CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DOCENCIA ECONÓMICAS, A.C

VOTANDO CONTRA UNO MISMO: UN MODELO DE TEORÍA DE JUEGOS PARA ENTENDER EL POPULISMO

TESINA

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN ECONOMÍA

PRESENTA

ROBERTO MENDOZA HERNÁNDEZ

DIRECTORA DE LA TESINA: DRA. LUCIANA CECILIA MOSCOSO BOEDO

CIUDAD DE MÉXICO JUNIO, 2018

A la memoria de María y Mario,
porque con ellos empezó todo.
A mis padres y mi hermana,
por su apoyo incondicional.
A Georgina.

Agradecimientos

El presente trabajo es el resultado del esfuerzo de un gran número de personas que, por deber, gusto o por error, han aportado a éste y a mi formación dentro de la economía. En particular, me complace expresar mis agradecimientos:

A mi asesora de tesina, Luciana Moscoso, por su apoyo, paciencia y enseñanza en cada una de las distintas etapas de esta tesina; sin sus comentarios y discusiones que en momentos fueron de horas, este trabajo no sería una realidad. A mi lector, Antonio Jiménez, por su minuciosa revisión y dedicados comentarios que no sólo me ayudaron a mejorar esta tesina, sino que también me ahorraron muchas horas de trabajo. A mi profesora de seminario, Eva Arceo, por sus constantes cuestionamientos y observaciones que siempre me mantuvieron enfocado al momento de presentar esta tesina. Me considero afortunado por haber contado con ustedes como los que siguieran mi trabajo tan de cerca.

A mis profesores, por ayudarme a realizar las preguntas correctas acerca de la ciencia económica y enseñarme las herramientas para responderlas. Especialmente a R. Torres, K.Dam, V. Carreón, F. Chávez-Juárez y J. Rosellón.

A mis padres, por siempre creer en mí y por entender todas aquellas salidas y comidas familiares a las que no pude asistir. A Ingrid, por siempre escuchar mis dilemas aunque le pareciesen lo más aburrido del mundo, creo que es una de las ingenieras que más sabe de economía. A Georgina, por ser mi amor, mi mejor amiga y mi principal motivación, aun estando en otro continente.

A mis compañeros, por su apoyo a lo largo de estos dos años. Porque sin importar lo estresante y tenso que podía lucir el camino, todo siempre era más fácil al compartirlo con ustedes. En ellos encontre muy buenos economistas, pero sobre todo excelentes seres humanos.

Agradezco también a CONACYT por la beca que me permitió cursar esta Maestría.

Resumen

En este trabajo se estudia bajo qué condiciones se cae en fallos de agregación de información en un contexto en el cual se toma una decisión colectiva mediante la regla de mayoría simple, existe heterogeneidad en preferencias e ingresos, y hay costos de adquisición de información. Para ello se utiliza un modelo de teoría de juegos con un discreto de agentes y con información pública y privada. Los resultados de estre trabajo muestran que si la información pública cumple con ciertas condiciones, entonces con muy alta probabilidad se implementa una política dañina para la población. Esto responde a dos fenómenos que se presentan en conjunto: una ignorancia racional nacida de los costos de adquisición de información y un efecto de interpretar las noticias buenas de otros como malas para uno.

Palabras clave: teoría de juegos, populismo, toma de decisiones colectivas
Clasificación JEL: D71, D72, D82, P16

Contenido

Lista de figuras

Capítulo 1

Introducción

Para finales del siglo pasado y principios del presente, después de diversos eventos como la publicación del primer *Democracy Index*[1], de la caída del Muro de Berlín en 1989, de la disolución de la URSS[2], y del genocidio bosnio que culminó en la desintegración de Yugoslavia[3]; la conclusión parecía ser clara: la democracia era el mejor sistema político para dirigir una nación, incluso algunos se referían a ésta como la panacea política como menciona Caplan (2011). Sin embargo, antes del fin de la segunda década del siglo XXI se presentaron diversos eventos donde la democracia, la cual se supone había alcanzado un alto grado de madurez, parece no proporcionar la mejor toma de decisiones para la población en general, e.g. la elección de Trump como Presidente de los Estados Unidos de América, el Brexit, el plebiscito sobre los acuerdos de paz de Colombia de 2016, etc. En estos casos mencionados anteriormente se tienen diversos elementos en común que ya han sido identificados como componentes que tuvieron un rol muy importante en el resultado de la elección; estos son contextos de mucha desigualdad de ingreso, problemas de información, y distintos grupos con preferencias políticas muy marcadas. En este

[1] Se refiere al ”Democracy index 2006: a pause in democracy's march” realizada por la Unidad de Inteligencia de *The Economist* (2007) en donde se muestra como para 2006 un 67.1% de los países considerados como territorios independientes pertenecían a algún tipo de democracia.

[2] La disolución de la Unión de Repúblicas Socialistas Soviéticas que tuvo lugar entre 1990 y 1991, Hough (1997).

[3] Limpieza étnica cometida durante 1992 y 1995 en la actual Bosnia y Herzegovina y que conllevó a la detención de Slobodan Milošević por parte del Tribunal Penal Internacional para la ex-Yugoslavia (TPIY) en 2001, Schabas (2006).

trabajo se analiza el caso de aquellas políticas que son elegidas por un amplio voto de la mayoría, aun cuando son dañinas para el agregado de la población, bajo un contexto de agentes con diferencias en ingreso y con adquisición de información costosa.

Para entender la relevancia del estudio del tema de este trabajo un buen punto de partida es recapitular algunos ejemplos recientes de como en elecciones democráticas los votantes pueden elegir políticas o alternativas que terminan perjudicándolos. Un primer ejemplo de ello es el Referéndum sobre la permanencia del Reino Unido en la Unión Europea (UE) de finales de junio de 2016, donde la población votó de manera mayoritaria por salir de la UE, y posteriormente las personas comenzaron a arrepentirse de lo que habían votado (o de no haber votado) tratando de convocar sin éxito a un nuevo referéndum. Un segundo ejemplo, más complicado quizá, son las votaciones presidenciales en E.E.U.U. de principio de noviembre 2016. En este caso, en muchos estados, la mayoría de la población decidió votar por Donald Trump a pesar de que la plataforma política propuesta por el entonces candidato los perjudicara. Como es posible apreciar, estos fallos en la agregación de información[4] están ocurriendo hoy en día y, por lo tanto, puede decirse que el tema del presente trabajo es relevante para explicar fenómenos de la actualidad.

Un segundo punto es que este tipo de comportamientos que observamos en la práctica contradicen conceptos básicos de la teoría microeconómica y la economía política. El hecho de que los votantes terminen eligiendo una alternativa que los perjudica pone en tela de juicio el supuesto de racionalidad de los agentes; un concepto que sostiene mucho de lo que la teoría económica positiva estudia y concluye. Es por ello, que una de las razones por las que merece la pena estudiar el tema del presente trabajo es para identificar esos elementos que están fallando en los modelos clásicos, o analizarlos desde otro enfoque, y así encontrar una nueva teoría que se pueda ajustar de una mejor manera a explicar este tipo de fenómenos.

Finalmente, y muy relacionado con lo anterior, construir un modelo de teoría de juegos que

[4] El concepto fallo de agregación de información hace referencia al fenómeno que se presenta cuando una decisión colectiva bajo información privada es contraria a la que se hubiese tomado bajo un contexto de información pública.

pretenda emular este tipo de situaciones también permite entender mejor los procesos electorales desde la perspectiva de la teoría económica. Así como es posible que un conjunto de modelos básicos y actuales no sean capaces de predecir ciertos comportamientos como los observados en la realidad por un problema en los supuestos, existe al mismo tiempo la posibilidad de que haya elementos que no están siendo considerados en estos modelos. Por lo tanto, la relevancia del tema del presente trabajo también se encuentra relacionada con el hecho de que emplear un nuevo enfoque para modelar este fenómeno podría arrojar un mayor entendimiento de etapas o elementos del proceso de votación que hasta el momento pasaban desapercibidos. Dicho enfoque se basa en un modelo de teoría de juegos con agentes heterogéneos en preferencias e ingresos, e información costosa.

En resumen, las principales razones por las cuales es importante el estudio del tema del presente trabajo son: i) los recientes casos de elección de políticas perjudiciales y que posteriormente se reconocen como tales, ii) las contradicciones que este tipo de fenómenos suponen a la teoría clásica de agentes racionales y elección social, y iii) la importancia de tener un mejor entendimiento del proceso que representan las elecciones desde una perspectiva de toma de decisiones.

El presente trabajo se encuentra relacionado con una amplia literatura, dentro de la cual los principales artículos pueden ser clasificados en tres grandes grupos. El primero de ellos se caracteriza por versar acerca de la agregación de información y nacen al hacer un profundo análisis del Teorema del Jurado de Condorcet. Éste enuncia que "las mayorías tienen mayores posibilidades que cualquier individuo de seleccionar la 'mejor' de dos alternativas cuando existe incertidumbre acerca de cuál de las dos alternativas es de hecho la preferida" (Austen-Smith & Banks, 1996, p. 34).

Austen-Smith y Banks (1996) en su artículo definen tres tipos de comportamiento que los votantes pueden tomar: el *sincero*, en el cual el individuo vota por la alternativa que le da mayor utilidad esperada condicionada a la información que recibe, el *informativo*, en el cual el individuo vota acorde la información que recibe, y el *racional*, en el cual el individuo vota para maximizar su pago esperado condicionado a los comportamientos de los otros votantes. Con ello demostraron que el hecho de que los agentes ignoren las diversas fuentes de información puede impedir el análisis de individuos con comportamiento racional y entonces diseñar políticas e instituciones que generen respuestas por parte de la población contrarias a las pronosticadas. Por su parte, en el presente trabajo de tesina se asumen agentes con un comportamiento de votación *racional* y se introducen agentes con preferencias heterogéneas.

Por su parte, Feddersen y Pesendorfer (1997) permiten un modelo con preferencias heterogéneas para grandes conjuntos de votantes sobre elecciones de dos alternativas y encuentran que el porcentaje de voto informativo en la población, aquél que se basa en su información privada para tomar una decisión, converge a cero conforme el tamaño del electorado tiende al infinito. Sin embargo, a pesar de este resultado, los autores también concluyen que este tipo de elecciones tienden a ser cerradas y que cumplen con la equivalencia de información completa bajo ciertos esquemas de incertidumbre. El presente trabajo analiza también grandes electorados con un comparativo entre información pública y privada en el caso de la existencia de costos de información.

Esto lleva al segundo tipo de literatura, la cual se enfoca en agregación de información con costos de adquisición de información. Las dos referencias principales consultadas para el presente trabajo son Martinelli (2006) y Persico (2004). En el primero, que estudia costos de información endógenos con calidad de información diferenciada, se encuentra que conforme el electorado crece, la cantidad de información adquirida por los votantes tiende a cero, pero que dicho efecto es más lento que la correcta agregación de información causada por la ley de grandes números y por lo tanto darle una perspectiva más optimista a conceptos como el de *ignorancia racional* de Downs (1957) y el de *swing voter's curse* de Feddersen y Pesendorfer (1996), mediante el de el *Milagro de la Agregación* de Converse (1990). Por su parte Persico (2004) identifica las reglas de decisión óptima de jurados cuando existen costos de información con calidad homogénea. El autor concluye que en presencia de estos la agregación de información en el límite es eficiente bajo ciertas condiciones de la estructura de información de los miembros del jurado. Para el presente presente trabajo, la principal contribución será introducir heterogeneidad en el ingreso para un discreto de votantes que influya en la adquisición de información de calidad común. Esto será de gran importancia dado que adquirir la información resulta costoso en el modelo, y de alguna manera recupera un elemento que estuvo presente en los fallos de agregación de información que fueron mencionados anteriormente.

Finalmente, el último grupo de literatura es aquella que analiza específicamente el populismo y las fallas en la agregación de información. En lo que respecta a populismo, el artículo obligado es el de Acemoglu et al. (2013) el cual analiza las razones bajo las cuales los candidatos optan por posturas populistas[5]. Los resultados principales son que este sesgo populista se encuentra relacionado con la posibilidad de ser reelecto, la polarización de las preferencias de la élite y el votante mediano, los costos de soborno y la paciencia de los políticos. Si bien el presente trabajo se enfoca en analizar las condiciones bajo las cuáles los votantes deciden optar por una política que resulta contraria a los intereses de la mayoría, se toman conceptos de lo desarrollado por los autores para generar un modelo de un conjunto discreto de votantes con heterogeneidad de preferencias e ingreso y costos de adquisición de información. En lo que respecta a las fallas en la agregación de información Ali et al. (2018) y Acharya (2016) desarrollan modelos distintos que llegan a conclusiones muy similares. Acharya por su lado emplea un modelo de movilidad social con heterogeneidad en el ingreso y las preferencias; mientras que Ali et al. utilizan un modelo de información privada y heterogeneidad en las preferencias en la que con una probabilidad exógena los votantes reciben información respecto a las políticas. La conclusión para ambos se encuentra relacionada con votantes demasiado optimistas que identifican los pagos positivos para otros como positivos para ellos. El presente trabajo trata de capturar esta última condición de las fallas de agregación de información, más explícitamente desarrollada en el artículo de Ali et al., e incorpora las diferencias en ingreso del modelo de Acharya.

Los resultados de este trabajo de investigación demuestran que bajo un contexto de información privada y costosa, con agentes heterogéneos en preferencias e ingresos; incluso cuando

[5]Acemoglu et al. definen *populismo* como aquella filosofía que apoya los derechos y el poder de la población en su lucha contra una élite privilegiada.

los costos de la adquisición de información privada no son muy altos, si la información pública cumple con ciertas condiciones, entonces con muy alta probabilidad se implementa una política dañina para la población. Esto responde a dos fenómenos, por un lado la existencia de costos de adquisición de información ocasiona que los votantes con menores ingresos caigan en la llamada *ignorancia racional* y encuentren óptimo no comprar información. Por otra parte, el hecho de que estas personas dependan exclusivamente de una información pública que genera un efecto que los hace tomar las noticias positivas para otros como negativas para ellos mismos.

Capítulo 2

Modelo

El presente modelo sigue como base el artículo de Ali et al. (2018) el cual analiza fallos en la agregación de información a causa de una combinación de noticias buenas para unos como malas para otro (correlación negativa) en un contexto con alta probabilidad de no recibir información. En el presente modelo, se reconstruye una condición necesaria y suficiente para provocar fallos de agregación. Esto nos permitirá estudiarla desde una perspectiva más cercana a nuestra definición de populismo. Asimismo, en este modelo se busca trabajar dentro de un marco donde la información es costosa a diferencia de Ali et al. A continuación se presentan los elementos principales del modelo.

2.1 Elementos principales del modelo

1. Los votantes y sus características

Una población finita de votantes $\mathcal{N} = \{1, ..., n\}$, con $n > 2$ e impar, con ingresos[1] $y = \{y_1, ..., y_n\}$, con $y_1 < y_2 < ... < y_n$, elige entre dos políticas vía elección simultánea: Un status quo A (política de Mano Dura) y, una política alternativa B. La política que recibe al menos

[1]En el presente modelo se introducen agentes con ingresos debido a la importancia intuitiva que éste tiene al momento de estudiar el populismo. Dicho resultado ha sido tocado en anteriores artículos, aunque usualmente estos se limitan a distintos grupos de agentes, como lo hace el trabajo de Acharya (2016) que utiliza movilidad social.

$\rho = \frac{n+1}{2}$ votos a favor (mayoría simple) es implementada. El tamaño de la población n y la regla de decisión ρ son conocidas por todos, mientras que y_i sólo es conocida por i. De tal manera que el votante i conoce y_i pero no su posición respecto a los ingresos de los demás jugadores.

2. Los pagos de implementarse las políticas

El pago de cada votante de implementarse A está normalizado a 0. Mientras que los pagos de implementarse B se efectúan de la siguiente manera: bajo está política hay una cantidad de ganadores igual a ρ, que ganan v_w, y una cantidad de perdedores igual a $n - \rho$, que pierden v_l, con $v_w > 0$ y $v_l > 0$. Bajo la política alternativa B la naturaleza elige un estado del mundo[2] de los $\binom{n}{n-\rho}$ estados posibles[3]. Un estado de la naturaleza lo que dice es quiénes son los perdedores y ganadores bajo la política alternativa B. El pago obtenido bajo esta política para el votante i se denota por v_i y el perfil de pagos por v.

3. La etapa de compra de información

En una etapa inicial se anuncia un costo de información c y cada se observa una señal pública x acerca del porcentaje de los otros jugadores que se informarán.[4] Los miembros de la población con un ingreso suficiente $(y_i \geqslant c)$ deben decidir si desean incurrir en la compra de información a cambio de obtener información privada de mejor calidad.[5] Adicionalmente, los votantes que decidieron incurrir en un costo informacional reciben un pago informacional $\frac{y_i}{\hat{y}}c$; el cual intuitivamente puede entenderse como la utilidad que recibe una persona por saber en qué tipo de mundo vive independientemente de si está de acuerdo con ello o no. Esta *recompensa informacional*[6] depende de un parámetro $\hat{y}$ que representa un nivel de ingreso a partir del cual se valora la información de calidad, del ingreso y_i de cada individuo ya que no cada votante valora la

[2]Se entiende como un estado del mundo a un vector de pagos $(v_1, ..., v_n)$ con $v_i \in \{v_w, -v_l\}$ para $i = 1, ..., n$.

[3]Existen $\binom{n}{n-\rho}$ estados del mundo posibles porque hay $n - \rho$ perdedores que deben asignarse dentro de los n votantes.

[4]La señal pública es $x = \theta + \nu$, donde ν sigue una distribución normal con media 0 y varianza κ_ν^2.

[5]Utilizando un marco similar al empleado por Persico en 2004, el costo informacional es exógeno a diferencia de otros modelos en los cuales el costo informacional depende de una variable de elección. Esto captura el hecho de que la calidad de la información se encuentra dada o que las señales que pueden ser adquiridas por los votantes son las mismas y el votante no tiene influencia sobre ninguna de ellas.

[6]Dicho pago informacional es necesario para evitar que el fallo de agregación de información sea resultado únicamente de que la información es costosa (Martinelli, 2006).

información de la misma manera, y de c para demostrar su relación con el costo de la información. Asimismo, este término posee la forma descrita anteriormente porque se desea capturar la intuición de que una persona con un mayor ingreso y_i obtiene una mayor recompensa tras decidir comprar información.

4. La etapa de la votación

Antes de que se lleve a cabo la votación simultánea, cada jugador obtiene información pública e información privada. La información privada de i es una señal privada s_i, la cual es obtenida de $\mathcal{I} \equiv \{s^0, e\}$, donde s^0 es no conocer el estado del mundo y e es saber quiénes son los perdedores bajo la política alternativa B. El perfil de señales s es obtenida de $\mathcal{S} \equiv \mathcal{I}^n$, que representa el espacio de todas las señales posibles de los n votantes. La información pública recibida por cada jugador hace referencia al tipo de información privada que obtuvieron los votantes en un nivel agregado. Esto último será discutido más adelante.

Se denota a P como la función de probabilidad conjunta sobre los posibles perfiles de pagos v y posibles perfiles de señales s.

Para un evento $E = (v, s)$, el cual es una combinación de un perfil de pagos v y un perfil de señales s; $V_i(E) \equiv v_w P(v|E) - v_l P(v|E) = (v_w - v_l)P(v|E)$ es el pago esperado condicional del votante i de que se implemente la política alternativa, B, cuando el votante i conoce el evento E. El término $V_i(s)$ denota el pago esperado condicional si el jugador i supiera que el perfil de señal corresponde a s. Se denota como $V_i(s_i)$ para el pago esperado condicional del jugador i cuando se percata que su señal privada es s_i pero no conoce las señales de los otros votantes.

2.2 Supuestos del modelo

Se imponen tres supuestos al modelo; el primero es que los votantes son simétricos ex ante.

Supuesto 1. *Los votantes son intercambiables ex ante:* $P(v, s) = P(\tilde{v}, \tilde{s})$ *para cualquier permutación* $(\tilde{v}, \tilde{s})$ *de* (v, s).

El segundo supuesto distingue la señal s^0, la cual es la *señal desinformativa*, de la señal e, la cual es descrito como la *señal informativa*:

Supuesto 2. *Hay una señal desinformativa, y una señal informativa que resulta suficiente:*

a. **Señal desinformativa:** *Para un perfil de pagos y señales* (v, s) *con* $s_i = s^0$, $P(s_i) \neq 0$ *y* $P(v, s) = P(s_i)P(v, s_{-i})$.

b. **Suficiencia de la señal informativa:** *Para un perfil de señales* s *con* $s_i = e$ *y* $P(s) \neq 0$, $V_i(s) > 0$ *si y sólo si* $V_i(s_i) > 0$.

El supuesto 2.a asegura que hay una posibilidad estrictamente positiva de que cada votante reciba la señal s^0, y que dicha señal no transmita información acerca de los pagos y de las señales recibidas por otros votantes. Por su parte, el supuesto 2.b habla acerca de lo informativo que es recibir la señal e dado que a partir de ella los votantes conocen el estado actual del mundo y saben si bajo la política B son ganadores o perdedores. Es decir que la señal e es un estadístico suficiente para el perfil de señales entero y con ello pueden determinar su clasificación ordinal entre A y B.

El supuesto final es acerca de los pagos condicionales esperados.

Supuesto 3. *Los pagos condicionales esperados satisfacen no redundancia y no empates:*

a. **No redundancia:** *Existen dos posibles estados del mundo tales que bajo uno de ellos el pago condicional esperado es menor a 0 y bajo el otro es mayor a 0.*

b. **No empates:** *Si* $P(E) > 0$, *entonces* $V_i(E) \neq 0$.

El supuesto 3.a garantiza que la información del votante i puede influenciar su decisión. El supuesto 3.b se mantiene genéricamente y pemite evitar reglas de desempate.

2.3 Caracterización de la información privada y la información pública

A continuación se caracteriza la señal informativa. Dicha señal corresponde al estado actual del mundo y con ello a un vector de ganadores y uno de perdedores. Como ex-ante todos tienen la misma posibilidad de ser ganadores o perdedores entonces existen estados del mundo donde i es ganador y estados del mundo donde i es perdedor. Se dice que cuando un votante recibe $s_i = e$ esta transmite *buenas noticias* acerca de la política alternativa B si $V_i(e) > 0$. Asimismo, se dice que cuando un votante recibe $s_i = e$ esta transmite *malas noticias* acerca de la política alternativa B si $V_i(e) < 0$. Se denota como g el número de votantes que recibieron *buenas noticias*, b el número de votantes que recibieron *malas noticias* y m el número de votantes que conocieron el estado del mundo, el cual es equivalente a la suma de g y b. Tanto m como g y b es información pública.

Es posible representar P como la probabilidad de obtener una señal informativa. Se denota como λ_i la probabilidad de que i obtenga una señal informativa como información privada. Dicha $\lambda_i \in \{\lambda_L, \lambda_H\}$, con $1 > \lambda_H > \lambda_L > 0$ y $\lambda_H + \lambda_L = 1$, depende de si en la etapa previa a la votación i incurrió o no en el costo informacional. Es decir que un votante que incurre en un costo informacional con probabilidad λ_H conoce el estado del mundo, mientras que uno que no incurre en costo lo conoce con probabilidad λ_L. Aquí es importante señalar que cada una de las realizaciones es independiente.

Capítulo 3

Estrategias y equilibrios

El análisis realizado a continuación pertenece a un contexto de *información privada*: es decir que después de decidir individualmente si desea incurrir en un costo informacional y antes de la elección, el votante i observa su señal privada (s_i) y la información pública (m, g, b); y no puede observar la información privada (s_{-i}) de los demás votantes. Como se acostumbra en la literatura, se consideran los equilibrios bayesianos de Nash simétricos y en estrategias puras.

3.1 Existencia de equilibrio

Para caracterizar las estrategias y equilibrios del modelo previamente presentado es importante analizar cada uno de los subjuegos que conforman el juego que enfrenta la población de votantes: i) el subjuego de la elección simultánea entre las políticas A y B, y ii) el subjuego de decidir si incurrir en un costo informacional sujeto a que ya conocen los distintos posibles resultados de la elección simultánea de políticas.

Para la segunda etapa, en un contexto de información privada, una estrategia para el votante i es un mapeo $\sigma_i : \mathcal{I} \to \{A, B\}$, donde $\sigma_i(s_i)$ es la política por la que decide votar i después de la realización de la señal s_i. Sea $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_n) \in \Sigma$ un perfil de estrategias de voto. Sea $Q_\sigma(\rho|m, g)$ la probabilidad de que al menos ρ jugadores voten por la política B cuando siguen el perfil de estrategias σ, cuando hay m votantes que recibieron una señal informativa y cuando hay g votantes que recibieron buenas noticias.

Para el primer paso del juego, el que comprende todo el árbol de decisiones, únicamente lo enfrentan aquellos votantes cuyo ingreso y_i es al menos igual que el costo informacional c anunciado. En este caso, una estrategia pura es un par (τ_i, σ_i). Donde σ_i se define como en la segunda etapa del juego y $\tau_i : \{y_1, ..., y_n\} \rightarrow \{0, C\}$ es un mapeo del ingreso y_i del votante a su decisión de compra de información, donde $C \equiv c - \frac{y_i}{\hat{y}} c$. Sea $\tau = (\tau_1, ..., \tau_n) \in \mathcal{T}$ un perfil de estrategias de decisión de costo informacional. De esta manera, se define a la función de pago condicional esperado como $\pi(\tau(y_i, x, \hat{y}), \sigma(s_i, m, g))$.

Definición 1 (Equilibrio). *Un perfil de estrategias $(\tau, \sigma) \in \mathcal{T} \times \Sigma$ es un equilibrio si la siguientes condiciones se satisfacen para todo $i \in \mathcal{N}$:*

a. $\pi_i(\tau(y_i, x, \hat{y}), \sigma(s_i, m, g)) \geqslant \pi_i(\tau_i'(y_i, x, \hat{y}), \tau_{-i}(y_i, x, \hat{y}), \sigma(s_i, m, g))$ *para toda* $\tau_i' \in \mathcal{T}$*,*

b. $\pi_i(\tau(y_i, x, \hat{y}), \sigma(s_i, m, g)) \geqslant \pi_i(\tau(y_i, x, \hat{y}), \sigma_i'(s_i, m, g), \sigma_{-i}(s_i, m, g))$ *para toda* $\sigma_i' \in \Sigma$*.*

Las condiciones son los requerimientos estándar de un equilibrio bayesiano de Nash: para todos los posibles ingresos y creencias, y para todas las posibles realizaciones de su señal, los votantes juegan una mejor respuesta a las estrategias de los otros votantes.

Teorema 1. *Bajo el contexto de información privada existe un equilibrio bayesiano de Nash simétrico y en estrategias puras.*

3.2 Comportamiento de la información pública

Ahora bien, nos interesa entender bajo qué condiciones, una vez que la existencia del equilibrio bayesiano de Nash simétrico y en estrategias puras fue garantizado, el equilibrio del modelo da como resultado que prevalezca la política A de *Mano Dura*. Bajo el contexto presentado, la política alternativa B es óptima ex ante[1] ya que a nivel individual cuando $P(v_i = v_w)v_w - (1 - P(v_i = v_w))v_l > 0$. Es posible reexpresar esta desigualdad como

[1]Aquí el término *ex ante* hace referencia a antes del suceso de recibir información pública y privada.

$$\frac{P(v_i = v_w)}{1 - P(v_i = v_w)} > \frac{v_l}{v_w} \tag{3.1}$$

Definición 2 (Razón de Diferenciación). *Es la razón que existe entre v_l y v_w, el cual especifica la pérdida sufrida por los perdedores relativa a la ganancia obtenida por los ganadores.*

Dado que el comportamiento más interesante es el de aquellos votantes que reciben $s_i = s^0$, entonces debemos observar cuando la información pública m y g termina actualizando la señal desinformativa en una *mala noticia*.

Un votante i desinformado tomará la información pública como información negativa acerca de la política alternativa B. Esto ocurre cuando el número de buenas noticias no reveladas es menor o igual al número de malas noticias no reveladas, $\rho - g \leqslant n - \rho - (m - g)$. Es posible observar como dicha condición se cumple para toda $n > 2$ e impar si y sólo si $g < \rho$ y $0 < m < n$, es decir cuando se han informado menos de los votantes necesarios para ganar la elección, y estos han obtenido más *buenas noticias* que *malas noticias*. Es posible observar esto de una manera más clara en la figura 3.1.

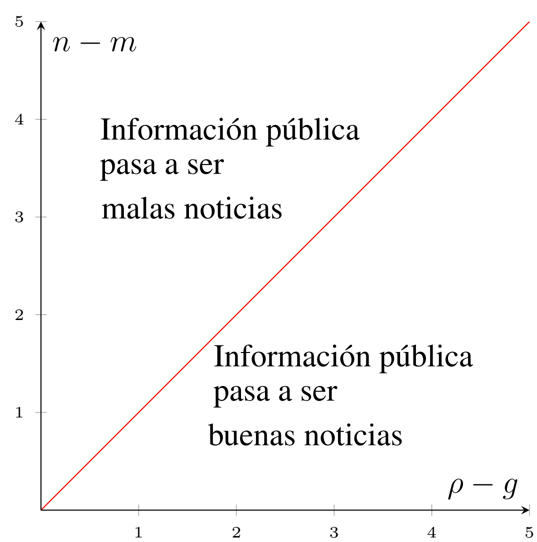

Figura 3.1: Comportamiento de la información pública.

Es por ello que para una m y g que satisfagan lo anterior, los votantes no informados calculan su pago esperado de la política alternativa B, el cual resulta ser $P(v_i = v_w|m, g)v_w - (1 - P(v_i =$

$v_w|m,g))v_l \leqslant 0$. Con lo que se obtiene que

$$\frac{P(v_i = v_w|m,g)}{1 - P(v_i = v_w|m,g)} < \frac{v_l}{v_w} \tag{3.2}$$

Definición 3 (Pagos Negativamente Correlacionados). *Se dice que los pagos están negativamente correlacionados si el pago esperado condicional de la alternativa B es estrictamente negativo para un votante desinformado condicionado a que hay m votantes informados, con $\rho > m > 0$, de los cuáles son considerablemente más los que reciben buenas noticias que malas noticias.*

La anterior definición puede compararse con la definición expuesta en el modelo de Ali et al. (2018) en la cual los autores se enfocan en el caso particular donde los votantes informados sólo han recibido buenas noticias. En el presente trabajo se emplea una situación más general que por supuesto considera esta combinación de votantes informados y buenas noticias transmitidas.

Tras comparar (3.1) y (3.2) es posible encontrar pagos para los que (i) la política alternativa B sea óptima ex ante, y (ii) los pagos estén negativamente correlacionados si y sólo si

$$P(v_i = v_w) > P(v_i = v_w|m,g) \tag{3.3}$$

Es decir que para el votante i quien no recibe información privada, la información pública de que m otros votantes están informados y más votantes recibieron *buenas noticias* que *malas noticias* lo único que hace es disminuir las probabilidades de que el sea un ganador bajo la política B relativo a sus concepciones iniciales.

Es posible realizar clasificaciones de la razón de diferenciación $\frac{v_l}{v_w}$ de la siguiente manera

- $\frac{v_l}{v_w} > \frac{P(v_i=v_w)}{1-P(v_i=v_w)} > \frac{P(v_i=v_w|m,g)}{1-P(v_i=v_w|m,g)}$

En este caso, donde una combinación de pagos v_w y v_l genera una razón de diferenciación que es mayor a la razón de probabilidades de B ex ante, la política A es la preferida de inicio antes de que se realice la información pública y privada.

- $\frac{P(v_i=v_w)}{1-P(v_i=v_w)} > \frac{P(v_i=v_w|m,g)}{1-P(v_i=v_w|m,g)} > \frac{v_l}{v_w}$

En este caso, donde una combinación de pagos v_w y v_l genera una razón de diferenciación que es menor a las razón de probabilidades de B ex ante y esperada condicional a m, y g, la política B es óptima ex ante pero los pagos no están negativamente correlacionados, por lo que la política A nunca será elegida por el votante i desinformado.

- $\frac{P(v_i=v_w)}{1-P(v_i=v_w)} > \frac{v_l}{v_w} > \frac{P(v_i=v_w|m,g)}{1-P(v_i=v_w|m,g)}$

Finalmente, si la combinación de pagos v_w y v_l genera una razón de diferenciación que es menor que la razón de probabilidades de B ex ante, pero mayor que la razón de probabilidades de B esperada condicional y esperada condicional a m, y g, la política B es óptima ex ante y además los pagos están negativamente correlacionados, por lo que la política A sería elegida por el votante i desinformado.

Es posible, observar lo anterior en la Figura 3.2 mostrada a continuación.

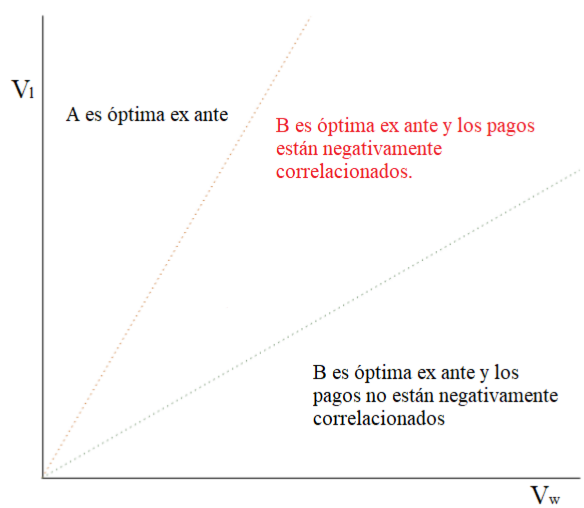

Figura 3.2: Comportamiento causado por la Razón de Diferenciación.

Proposición 1. *La probabilidad para pagos negativamente correlacionados es creciente respecto a la Razón de Diferenciación: si v_w y v_l generan pagos negativamente correlacionados, entonces para cualesquiera v'_w y v'_l tales que $\frac{v'_l}{v_w} > \frac{v_l}{v_w}$ y $\frac{P(v_i=v_w)}{1-P(v_i=v_w)} > \frac{v_l}{v_w}$, v'_w y v'_l también generan pagos negativamente correlacionados.*

Asimismo, es importante observar como un votante i desinformado interpreta cada una de las *buenas noticias* de los otros votantes informados como una parte de lo que termina siendo una *mala noticia* y con ello votan por la política de *Mano Dura* A.

Definición 4 (Efecto Desplazamiento). *Es el efecto que sufre el votante i desinformado al momento de que actualiza su información y que ocasiona que su pago esperado condicional disminuya, llegando a ocasionar incluso que vote por A aún cuando sabe que hay más ganadores que perdedores.*

Proposición 2. *Para cada combinación posible de m y g que cumpla $n-1 \geqslant m \geqslant 0$ y $\rho > g \geqslant 0$ y donde los pagos estén negativamente correlacionados, entonces el Efecto Desplazamiento es estrictamente creciente en g.*

3.3 El impacto de la información en la toma de decisiones

Por otro lado, aún falta analizar cuántos de los jugadores decidirán incurrir en el costo informacional que les permitirá incrementar su probabilidad de obtener una señal de informativa, al pasar su λ_i de λ_L a λ_H. Para ello, cada judador i utiliza la señal pública x para determinar sus posibles pagos ante la decisión de comprar información y determinar sus creencias.

Teorema 2. *Dado un c estrictamente positivo pero suficientemente bajo, y unas probabilidades λ_L y λ_H, existen un intervalo de señales públicas $[\underline{x}, \bar{x})$ y un intervalo de ingresos $(\hat{y}_{min}, \hat{y}_{max})$ tales que si $x^* \in [\underline{x}, \bar{x})$ y $\hat{y}^* \in (\hat{y}_{min}, \hat{y}_{max})$ entonces se conduce a un equilibrio bayesiano en el cual la cantidad de jugadores que incurren en la compra de información es igual a $floor(x^*)+1$, donde $floor(.) : x \rightarrow \{0, ..., n-1\}$ es la función piso, y que es consistente con la actualización Bayesiana de las creencias.*

Este resultado puede entenderse como el hecho de que, dado un costo de la información y unas probabilidades de informarse, siempre es posible encontrar una señal pública del porcentaje de otros jugadores informados y al menos una recompensa informacional que garanticen que cualquier número de jugadores decidan comprar información.

Finalmente, una vez que se ha garantizado que el modelo previamente presentado tiene un equilibrio bayesiano de Nash simétrico y en estrategias puras, que se han definido ciertos conceptos y se han presentado ciertos resultados también relacionados con el juego en dos etapas; es momento de resolver la principal pregunta de este trabajo de investigación. ¿Bajo qué condiciones en un juego con las características planteadas en el cápitulo anterior, los votantes terminan eligiendo aquella política que es dañina para la población en su agregado? El siguiente teorema, el resultado principal del presente trabajo de investigación responde este cuestionamiento.

Teorema 3. *Suponga que que c es estrictamente positiva pero suficientemente bajo y que los pagos están negativamente correlacionados. Entonces, para cualquier $\epsilon > 0$, existen $[\underline{x}, \bar{x})$, $(\hat{y}_{min}, \hat{y}_{max})$, y $\Lambda = \{\tilde{\lambda}_H, \tilde{\lambda}_L\}$ tales que si $x^* \in [\underline{x}, \bar{x})$, $\hat{y}^* \in (\hat{y}_{min}, \hat{y}_{max})$, $\lambda_H > \tilde{\lambda}_H$ y $\lambda_L < \tilde{\lambda}_L$; entonces A es implementada con una probabilidad igual a $1 - \epsilon$ en un equilibrio bayesiano de Nash en estrategias simétricas y puras bajo el contexto de información privada.*

Este último teorema, y resultado principal del presente trabajo puede entenderse de la siguiente manera: si el costo de la información es lo suficientemente bajo para que todos los jugadores puedan decidir si compran o no información, entonces es posible construir un grupo de señales públicas que le indican a los jugadores que existe cierta cantidad de personas informadas en particular; la cual en conjunto con una recompensa informacional relativamente baja, ocasiona que únicamente los individuos más ricos compren información.

Adicionalmente, si la diferencia entre la calidad de la información privada de las personas que compran información y quienes no lo hacen es bastante grande; entonces los más ricos son aquellos que terminan informándose acerca de las políticas candidatas.

Y finalmente, si la información pública posee una estructura con cual las buenas noticias de otras personas se interpretan como malas noticias para uno; aunque se sabe de inicio que la política alternativa es mejor al tener un mayor número de ganadores que de perdedores, la mayoría no informada se asume perdedora y termina votando por aquella política dañina para el agregado de la población, creando así una política perjudicial que gana con el voto popular, una política populista.

Capítulo 4

Conclusiones

En el presente trabajo se analizó los efectos de heterogeneidad en ingresos y preferencias, y la información costosa en la toma de decisiones colectivas de manera democrática en un modelo de teoría de juegos bajo un contexto de información privada. En contraste con el con el trabajo de Acharya (2016), se añade información y costos de adquisición de información.

La existencia de heterogeneidad en ingresos y costos de adquisición de información induce a que los agentes deban decidir si desean comprar o no información de mejor calidad para incrementar su probabilidad de conocer las políticas candidatas y, posteriormente, seleccionen mediante una votación simultánea la política a implementar. Se encuentra que en equilibrio existe una señal pública acerca de las decisiones de compras informacionales de la población, un intervalo para el pago informacional, y unas cotas inferiores y superiores respecto a las probabilidades de informarse que ocasionan que por elección simultánea se implemente, casi con seguridad, la política dañina para el agregado poblacional.

Esto puede interpretarse como la fuerza que tiene la información gratuita, que es capturada en la señal pública que debe pertenecer a cierto intervalo, sobre aquella que resulta costosa, capturada en la decisión de los agentes de incrementar su probabilidad de obtener una señal privada informativa, de una manera distinta para los distintos miembros de la población. Este último punto se encuentra capturado en el intervalo de recompensas informacionales.

El modelo de este trabajo permite también contrastar el caso discutido por Ali et al. (2018) donde ya se trabaja con un modelo que contempla la adquisición de información como el causante de fallas en la agregación de información.

En presencia de heterogeneidad en ingresos y costos de adquisición de información, los efectos de la adquisición de información sobre el resultado de la implementación de políticas dañinas se vuelven endógenos al ser explicados por las diferencias en los ingresos de los votantes. Siendo esto último algo claramente observado en la realidad. En particular, el fallo en la agregación de información puede ser explicado por el dos elementos: (i) la heterogeneidad en ingresos, y (ii) las características de la información pública.

El hecho de que los agentes tengan distintos ingresos implica que es muy probable que la utilidad que los votantes reciben al comprar información puede no superar los costos para la mayoría de estos, lo que los hace caer en la conocida *ignorancia racional*. Por su parte, la información pública hace que los individuos generen un efecto dentro de la población que los hace creer que es muy poco probable que se beneficien de políticas que son apoyadas por un número considerable.

Comparando el presente trabajo con el de Ali et al. (2017), se encuentra que implementar la política dañina mediante una elección democrática es más probable y realista en presencia de heterogeneidad en ingresos y costos de adquisición de información debido a que coloca en manos de los votantes parte de la decisión de informarse. No considerar los costos o la heterogeneidad supondría que, además de perder realismo, los parámetros esenciales del modelo deberían estar más acotados, puesto que las estrategias de equilibrio eliminan parte de la falta de información que ocasiona el fallo en la agregación de información.

El presente trabajo se enfocó en como la heterogeneidad de ingresos tiene un efecto causal en los fallos en la agregación de información en presencia de costos de adquisición de información. Puede resultar de interés para investigación futura analizar una de las siguientes líneas: i) heterogeneidad en los conjuntos de información; por ejemplo, qué ocurre cuando las señales que recibe una persona dependen de su ingreso, ii) diseño óptimo de la información pública; por ejemplo, analizar cuál debería ser la información pública que debe ser proporcionada para evitar que en presencia de las condiciones del presente modelo se ocasione un fallo en agregación de información, y iii) adquisición de información privada de manera dinámica; por ejemplo, estudiar las implicaciones de incorporar en el modelo una segunda oportunidad de adquirir información privada posterior a la revelación de la información pública.

Apéndice A

Demostraciones

A.1 Demostración al Teorema 1

Primero se analizarán a los votantes que reciben una señal informativa. Se define el perfil de estrategias simétricas σ para ellos como

$$\sigma_i(s_i) = \begin{cases} B & \text{si } s_i = e \wedge V_i(e) > 0 \\ A & \text{si } s_i = e \wedge V_i(e) \leqslant 0 \end{cases}$$

para toda $i \in \mathcal{N}$ tal que $s_i = e$. Primero se mostrará que votar B si se reciben buenas noticias o votar A si se reciben malas noticias es una mejor respuesta. Por el supuesto 2.b, para los votantes informados $\pi_i(\tau(y_i, x, \hat{y}), \sigma(s_i, m, g)) \geqslant 0$ si y sólo si $\pi_i(\tau(y_i, x, \hat{y})\sigma(s_i) \geqslant 0$. Por lo tanto es posible decir que la única información que impacta la estrategia del votante i informado es su información privada s_i.

Recordando la manera en la que se definieron las buenas y malas noticias; se tiene lo siguiente. Suponga que el votante i es pivotal,[1] entonces si vota por A (B) es implementada. Asimismo, suponga que el votante recibió buenas noticias, es decir que su pago al votar B

[1]El evento de que i sea pivotal se define de la siguiente manera: sea $\tilde{\sigma}_{-i}(s_{-i}) \in \{A, B\}^{n-1}$ una realización de $\sigma_{-i}(s_{-i})$, y sea $C_B(\tilde{\sigma}_{-i}(s_{-i}))$ el número de jugadores, distintos a i, quienes votan por la política alternativa B en $\tilde{\sigma}_{-i}(s_{-i})$. Entonces, el evento pivotal es cuando el número de jugadores distintos a i que votaron por B es de $\rho - 1$, i.e. $\{C_B(\tilde{\sigma}_{-i}(s_{-i})) = \rho - 1\}$.

es

$$\pi_i(\tau(y_i, x, \hat{y}), B(e)) = v_w > 0$$

si decide votar A entonces su pago es

$$\pi_i(\tau(y_i, x, \hat{y}), A(e)) = 0$$

lo que muestra que en este caso votar B es preferido. Ahora suponga que el votante i no es pivotal, entonces se tiene que

$$\pi_i(\tau(y_i, x, \hat{y}), B(e)) = \pi_i(\tau(y_i, x, \hat{y}), A(e))$$

Dado que votar B es una estrategia débilmente dominante, el votante i no tiene incentivos a desviarse de ella. Un análisis similar puede ser realizado cuando el votante i recibe malas noticias. Es claro entonces, que un votante informado i siempre juega su mejor respuesta en el subjuego de la elección simultánea.

Ahora, consideremos al votante i si $s_i = s^0$. Dado que i no recibió información privada al obtener la señal desinformativa, debe de emplear la información pública para actualizar su información y de esta manera tomar su decisión. Es decir que para el votante no informado i se define la función de pago

$$\Pi_i(s^0, m, g) = [v_w P(v_w|m, g) - v_l P(v_l|m, g)]P(g|m)P(m)P(pivotal|m, g)$$

Aquí se utiliza el evento pivotal para denotar aquella situación donde la decisión de i decide la votación simultáea. Es importante observar como la probalilidad de ser pivotal, $P(pivotal|m, g)$, para cualquier i no informado sigue la función mostrada a continuación.

$$P(pivotal|m,g) = \begin{cases} \binom{n-m-1}{\rho-1-g}\left(\frac{\rho}{n}\right)^{\rho-1-g}\left(\frac{n-\rho}{n}\right)^{n-m-(\rho-g)} & \text{si } m-(n-\rho) \leqslant g \leqslant \rho-1 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Aquí es posible observar cómo a través de la información pública el votante i puede establecer su probabilidad de ser pivotal considerando que ex ante la probilidad de los demás i de votar por la política alternativa B es igual a $\frac{\rho}{n}$.

Ahora, si dicho pago $\Pi_i(s^0, m, g)$ es mayor a 0, en cuyo caso la actualización de información del votante i desinformado acaba teniendo *buenas noticias* y entonces decide votar por B. O si es menor o igual a cero, con lo que i interpreta la información pública como *malas noticias* y entonces decide votar por A. Con ello, se observa como para la etapa correspondiente a la elección simultánea de políticas, tanto los votantes informados como los no informados siempre juegan sus mejores respuestas, con lo que siempre se tiene un equilibrio simétrico de Nash en estrategias puras.

A continuación se demostrará que el juego que contiene también la etapa inicial donde el jugador i debe decidir si compra o no información tiene un equilibrio bayesiano de Nash simétrico y en estrategias puras.

Se supone que todos los n jugadores comparten una creencia a priori uniforme imprecisa sobre la proporción $\theta \in [0,1]$ de los otros $n-1$ jugadores que se informan y que después se observa una señal pública

$$x = \theta + \nu$$

donde $\nu \sim N(0, \kappa_\nu^2)$. Entonces $E(\theta|x) = x$ por la actualización Bayesiana de sus creencias. Con esta información, los votantes consideran que la proporción de los otros jugadores que se informan es $x = \frac{m}{n}$, con lo que pueden determinar el número de jugadores mediante la función piso $floor(x) \equiv floor(m(x))$, donde $m(x) = nx$.

Cada jugador enfrenta k posibles juegos, con $k = 0, ..., n-1$, donde cada uno de ellos representa el numero de jugadores informados además de él. Así en el juego k, en caso de decidir comprar información, el jugador i tiene un pago esperado condicional de

$$\lambda_H[(\frac{\rho}{n})v_w-(\frac{n-\rho}{n})v_l]\prod_{j\in I}\lambda_j\prod_{j\in D}(1-\lambda_j)+(1-\lambda_H)\sum_{g=0}^{m}\Pi_i(s^0,m=k,g)\prod_{j\in I}\lambda_j\prod_{j\in D}(1-\lambda_j)-C$$

donde el conjunto I contiene a todos los individuos con $s_i = e$ y el conjunto D contiene a todos los individuos con $s_i = s^0$. El jugador i sabe que la cantidad de individuos que contiene el conjunto I es igual a k y que la cantidad de individuos en D es igual a $n-1-k$, pero desconoce las identidades de dichos individuos.

Por su parte, en caso de que el jugador i decida no comprar información su pago esperado condicional es de

$$\lambda_L[(\frac{\rho}{n})v_w-(\frac{n-\rho}{n})v_l]\prod_{j\in I}\lambda_j\prod_{j\in D}(1-\lambda_j)+(1-\lambda_L)\sum_{g=0}^{m}\Pi_i(s^0,m=k,g)\prod_{j\in I}\lambda_j\prod_{j\in D}(1-\lambda_j)$$

Es importante observar como estos pagos esperados condicionales difieren en dos elementos: i) la probabilidad con la que conocen el estado del mundo e, en el primero la probabilidad es λ_H y en el segundo es λ_L, y ii) el costo neto de su decisión de compra de información, en el primero $C \equiv c - \frac{y_i}{\hat{y}}c$ y 0 en el segundo.

Es por ello que la decisión en cada juego k depende de las variables exógenas λ_H, λ_L, c, y_i, y de la variable endógena $\hat{y}$. Y que el equilibrio bayesiano depende de las creencias previamente descritas, las cuales en el equilibrio siguen la Regla de Bayes.■

A.2 Demostración de la Proposición 2

Sean m y g tales que $n-1 \geqslant m \geqslant 0$ y $\rho > g \geqslant 0$ se satisfacen, y v_w y v_l tales que los pagos estén negativamente correlacionados. El hecho de que pago de i desinformado $\Pi_i(s^0, m, g)$ sea menor o igual a 0 depende únicamente de que la probabilidad de ser perdedor sea mayor o igual a la probabilidad de ser ganador.

La probabilidad de ser perdedor puede ser expresada como

$$\frac{n-\rho-m+g}{n}$$

y para una $\kappa > 0$ que sea consistente con n, m y ρ se tiene que la probabilidad de cuando κ nuevas *buenas noticias* son descubiertas por i desinformado como

$$\frac{n-\rho-m+g+\kappa}{n}$$

Para que se muestre como el *Efecto Desplazamiento* es estrictamente creciente en g debe de cumplirse que

$$\frac{n-\rho-m+g+\kappa}{n} > \frac{n-\rho-m+g}{n} \implies \kappa > 0$$

lo cual se cumple por la manera en la que fue definida κ. ■

A.3 Demostración al Teorema 2

Sea un $c > 0$ y lo suficientemente pequeño para que todo $i \in \mathcal{N}$ pueda decidir si desea comprar o no información, y sean λ_L y λ_H las probabilidades en caso de no comprar y comprar información respectivamente.

Todos los jugadores observan una señal pública x que siguiendo la actualización de Bayes, se convierte en su creencia posterior de la proporción de otros $n-1$ jugadores que se informan. Asimismo, calculan con la función piso $floor(x)$ definida anteriormente el juego k que enfrentan.

Sea un $k \in \mathcal{K}$, donde $\mathcal{K}$ es el conjunto de los diversos juegos en los cuales pueden encontrarse los jugadores de manera inicial, y dadas las características de las creencias mencionadas previamente; para la función $floor(x) = k$, entonces se tiene que $m(x) \in [k, k+1)$. Es decir que definiendo $\underline{x} \equiv \frac{k}{n}$ y $\bar{x} \equiv \frac{k+1}{n}$, hay un intervalo $[\underline{x}, \bar{x})$ para el cual si se obtiene una señal pública x dentro de este, los jugadores actualizaran sus creencias de acuerdo a la regla de Bayes y se situarán en el juego k.

Ahora bien, un jugador i al momento de decidir si desea comprar o no información, para cualquier juego k al que pueda estarse enfrentando, tiene que comparar su pago

$$\lambda_H[(\frac{\rho}{n})v_w-(\frac{n-\rho}{n})v_l]\prod_{j\in I}\lambda_j\prod_{j\in D}(1-\lambda_j)+(1-\lambda_H)\sum_{g=0}^{m}\Pi_i(s^0, m=k, g)\prod_{j\in I}\lambda_j\prod_{j\in D}(1-\lambda_j)-C$$

si la compra; con su pago

$$\lambda_L[(\frac{\rho}{n})v_w-(\frac{n-\rho}{n})v_l]\prod_{j\in I}\lambda_j\prod_{j\in D}(1-\lambda_j)+(1-\lambda_L)\sum_{g=0}^{m}\Pi_i(s^0, m=k, g)\prod_{j\in I}\lambda_j\prod_{j\in D}(1-\lambda_j)$$

si decide no comprarla.

Recordando que $C \equiv c - \frac{y_i}{\hat{y}}c$ y que λ_H, λ_L, c y y_i son variables exógenas, entonces la decisión de comprar o no información depende del valor que tome la variable endógena $\hat{y}$.

Supongamos que los jugadores observan la señal pública $x^* \in [\frac{l}{n}, \frac{l+1}{n})$. Con ello, debido a que la función $floor(x^*) = l$ los jugadores se asumen en el juego $k = l$. Definiendo

$$\mathcal{V}_i^H \equiv \lambda_H[(\frac{\rho}{n})v_w-(\frac{n-\rho}{n})v_l]\prod_{j\in I}\lambda_j\prod_{j\in D}(1-\lambda_j)+(1-\lambda_H)\sum_{g=0}^{m}\Pi_i(s^0, m=l, g)\prod_{j\in I}\lambda_j\prod_{j\in D}(1-\lambda_j)$$

y

$$\mathcal{V}_i^L \equiv \lambda_L[(\frac{\rho}{n})v_w-(\frac{n-\rho}{n})v_l]\prod_{j\in I}\lambda_j\prod_{j\in D}(1-\lambda_j)+(1-\lambda_L)\sum_{g=0}^{m}\Pi_i(s^0, m=k, g)\prod_{j\in I}\lambda_j\prod_{j\in D}(1-\lambda_j)$$

Lo que implica que para que el jugador i compre información debe cumplirse que

$$\mathcal{V}_i^H - C > \mathcal{V}_i^L \iff V_i^H - \mathcal{V}_i^L > c(1 - \frac{y_i}{\hat{y}})$$

Ahora bien, dado que los pagos de los jugadores no dependen de su ingreso, y por el supuesto 1 del modelo es posible representar la ecuación anterior como

$$V^H - \mathcal{V}^L > c(1 - \frac{y_i}{\hat{y}}) \iff \frac{y_i c}{c - \mathcal{V}^H + \mathcal{V}^L} > \hat{y}$$

Debido a que los ingresos se encuentran ordenados de menor a mayor ($y_1 < ... < y_n$), para que los jugadores $n, n-1, ..., i$ decidan comprar información debe cumplirse que $\hat{y} \in (\frac{y_{i-1}c}{c-\mathcal{V}^H+\mathcal{V}^L}, \frac{y_i c}{c-\mathcal{V}^H+\mathcal{V}^L})$.

Entonces, si la señal pública observada al inicio de la etapa de compra de información es $x^* \in [\frac{l}{n}, \frac{l+1}{n})$ y la variable relacionada con el pago informacional es $\hat{y}^* \in (\frac{y_l c}{c-\mathcal{V}^H+\mathcal{V}^L}, \frac{y_{l+1}c}{c-\mathcal{V}^H+\mathcal{V}^L})$; el número de jugadores que compran información es igual a $l+1$. ■

A.4 Demostración al Teorema 3

Sea un $c > 0$ y lo suficientemente pequeño para que todo $i \in \mathcal{N}$ pueda decidir si desea comprar o no información, y sean $m = m^*$, $g = g^*$, v_w y v_l tales que los pagos estén negativamente correlacionados. Primero se demostrará que existen los intervalos $[\underline{x}, \bar{x})$ y $(\hat{y}_{min}, \hat{y}_{min})$ tales que si $x^* \in [\underline{x}, \bar{x})$ y $\hat{y}^* \in (\hat{y}_{min}, \hat{y}_{min})$, entonces $m = m^*$.

Esta primera parte del resultado puede obtenerse fácilmente cómo un caso particular del Teorema 2 donde $l = m^* - 1$. Con ello, es posible definir $\underline{x} \equiv \frac{m^*-1}{n}$ y $\bar{x} \equiv \frac{m^*}{n}$ para el intervalo del que se deben obtener la señal pública. Asimismo, es posible definir $\hat{y}_{min} \equiv \frac{y_{m^*-1}c}{c-\mathcal{V}^H+\mathcal{V}^L}$ y $\hat{y}_{max} \equiv \frac{y_{m^*}c}{c-\mathcal{V}^H+\mathcal{V}^L}$ para el intervalo de donde se obtiene la variable relacionado con la recompensa informacional.

Esto conlleva a que los m^* jugadores con mayores ingresos compren información. Además, es posible ver como existe una probabilidad $\tilde{\lambda}_{H,1}$ y una probabilidad $\tilde{\lambda}_{L,1}$ tales que para todo $\lambda_H > \tilde{\lambda}_{H,1}$ y $\lambda_L < \tilde{\lambda}_{L,1}$ todos los m^* jugadores que incurren en un costo informacional conocen el estado del mundo.

Ahora, dado que $\rho > g = g^* > 0$ y $n > m = m^* > 0$ se tiene que el votante i desinformado tiene una probabilidad estrictamente positiva de ser pivotal. Por lo tanto basta con analizar que el pago del votante i desinformado es estrictamente negativo al implementarse la política B. Para que vote por A, el pago de i debe ser

$$\Pi_i(s^0, m^*, g^*) = P(m^*)P(g^*|m^*)P(pivotal|m^*, g^*)V(m^*, g^*) < 0$$

la cual es equivalente a

$$\lambda_H^{m^*}(1-\lambda_L)^{n-1-m^*}P(g^*|m^*)P(pivotal|m^*, g^*)V(m^*, g^*) < 0$$

Como λ_H, $(1-\lambda_L)$, $P(pivotal|m^*, g^*)$ y $P(g^*|m^*)$ son probabilidades, entonces el signo del pago depende exclusivamente de $V(m^*, g^*)$. Dado que basta con que este último término sea negativo, es posible realizar la siguiente descomposición

$$v_w P(v_i = v_w|m^*, g^*) - v_l P(v_i = v_l|m^*, g^*) < 0$$

la cual puede reexpresarse como

$$\frac{v_l}{v_w} > \frac{P(v_i = v_w|m^*, g^*)}{P(v_i = v_l|m^*, g^*)}$$

lo cual se cumple debido a que se tienen m^*, g^*, v_w y v_l tales que los pagos están negativamente correlacionados.

Finalmente, como el pago de i no depende de λ_H y λ_L, entonces este es continuo en $1 > \lambda_H > \lambda_L > 0$ y, converge a 0 mientras λ_L converge a 1 y diverge de 0 mientras λ_H converge a 1. Como resultado, existe $(\tilde{\lambda}_{H,2}, \tilde{\lambda}_{L,2})$ tales que para toda $\lambda_H > \tilde{\lambda}_{H,2}$ y $\lambda_L < \tilde{\lambda}_{L,2}$ la política A de *Mano Dura* es electa con una probabilidad mayor a $1-\epsilon$ para un ϵ pequeño y mayor a 0.

La prueba está completa definiendo $\tilde{\lambda}_H \equiv max\{\tilde{\lambda}_{H,1}, \tilde{\lambda}_{H,2}\}$ y $\tilde{\lambda}_L \equiv min\{\tilde{\lambda}_{L,1}, \tilde{\lambda}_{L,2}\}$.

Además es posible observar que, tal y como se mostró en el Teorema 2, las creencias de los votantes cumplen la Regla de Bayes.■

Referencias

Acemoglu, D., Egorov, G., y Sonin, K. (2013). "A political theory of populism." *The Quarterly Journal of Economics*, *128*(2), 771-805.

Acharya, A. (2016). "Information aggregation failure in a model of social mobility." *Games and Economic Behavior*, *100*, 257-272.

Ali, S. N., Mihm, M., y Siga, L. (2018). *Adverse selection in distributive politics* (Tech. Rep.). Mimeo.

Austen-Smith, D., y Banks, J. (1996). "Information aggregation, rationality, and the condorcet jury theorem." *American political science review*, *90*(1), 34-45.

Caplan, B. (2011). *The myth of the rational voter: Why democracies choose bad policies*. Princeton University Press.

Converse, P. (1990). "Popular representation and the distribution of information." In J. Ferejohn y J. Kuklinski (Eds.), *Information and democratic processes* (p. 369-388). University of Illinois Press.

Downs, A. (1957). "An economic theory of political action in a democracy." *Journal of political economy*, *65*(2), 135-150.

Engel, J. A. (2009). *The fall of the berlin wall: The revolutionary legacy of 1989*. Oxford University Press.

Feddersen, T., y Pesendorfer, W. (1997). "Voting behavior and information aggregation in elections with private information." *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1029–1058.

Feddersen, T. J., y Pesendorfer, W. (1996). “The swing voter’s curse.” *The American economic review*, 408–424.

Fukuyama, F. (2011). *The origins of political order: From prehuman times to the french revolution*. Farrar, Straus and Giroux.

Hough, J. F. (1997). *Democratization and revolution in the ussr, 1985-91*. Brookings Institution Press.

Kekic, L. (2007). “The economist intelligence unit’s index of democracy.” *The Economist*, *21*, 1–11.

Martinelli, C. (2006). “Would rational voters acquire costly information?” *Journal of Economic Theory*, *129*(1), 225–251.

Persico, N. (2004). “Committee design with endogenous information.” *The Review of Economic Studies*, *71*(1), 165–191.

Schabas, W. A. (2006). *The un international criminal tribunals: the former yugoslavia, rwanda and sierra leone*. Cambridge University Press.