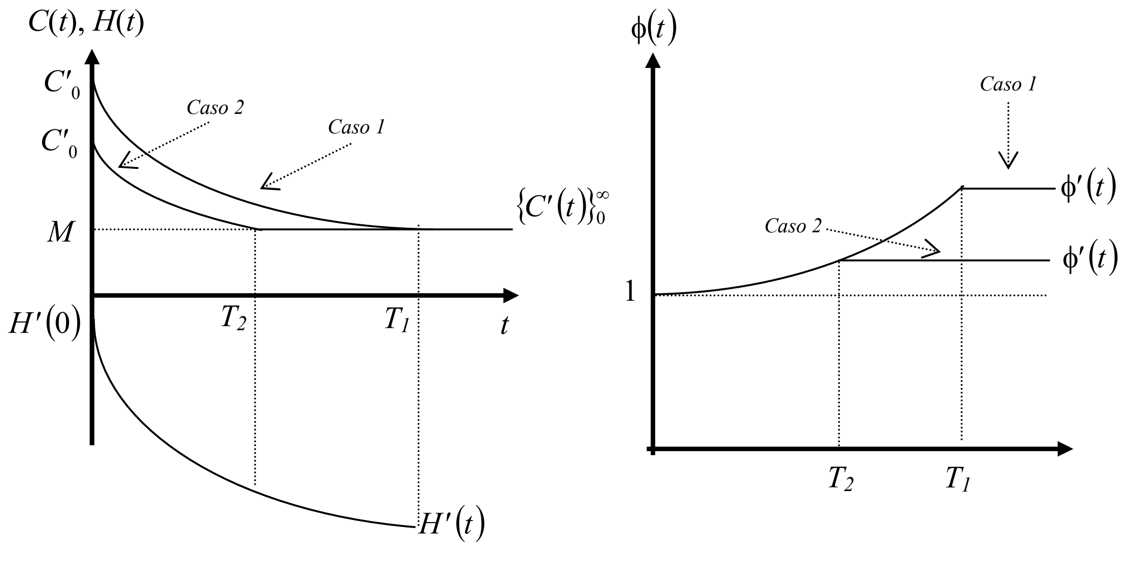

Figura 9. *Patrones de consumo, de bienestar y de equidad generacional del problema II.7 En el caso 1,la inequidad generacional es creciente por más tiempo que en el caso 2 y es constante a un mayor valor.*

Fuente: elaboración propia.

Por sencillez, se ha impuesto arbitrariamente que el Hamiltoniano es negativo y equivalente en ambos vasos. En el caso 2, decrecerá en el intervalo $(0,T_2)$ y será constante al nivel $H' = U(M) + V(S^*)$ en el intervalo $[T_2, \infty)$. En el caso 1, decrecerá en el intervalo $(0, T_1)$ y será constante al nivel $H' = U(M) + V(0)$ en el intervalo $[T_1, \infty)$. De cualquier forma, en ambos casos la política óptima de consumo no genera un desarrollo sustentable en todo el horizonte de planeación. Además, a diferencia del problema II.4, si el planificador decidiera descontar el futuro a una tasa cero, no encontraría, como vimos anteriormente, una política de consumo que cumpliera con las condiciones de una política óptima. Cuando el recurso es renovable, el reconocimiento de la influencia directa del acervo del recurso sobre la utilidad instantánea tiene el efecto no deseado de imposibilitar un desarrollo sustentable. Éste se logra descontando el futuro a una tasa cero y no reconociendo dicha importancia directa.

-

III. Conclusiones

En este trabajo se realizó un estudio detallado sobre los condicionantes del desarrollo sustentable para una economía que optimiza dinámicamente. Se ha supuesto que el bienestar en dicha economía depende del consumo del acervo y que existe un planificador que busca maximizar el flujo de utilidad instantánea en un horizonte infinito. El estudio se ha enfocado a identificar la combinación entre comportamientos y situaciones tal que la maximización dinámica obtenga una política óptima de consumo que implique un desarrollo sustentable de la economía. Los comportamientos estudiados son aquellos asociados a la práctica del descuento del futuro y a reconocer la influencia directa del acervo del recurso en el bienestar instantáneo.

Las situaciones analizadas se asocian a las características del recurso natural en el sentido de si es o no renovable. En la situación en la que éste no es renovable, sólo bajo la práctica de descontar el futuro a una tasa positiva se obtienen políticas óptimas de consumo. Sin embargo, se ha obtenido el resultado estándar de que no existe política óptima tal que implique un desarrollo sustentable de la economía. Un cambio en el comportamiento, en el sentido de reconocer la importancia directa del acervo en la función de utilidad instantánea, tiene el efecto de disminuir la tasa a la que decrece el consumo, pero no por ello genera un desarrollo sustentable.

En la situación en la que el recurso es renovable, se ha obtenido el resultado de que existe una política de consumo óptima tal que implica un desarrollo sustentable. Dicha política se asocia a los comportamientos de descontar el futuro a una tasa cero y de no reconocer la importancia directa del acervo en la provisión de bienestar. Una de las características principales de dicha política es la de asignar a todas las generaciones un monto de consumo equivalente a la tasa a la que se renueva el acervo. Por tanto, el resultado sustentable se matrimonia bien con el requerimiento tradicional que reclama la práctica de explotar los recursos a una tasa equivalente a la que se renuevan como una condición para la sustentabilidad del desarrollo. Por tanto, en este trabajo se sustenta la afirmación de que dicha práctica puede ser óptima, es decir, puede maximizar una función de bienestar social.

Además, como se estudió en la sección II, dicha política de consumo tiene la virtud de que deja intacto el acervo inicial del recurso con el que cuenta la economía. Este hecho se aviene bien con algunos planteamientos conservacionistas surgidos desde posiciones ambientalistas: Una política que deje intacto el acervo del recurso, y que sólo consuma un monto equivalente a la tasa de renovación, puede ser óptima para alguna función de bienestar social. Vale la pena resaltar tres de las posibles lecciones que se pueden extraer del resultado sustentable.

La primera consiste en reconocer que no hay manera en que la práctica de descontar el futuro a una tasa positiva constante genere un resultado sustentable. Las implicaciones de esto irían, al menos, en el siguiente aspecto: en términos generales, esto fundamenta la idea de que el desarrollo sustentable no es posible cuando se pondera más al presente que al futuro. Su búsqueda, por tanto, debe ponderar de igual manera al bienestar presente y al bienestar futuro, no importando cuán distante sea éste.[19] La segunda consiste en apuntalar la búsqueda de situaciones en las que impere la dependencia hacia recursos renovables sobre la dependencia hacia no renovables. En este sentido, por ejemplo, no se podrá hablar

[19] Esta reflexión se relaciona directamente con el llamado "criterio Chichilnisky" de la literatura sobre desarrollo sustentable en economías que optimizan dinámicamente. Este criterio asevera que en un desarrollo sustentable no son posibles las existencias de "dictaduras" del presente o del futuro (Chichilnisky, 1993; Heal, 1998; Pezzey y Toman, 2002).

de un potencial desarrollo sustentable en la medida en que la actividad económica mantenga un patrón energético dependiente de recursos no renovables, caracterizado por una situación en la que la tasa a la que se generan y se utilizan sustitutos es menor a la tasa de su extracción. En un escenario así, no importa la preocupación sobre el futuro o sobre el mantenimiento de los acervos: la sustentabilidad del desarrollo no será alcanzable.

La tercera lección surge al percatarse que, a la luz de los resultados de este trabajo, el reconocimiento de la importancia directa del acervo al bienestar no es suficiente para un desarrollo sustentable. Sus posibilidades, en cambio, dependen, antes que del comportamiento en la planificación, de la situación en la que ésta se lleva a cabo. En otras palabras, el desarrollo sustentable requiere de una base material (*i.e.*, dependencia hacia recursos renovables), no nada más de cambios de comportamiento (*i.e.*, reconocer su importancia directa en el bienestar, descontar el futuro a una tasa cero).

Ahora bien, vale la pena exponer algunas de las interrogantes que este trabajo plantea, y que son susceptibles de tratamiento posterior en este campo de estudio. La situación caracterizada por un recurso renovable fue abordada suponiendo que la tasa de renovación es constante e independiente del nivel del acervo. Cabría estudiar si una eventual política óptima de consumo obtenida de un supuesto menos restrictivo (por ejemplo, que dicha tasa varíe con el nivel del acervo) puede implicar un desarrollo sustentable para alguna de las combinaciones de comportamiento aquí tratadas. Por otro lado, los resultados de este trabajo pueden apuntar hacia la afirmación de que, independientemente de las características del recurso, el desarrollo sustentable no es posible cuando se descuenta el futuro a una tasa constante y positiva. Una extensión a este trabajo podría motivarse por probar la validez de esta afirmación.

Por último, se puede estudiar la relación de la política óptima de consumo sustentable aquí encontrada con algunos criterios de sustentabilidad diferentes. Por ejemplo, el llamado "criterio Chichilnisky" implica que una política de consumo es sustentable cuando no se basa en "dictaduras" del presente o del futuro. El resultado sustentable obtenido en este trabajo implica un acceso equitativo al consumo para las infinitas generaciones, lo que podría interpretarse en el sentido de que el presente no está beneficiado respecto al futuro y viceversa. Intuitivamente, esto apuntaría a afirmar que esta política de consumo debe satisfacer el criterio Chichilnisky. Una extensión de este trabajo puede centrarse en demostrarlo.

Bibliografía y referencias

Cerdá, Emilio (2001)/ *Optimización dinámica*, Prentice Hall, Madrid.

Chiang, Alpha (1977)/ *Elements of Dynamic Optimization*, McGraw-Hill, Nueva York.

Chichilnisky, Graciela (1993)/ "What Is Sustainable Development", ponencia presentada en el taller anual del Stanford Institute for Theoretical Economics.

Dasgupta, Partha y Geoffrey Heal (1974)/ "The Optimal Depletion of Exhaustible Resources", *The Review of Economic Studies* vól. 41, Symposium on the Economics of Exhaustible Resources, 3-28.

Dorfman, Robert (1969)/ "An Economic Interpretation of Optimal Control Theory", *American Economic Review* vól. 59, núm. 5, 817-831.

Farzin, Y.H. (2000)/ "Sustainability, Hamiltonian Value, and NNP in a Cake-Eating Economy", ponencia presentada en la décima conferencia anual de la European Association of Environmental and Resource Economists en Creta, Grecia, mimeo, Por publicarse en la *Journal of Development*.

Gale, David (1967)/ "On Optimal Development in a Multi-Sector Economy", *Review of Economic Studies* vól. 34, núm. 1, 1-18.

Heal, Geoffrey (1993)/ *The Optimal Use of Exhaustible Resources*. Vólumen III de Alan Kneese y James Sweeney, editores/ *Handbook of Natural Resource and Energy Economics*, North Holland, Amsterdam, Nueva York y Oxford.

Heal, Geoffrey (1996)/ "Interpreting Sustainability", *PaineWebber Working Papers in Money, Economics and Finance* PW-95-24, Columbia Business School, Columbia University, Nueva York.

Heal, Geoffrey (1998)/ *Valuing the Future: Economic Theory and Sustainability*, Columbia University Press, Nueva York.

Heal, Geoffrey (2001a)/ "Optimality or Sustainability", ponencia presentada en la Conferencia EAERE 2001 en Southampton, mimeo.

Heal, Geoffrey (2001b)/ "Intertemporal Welfare Economics and the Environment", mimeo.

Hoteling, Harold (1931)/ "The Economics of Exhaustible Resources", *Journal of Political Economy* vól. 39, núm. 2. 137-175.

Kamien, Morton y Nancy Schwartz (1981)/ *Dinamic Optimization. The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*, North-Holland, Nueva York.

Kautkraemer, Jeffrey (1985)/ "Optimal Growth, Resource Amenities and the Preservation of Natural Environments", *Review of Economic Studies* vól. 52, núm. 1. 153-170.

Koopmans, Tjalling (1973)/ "Some observations on 'optimal' economic growth and exhaustible resources", Cowles Foundation Paper 396, Yale University.

Koopmans, Tjalling (1974)/ "Proof for a Case where Discounting Advances the Doomsday", *The Review of Economic Studies* vól. 41, Symposium on the Economics of Exhaustible Resources, 117-120.

Lomelí, Héctor y Beatriz Rumbos (2003)/ *Métodos dinámicos en economía. Otra búsqueda del tiempo pérdido*, Thomson, México.

Peterson, Frederick y Anthony Fisher (1977)/ "The Exploitation of Extractive Resources: a Survey", *The Economic Journal* vól. 87, núm. 348, 681-721.

Pezzey, John (1992)/ "Sustainable Development Concepts: An Economic Analysis", World Bank Environment Paper Number 2, El Banco Mundial, Washington.

Pezzey, John y Michael Toman (2002)/ "The Economics of Sustainability: A Review of Journal Articles", Discussion Paper 02-03, Resources for the Future, Washington.

Ramsey, Frank (1928)/ "A Mathematical Theory of Saving", *The Economic Journal* vól. 38, núm. 152, 543-559.

Solow, Robert (1974)/ "Intergenerational Equity and Exhaustible Resources", *The Review of Economic Studies* vól. 41, Symposium on the Economics of Exhaustible Resources, 29-45.

Weitzman, Martin (1976)/ "On the Welfare Significance of National Product in a Dynamic Economy", *The Quarterly Journal of Economics* vól. 90, núm. 1, 156-162.

World Commission on Environment and Development (1987)/ *Our Common Future*, Oxford University Press.