CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DOCENCIA ECONÓMICAS, A.C.

PRUEBA DE HIPÓTESIS DE RELEVANCIA Y VALIDEZ DE UN INSTRUMENTO BAJO ENDOGENEIDAD

TESINA

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN ECONOMÍA

PRESENTA

YUNIOR JESÚS SÁNCHEZ CUEVAS

DIRECTOR DE LA TESINA: DR. DANIEL VENTOSA SANTAULÀRIA

CIUDAD DE MÉXICO JUNIO, 2018

Dedicado a mi familia
Maximina y Agustín, mis padres y
Aida, Faviola, Edgar y Tania, mis hermanos
quienes siempre me han apoyado incondicionalmente y han creído en mí.

Agradecimientos

Quiero agradecer a todos por hacer esto posible, ¡muchas gracias por todo!

Resumen

En este trabajo se estudia la distribución asintótica y en muestras finitas que sigue la medida de bondad de ajuste R^2 en el método de variables instrumentales bajos las siguientes condiciones: (i) sin problema de endogeneidad y con instrumentos válidos y relevantes; (ii) con problema de endogeneidad y con instrumentos válidos y relevantes; (iii) con problema de endogeneidad y con instrumentos no válidos pero sí relevantes; (iv) con problema de endogeneidad y con instrumentos válidos pero no relevantes; (v) con problema de endogeneidad y con instrumentos no válidos y no relevantes. El objetivo es determinar si la R^2 puede ser empleada como estadístico de prueba para identificar problemas de validez y/o relevancia. Los resultados obtenidos a partir de la teoría asintótica y las simulaciones permiten discriminar instrumentos relevantes de los no relevantes, sin embargo, no se puede distinguir entre instrumentos válidos y no válidos.

Palabras clave:
Variables Instrumentales, Bondad de ajuste, Prueba de endogeneidad.

Índice general

Índice de figuras

Índice de cuadros

Introducción

La R^2 es una medida de bondad de ajuste que ha sido utilizada en los modelos de regresión lineal, sin embargo, cuando se trata del método de variables instrumentales, esta medida de bondad de ajuste del modelo calculada como $R^2 = 1 - SCR/SCT$ es una medida sesgada debido a que no penaliza la endogeneidad de las variables explicativas. Es por ello que en el caso de variables instrumentales es conveniente utilizar la $G\bar{R}^2$. Esta medida es utilizada como una medida de selección entre modelos estimados por variables instrumentales, sin embargo, qué sucede si los instrumentos no cumplen la relevancia y/o la validez. Existen pruebas para determinar cuándo los instrumentos son no relevantes y algunas técnicas para comprobar la validez de los mismos. En el presente trabajo se tratará de diferenciar entre modelos a través de la distribución de la R^2 y rechazar si es posible cuando el instrumento utilizado en el método de variables instrumentales no cumple con las condiciones de validez y/o relevancia.

Capítulo 1

Revisión de literatura

El método de variables instrumentales surge como respuesta a modelos económicos en los cuales se tiene una relación exacta entre la variable explicada y la variable explicativa, con la única diferencia que la variable explicativa tiene un término aleatorio. La idea de utilizar instrumentos y hacer una estimación por Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO) en dos etapas para este tipo de modelos fue propuesta por Reiers∅l (1945). Posteriormente, Sargan (1958) plantea una generalización de este método, la idea es que pueden existir más de una variable explicativa en los modelos y dentro de este conjunto de variables explicativas una o más variables puede presentar problemas de endogeneidad, es decir que el término de error del modelo esté correlacionado con la variable explicativa, este hecho, hace que estimar el modelo por el método de MCO simple conduzca a sesgos en los estimadores de interés.

La R^2 es un estadístico que se utiliza en econometría como una medida de ajuste entre el modelo y los datos de los que se disponen. Cuando las variables no tienen problemas de endogeneidad la R^2 es una muy buena medida para la selección entre modelos. El criterio de decisión es que a mayor R^2 el modelo se ajusta mejor a los datos y por tanto la inferencia tendrá una mejor aproximación que un modelo con una menor R^2. Sin embargo, cuando existen problemas de endogeneidad ya sea en una o más variables explicativas del modelo, el criterio de la mayor R^2 no ayuda a la selección de modelos ya que como se muestra en Murray (2006b) y Greene (2003), cuando existen problemas de endogeneidad, los estimadores generados a partir del método de MCO están sesgados, una solución a este problema de sesgo es estimarlos mediante el método de variables instrumentales, en los que es necesario instrumentar las variables con problemas de endogeneidad, *i.e.*, estimar las variables con problemas de endogeneidad con otras variables explicativas llamadas instrumentos por medio del método de MCO y posteriormente estimar el modelo original con las variables con problemas de endogeneidad estimadas.

Una vez estimado el modelo por medio de variables instrumentales, la R^2 de este modelo no tiene el mismo poder informativo que la R^2 de un modelo estimado por MCO en los que no existen problemas de endogeneidad, por lo tanto la R^2 de modelos de variables instrumentales no se utiliza como un criterio para la selección entre modelos. Por esta razón, Pesaran y Smith (1994) plantean que un criterio para la selección entre modelos estimados por el método de variables instrumentales es una R^2 ajustada generalizada (GR^2).

La R^2 ajustada ($\bar{R}^2$) fue introducida por Theil (1961), esta medida ajusta la R^2 por el tamaño de muestra y por el número de variables explicativas. De hecho "se puede mostrar que la $\bar{R}^2$ o más propiamente (1-$\bar{R}^2$) es igual al ratio de s^2 -la varianza- de y "[1](Theil, 1961, p. 212), los argumentos de Theil para usar la $\bar{R}^2$ como criterio de selección de modelos no incluyeron a los modelos estimados por el método de variables instrumentales.

Pesaran y Smith (1994) argumentan que tanto la R^2 como la $\bar{R}^2$ son medidas inapropiadas para la selección de modelos estimados por variables instrumentales, es decir, que éstas no garantizan que los estimadores sean mejores, en el sentido de garantizar un menor sesgo entre los estimadores y los parámetros reales. Por esta razón, Pesaran y Smith (1994) plantean un criterio de selección de modelos de variables instrumentales basada en una generalización de la R^2 que se basa en los errores estimados, así la GR^2 ofrece un criterio válido asintóticamente, esto bajo los supuestos de que los instrumentos utilizados en los modelos sean válidos (las variables "instrumentos "no deben de tener correlación con el término de error del modelo) y relevantes (las variables "instrumentos "deben de tener correlación con la variable con problemas de endo-

[1] $1 - \bar{R}^2 = \frac{T}{T-\Delta}(1 - R^2)$, donde: T es el tamaño de la muestra y Δ es el número de variables explicativas

geneidad). Ante esto surge una pregunta natural, ¿Qué sucede con la GR^2 o con la R^2 si una de las condiciones no se cumple?.

Es fácil intuir qué sucede si la condición de relevancia no se cumple en un modelo bivariado. Tomemos por ejemplo el siguiente modelo: $y = \alpha + \beta x + \epsilon$, donde la variable x tiene problemas de endogeneidad y ϵ es el término de error del modelo, además supongamos que la variable instrumento es z.

Cuando se instrumenta x con z y z es no relevante la $R^2_{IV} = 0$, ya que la $corr(x, z) = 0$, lo que conduce a que la estimación de la segunda etapa por medio de MCO sea $y = \alpha + \beta\bar{x} + \epsilon$, ya que la $\bar{x} = \hat{x}$. Este es uno de los resultados que se probarán asintóticamente y mediante simulaciones.

Existe basta literatura sobre los problemas de debilidad en los instrumentos y poca sobre la validez de los instrumentos. "Existen dos problemas principales cuando los instrumentos están débilmente correlacionados con las variables con problemas de endogeneidad, 1) el uso de instrumentos débiles pueden generar estimadores con grandes sesgos (incluso si existe una débil correlación entre los instrumentos y el término de error) y 2) Los estimadores generados por variables instrumentales están sesgados y tienen la misma dirección que los estimadores de MCO incluso asintóticamente "[2] (Bound y cols., 1995, p. 1).

Bound y cols. (1995) sugieren que cuando existen problemas de debilidad de los instrumentos una buena medida para la selección de modelos estimados por variables instrumentales es la R^2 de la primera etapa, a mayor R^2 de la primera etapa, el instrumento es más relevante, otras medidas para evitar problemas de instrumentos débiles es la prueba F si el modelo está *over-identified*, *i.e.*, se tienen más instrumentos que variables con problemas de endogeneidad o también es posible utilizar la prueba t cuando se trata de una variable instrumentada y un instrumento.

Como se puede inferir, cuando los instrumentos no cumplen con la condición de validez, los estimadores de variables instrumentales están sesgados "en otras palabras, en esos casos donde

[2](Bound, Jaeger, y Baker, 1995) muestran que los estimadores del método de variables instrumentales es: $\hat{\beta} = \beta + \frac{plim\ \Delta\epsilon}{plim\ \Delta\bar{x}}$ por lo que incluso asintóticamente pueden estar sesgados si $plim\ \Delta\epsilon \neq 0$

el MCO es un estimador sesgado, los estimadores de variables instrumentales con instrumentos pobres serán incluso peor, los resultados esperados son espurios ... cuando los instrumentos son débiles”(Nelson y Startz, 1988, p.88).

Un ejemplo de estimadores sesgados se puede consultar en Murray (2006a), en el que Murray se refiere a dos trabajos de S. Levit en los cuales emplea el método de variables instrumentales para estimar los efectos de la policía sobre el crimen en USA. La crítica principal es que dos instrumentos distintos tienen estimadores distintos estadísticamente.

El cumplimento de la condición de validez de los instrumentos se apoya principalmente en argumentos teóricos que el investigador pueda aportar para el uso de uno u otro instrumento en los modelos estimados por variables instrumentales, y cómo se argumentó en los párrafos anteriores la R^2 es un estadístico de suma importancia para la selección de modelos estimados por variables instrumentales, pero esto únicamente cuando los instrumentos utilizados cumplen las dos condiciones. Como también se mencionó anteriormente, para asegurar la relevancia de los instrumentos se utilizan las pruebas F (o la t) o la R^2 de la primera etapa.

El objetivo de este trabajo, es analizar la distribución de la R^2 del método de variables instrumentales y usarla como un estadístico para la selección de modelos para apoyar de manera estadística los argumentos teóricos que el investigador pueda aportar para la validez de los instrumentos.

1.1. Motivación

El método de variables instrumentales (VI) se utiliza para corregir los problemas de endogeneidad de las variables explicativas, ya que si se tienen variables explicativas con problemas de endogeneidad causaran sesgos en los estimadores de la regresión. El método de VI es teóricamente convincente ya que corrige los problemas de endogeneidad por variable omitida, error de medición o causalidad inversa, sin embargo, los instrumentos deben de cumplir ciertas condiciones: la condición de validez y la de relevancia, las cuales implican que si se cumplen, los estimadores de este método son consistentes.

En la literatura existen algunas medidas para determinar si el instrumento cumple o no con las condiciones de relevancia y validez. Para comprobar, que el instrumento o los instrumentos cumplen la condición de relevancia $Cov(x, z) \neq 0$, *i.e.*, que el instrumento explica "suficientemente bien " a la variable explicativa endógena es necesario realizar en la primera etapa de estimación de VI una prueba F si se tratase de más de un instrumento o su equivalente, una prueba t, para el caso de una variable endógena y un instrumento. La idea de la prueba F (y de la prueba t) consiste en rechazar la $Ho : \beta_{VI} = 0$, por lo que se debe de tener un valor de $F > 10$ o su equivalente $|t| > 6$ si se trata de un instrumento, el hecho de explicar "suficientemente bien" a la variable explicativa, conlleva al problema de debilidad de los instrumentos, por lo que si los valores de las pruebas F o t se encuentran en el umbral de rechaza de la Ho. se debe de tomar precauciones sobre la estimación[3] ya que se puede tener problemas de debilidad de los instrumentos que a su vez causan sesgos en los estimadores.

Para la prueba de validez de los instrumentos $Cov(z, u) = 0$, donde z es el instrumento y u es el término de error de modelo es necesario reconocer si se trata de un modelo "justamente identificado" o "sobre identificado". Justamente identificado se refiere al caso en el que el número de instrumentos (r) es igual número de variables con problemas de endogeneidad (p) lo que conlleva a no poder hacer pruebas estadísticas, por otro lado, sobre identificado se refiere al caso en el que el número de instrumentos es mayor al número de variables con problemas de endogeneidad, la cual permite realizar la prueba de Sargan (*overidentification test*), que consiste en 1.- Estimar $\hat{u}$, 2. Estimar mediante MCO $\hat{u}$ =*(variables exógenas, instrumentos)* y recuperar la R^2, presuponiendo Ho: Los instrumentos son exógenos.

$$TR^2 \sim \chi^2_{r-p}$$

donde T es el tamaño de la muestra y además es importante mencionar que esta prueba se basa

[3]"Si existen múltiples variables endógenas adicional a la prueba F se debe utilizar las pruebas de Godfrey o el Angrist-Pischke, first-stage chi-squared".

en el supuesto de que “al menos un instrumento es válido”.

Además de las pruebas descritas anteriormente es necesario cerciorarse de que aplicar el método de VI es válido, para ello se debe comprar la endogeneidad de las variables explicativas. La forma más sencilla de hacerlo es a través de la prueba de Durbin-Wu-Hausman, la cual se establece como sigue:

$$(\beta_{VI} - \beta_{MCO})'[V(\beta_{VI}) - V(\beta_{MCO})]^{-1}(\beta_{VI} - \beta_{MCO}) \sim \chi^2_{dim(\beta)}$$

Si efectivamente existe endogeneidad en las variables explicativas del modelo $\beta_{VI} \neq \beta_{MCO}$, y se aplica el criterio anterior, por otro lado si no existen diferencias estadísticas no hay endogeneidad y los estimadores son insesgados.

Como se puede apreciar, los criterios de validez y relevancia ya han sido estudiados, principalmente desde la perspectivas de los estimadores del modelo ya sea de la primera etapa (relevancia de los instrumentos) o la prueba de endogeneidad mediante la prueba de Durbin-Wu-Hausman. Sin embargo, la R^2 de la segunda etapa es débilmente tomada en cuenta para la selección entre modelos estimados por VI y no constituye un estadístico prueba ante las condiciones de validez y/o relevancia de los instrumentos. Ante ello es importante analizar el comportamiento de la R^2 y proponer si se puede tomar como estadístico de prueba o no en el método de variables instrumentales ya que de ser el caso, el usuario hará una sola prueba y con ello probar si se trata de instrumentos relevantes y/o válidos. Por esta razón surge el interés de conocer la distribución de la R^2 de variables instrumentales en un ambiente controlado, *i.e.*, en donde a través de simulaciones y un Proceso Generador de Datos (PGD) se puedan ir satisfaciendo las condiciones de validez y relevancia de los instrumentos.

El interés de este experimento es poder discriminar a través de la distribución de la R^2 los casos en los que se cuente con instrumentos relevantes y no relevantes, válidos y no válidos, y a través de ello obtener un criterio más en la selección de instrumentos y coadyuve a las pruebas existentes así como a los argumentos teóricos en favor de los instrumentos que se utilicen en la estimación del método de variables instrumentales.

Como primer aproximación, véase la distribución de la R^2 de variables instrumentales en la gráfica (2.1) que se obtuvo de una simulación de 1000 repeticiones y una muestra de 1000 observaciones. La parte A) de la gráfica se refiere al caso en el que el instrumento cumple con las dos condiciones, en el caso B) el instrumento es no relevante pero válido. Como se aprecia en esta primera aproximación, no existen diferencias sustanciales entre los dos casos por lo que surge la duda natural de cuál es la distribución asintótica de este estadístico para los casos en los que se tienen instrumentos i) válidos y relevantes, ii) válidos y no relevantes, iii) no válidos y relevantes y iv) no válidos y no relevantes.

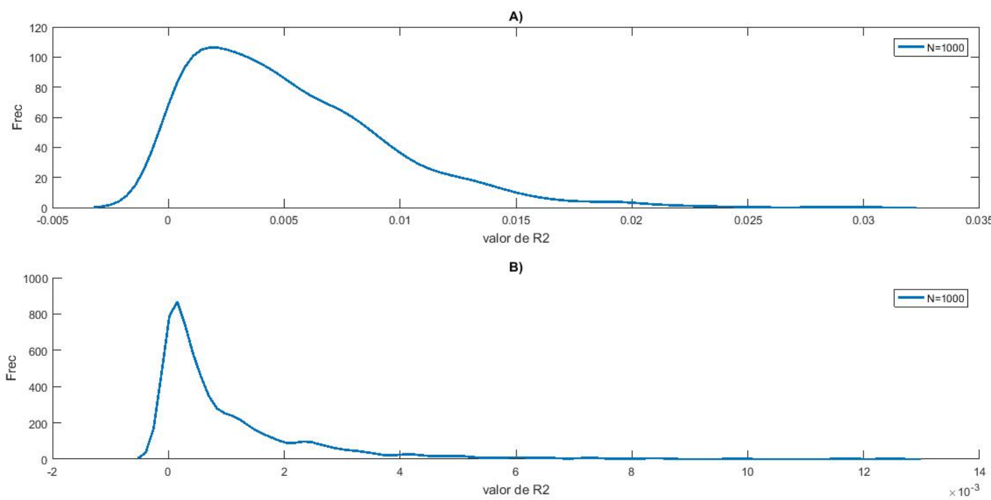

Figura 1.1: Distribución de la R^2 de VI, A) Instrumento válido y relevante, B) Instrumento válido y no relevante

Si es posible determinar cuál es la distribución asintótica de la R^2 bajo cada caso i-iv dará pauta a poder discriminar entre los casos i-iv y además contar con un estadístico objetivo para la toma de decisiones, en este sentido, si la pregunta de investigación es llevada acabo con resultados satisfactorios encontrando intervalos de confianza a distintos niveles de significancia que aporten información estadística para poder discriminar entre instrumentos que no cumplan una o las dos condiciones, estaría aportando un método más para la toma de decisiones en los modelos que se estimen por medio de Variables instrumentales.

1.2. Pregunta de investigación

¿Puede la distribución de la R^2 del método de variables instrumentales ser un estadístico de prueba para la comprobación de validez y/o relevancia de los instrumentos?.

1.2.1. Hipótesis

Ho: La distribución de la R^2 de los modelos estimados por el método de variables instrumentales no aporta información estadística para identificar problemas de validez y/o relevancia de los instrumentos.

Ha: La distribución de la R^2 de los modelos estimados por el método de variables instrumentales contiene información para discriminar instrumentos que cumplan con las condiciones de validez y/o relevancia.

Capítulo 2

Estimador de Variables Instrumentales

La naturaleza de los datos no siempre permiten la utilización del método de Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO) ya que se violan alguno(s) de los supuestos conocidos como supuestos de Gauss-Markov, bajo los cuales los estimadores del modelo de MCO son los mejores estimadores lineales e insesgados, es decir los de mínima varianza y los verdaderos. El hecho de que no se cumplan dichos supuestos hace que estimar los coeficientes a través de MCO no cumplan con las propiedades esperadas de los estimadores (mínima varianza e insesgados) ((Murray, 2006b, p. 91) y (Greene, 2003, p. 10)). Uno de los problemas por el que se utiliza el método de variables instrumentales es por el problema de endogeneidad en las variables explicativas ($E\left[u|X\right] \neq 0$, dónde u denota el término de error y X la matriz de variables explicativas), que tiene como consecuencia que los estimadores por MCO no sean adecuados ya que estos estimadores estarán sesgados.

DEFINICIÓN **1.** ***Endogeneidad:*** *Una variable endógena es una variable cuyo valor está determinado por otra variable observable o no observable.*

El problema de endogeneidad aparece cuando una o más de las variables explicativas depende de otra variable observada o no observada. Si podemos observar la variable basta con incluirla en la regresión y eliminamos el problema de endogeneidad, sin embargo, en muchas ocasiones no es posible observar dicha variable, por lo que se buscan otras variables (observables) que puedan usarse como instrumentos para instrumentar a las variables endógenas.

Existen tres fuentes de endogeneidad[1]:

1. **Variable omitida:** Es decir que el modelo verdadero sea $Y = X\beta + \gamma q + u$ pero solo se observa $Y = X\beta + v \Rightarrow v = \gamma q + u \Rightarrow E[v|X] \neq 0$ si $\gamma \neq 0$.

2. **Error de medición:** Es decir que el modelo verdadero sea $Y = X\beta + \gamma q + u$ pero solo se observa $w = q + v \Rightarrow$ se estima $Y = X\beta + \gamma w + \epsilon$.

3. **Causalidad inversa:** Es una situación en la que la variable explicativa depende de la variable explicada causando efectos cíclicos.

El método de variables instrumentales puede resolver teóricamente los tres problemas de endogeneidad mencionados anteriormente. Sin embargo, uno de los retos para poder utilizar adecuadamente este método es encontrar instrumentos válidos y relevantes por lo que los instrumentos (variables explicativas Z) deben de cumplir las siguientes condiciones:

- Z debe ser relevante $\Rightarrow cov(X, Z) \neq 0$.

- Z debe ser válido $\Rightarrow cov(y, Z) = 0$ que es equivalente a que $E[u|Z] = 0$.

La idea de este método consiste en utilizar una(s) variable(s) Z como instrumento de la variable(s) endógena(s) X. En una primera etapa, esta variable permite estimar el efecto causal de las variables Z en la variable endógena X, de aquí la importancia de la condición de relevancia, si Z no es relevante simplemente esta estimación tendrá un coeficiente asociado con Z de cero, por el contrario si el coeficiente del parámetro asociado con Z es uno, tendremos el mismo problema de endogeneidad, por lo tanto existe un $trade - off$ entre relevancia y validez del instrumento. Lo anterior significa que se debe elegir un o unos instrumentos que sean exógenos en el sentido de no tener relación con el término de error del modelo, y por otro lado, debe de explicar una parte de la variación de la variable instrumentada X.

[1] Para una explicación más detallada acerca de las fuentes de endogeneidad veáse Chavez-Juárez (2017).

La segunda etapa consiste en utilizar la variable $\hat{X}$ estimada y ahora estimar mediante MCO la regresión de $\hat{X}$ sobre Y y obtener $\hat{Y}$.

Suponga que el modelo de interés es:

$$Y = X\beta + u \tag{2.1}$$

La estimación de los coeficientes β de la regresión principal se derivan, como se mencionó anteriormente en dos etapas, la primera consiste en estimar $\hat{X}$.

$$X = Z\psi + \nu \Rightarrow \hat{X} = Z\left(Z'Z\right)^{-1} Z'X \tag{2.2}$$

En la segunda etapa se utilizan las $\hat{X}$ para estimar Y es decir:

$$Y = \hat{X}\beta + \epsilon \Rightarrow \hat{\beta}_{VI} = \hat{X}\left(\hat{X}'\hat{X}\right)^{-1} \hat{X}'Y \tag{2.3}$$

lo que nos lleva a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{VI} =& Z\left(Z'Z\right)^{-1} Z'X \left(\left(Z\left(Z'Z\right)^{-1} Z'X\right)' Z\left(Z'Z\right)^{-1} Z'X\right)^{-1} \left(Z\left(Z'Z\right)^{-1} Z'X\right)' Y \\ =& \left(X'Z\left(Z'Z\right)^{-1} Z'X\right)^{-1} X'Z\left(Z'Z\right)^{-1} Z'Y \end{aligned} \tag{2.4}$$

Remplazando Y y obteniendo la esperanza del estimador se obtiene:

$$E\left[\hat{\beta}_{VI}\right] = \left(X'Z\left(Z'Z\right)^{-1} Z'X\right)^{-1} X'Z\left(Z'Z\right)^{-1} Z'\left(X\beta + u\right)$$

$$E\left[\hat{\beta}_{VI}\right] = \beta + \left(Z'X\right)^{-1} E\left[Z'u\right] \tag{2.5}$$

Si el instrumento Z cumple con la condición de validez entonces $E\left[Z'u\right] = 0$ y relevancia $Z'X \neq 0 \Rightarrow \hat{\beta}_{VI} = \beta$, por lo tanto, es insesgado.

DEFINICIÓN **2.** ***Consistencia:*** *Un estimador es consistente si a medida que la muestra crece el estimador se acerca al verdadero.*

La consistencia en Variables Instrumentales se puede derivar de de los errores al cuadrado. De la ecuación 2.1 se tiene:

$$u'u = (Y - X\beta)'(Y - X\beta) \tag{2.6}$$

a la cual se puede pre-multiplicar por el instrumento y dividir entre el tamaño de muestra T y obtener $\frac{Z'(Y-X\beta)}{T} = 0$, este resultado es el que se usaría para la estimación del vector β, nuevamente podemos multiplicar por una matriz cuadrada P semidefinida positiva para no afectar las condiciones de primer y segundo orden en el proceso de minimización de los errores cuadráticos.

Por lo tanto, los errores al cuadrado quedan como:

$$u'u = (Y - X\beta)' ZPZ' (Y - X\beta) \tag{2.7}$$

De donde se obtienen los $\hat{\beta}$ siguientes:

$$\hat{\beta}_{VI} = (X'ZPZ'X)^{-1} X'ZPZ'Y \tag{2.8}$$

Sustituyendo Y y tomando la esperanza se obtiene:

$$E\left[\hat{\beta}_{VI}\right] = \beta + E\left[(X'ZPZ'X)^{-1} X'ZPZ'u\right] \tag{2.9}$$

Que es similar a la ecuación (2.5). Si se propone la matriz $P \equiv (X'X/T)^{-1}$ tal como en White (2001) entonces a medida que la muestra (T) crece, el estimador $\hat{\beta}$ se aproxima al valor verdadero de β.

Como se puede observar el estimador de VI es teóricamente convincente ya que permite eliminar el problema de endogeneidad (omisión de variables, errores de medición o causalidad inversa), sin embargo, la correcta implementación de este método requiere que los instrumentos a usar cumplan con las condiciones de validez y relevancia, y como se mencionó anteriormente existe un *trade-off* entre estas dos condiciones, por lo que es difícil encontrar instrumentos que cumplan con las dos condiciones sin afectarse mutuamente.

Si los instrumentos los instrumentos a utilizar para corregir la endogeneidad del modelo tienen poca relevancia, se dice que se tiene un instrumento débil que a su vez causa un sesgo en los estimadores de β, por otro lado, instrumentos con una alta correlación con la variable explicativa X implica que muy probablemente no se corrija el problema de endogeneidad y por tanto los estimadores de β estarán sesgados.

Generalmente los instrumentos propuestos deben sustentarse mediante una explicación teórica robusta para convencer de que los instrumentos son válidos y relevantes, de aquí el problema que se analizará en el presente trabajo, tratar de encontrar un estadístico que ayude a tomar las decisiones sobre la validez y relevancia de los instrumentos, adicionales a los existentes.

2.1. La R^2 en VI

La R^2 es la proporción de los datos que es explicado por la regresión, *i.e.*, es una medida de ajuste del modelo que se puede obtener mediante:

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = 1 - \frac{SCR}{SCT} \tag{2.10}$$

La segunda parte de la ecuación (2.10) es 1 menos lo que el modelo no puede explicar. donde:

- $SCE = \sum_{t=1}^{T} (y_t - \hat{y}_t)^2$
- $SCR = \sum_{t=1}^{T} (\hat{y}_t - \bar{y})^2$
- $SCT = \sum_{t=1}^{T} (y_t - \bar{y})^2$

Como se comprueba en la gráfica (2.1) la R^2 de la estimación del modelo de VI sigue una distribución χ^2 cuando el o los instrumentos son válidos y relevantes.

Para la realización de la distribución que sigue la R^2 en VI se obtiene a partir de una simulación en Matlab, generando con ellos los datos necesarios para que se cumplan las condiciones de relevancia y validez del instrumento, en la simulación se realiza el siguiente modelo:

$$y = \alpha + x\beta + \epsilon \tag{2.11}$$

donde x y ϵ son vectores de números aleatorios, α y β son números aleatorios y y es simplemente la realización del modelo, la endogeneidad del modelo proviene de que x es una combinación de dos vectores de números aleatorios ψ y w y ϵ se compone de ξ y w por lo tanto no se cumple la condición de exogeneidad de la variable explicativa x ya que $E\left[x|\epsilon\right] \neq 0$. Todos los vectores son de tamaño $Tx1$.

Para poder implementar correctamente el método de variables instrumentales se requiere que el instrumento z cumpla con las dos condiciones, por lo que en este caso se construye la variable z de la siguiente manera: $z = \xi + \eta\psi$, esta forma de construir el instrumento cumple con las condiciones de relevancia ya que la $cov\left(x, z\right) \neq 0$ y es válido porque $E\left[z|\epsilon\right] = 0$.

Una vez generado los datos del modelo $y, x, z, \alpha, \beta, \epsilon$ se implementa el método de VI, en donde en la primera etapa se realiza una regresión por MCO entre x y z, obteniendo $\hat{x}$, luego una vez obtenida los datos estimados, se procede con la segunda etapa en donde se realiza otra estimación por MCO de y con $\hat{x}$ y de esta regresión (segunda etapa) se calcula la R^2, este proceso es repetido 1000 veces, generando así un vector de R^2 en donde por construcción el instrumento con el que se corrige la endogeneidad del modelo cumple con las condiciones de validez y relevancia.

El resultado que se obtiene de graficar la distribución de la R^2 cuando el instrumento es válido y relevante se muestra en la parte (A) de la gráfica (2.1). Análogo a este procedimiento se obtiene la distribución que sigue la R^2 cuando el instrumento es valido pero no relevante es decir que no cumple con $cov\left(x, z\right) \neq 0$ en este caso la forma de construcción de los datos es que $z = \xi$, por lo que $cov\left(x, z\right) = 0$. De igual manera una vez obtenido el vector de R^2 se gráfica la

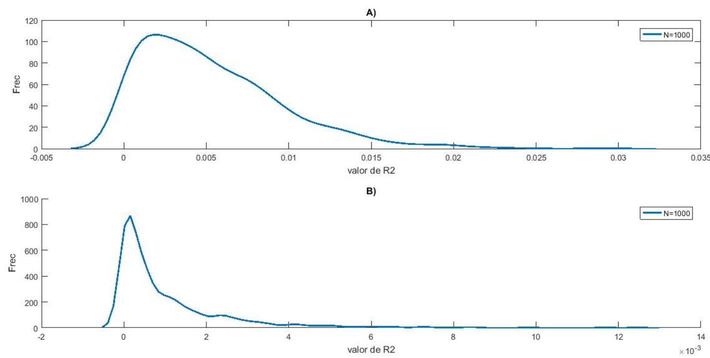

Figura 2.1: Distribución de la R^2 de VI, A) Instrumento válido y relevante, B) Instrumento válido y no relevante

distribución, obteniendo como resultado la parte (B) de la gráfica (2.1).

2.1.1. Distribución de la R2 en VI

Los resultados observados en la distribución de los dos vectores de R^2 nos propone verificar las siguientes opciones sobre el instrumento a utilizar en el modelo de VI:

1. Instrumento válido y relevante
2. Instrumento válido y no relevante
3. Instrumento no válido y relevante
4. Instrumento no válido y no relevante

Como se observa en la ecuación (2.5) los estimadores de β son consistes, por lo tanto se analizan los cuatro casos anteriormente mencionados con distintos tamaños de muestra, la forma de construcción de los datos y obtención de la R^2 para el caso 3) y 4) son similares a los descritos en los casos 1) y 2). La gráfica (2.2) se obtiene de realizar la estimación de la R^2 para cada uno de cuatro casos mediante la simulación en Matlab generando los vectores de la R^2 a partir de 1000 repeticiones para cada caso y cada tamaño de muestra.

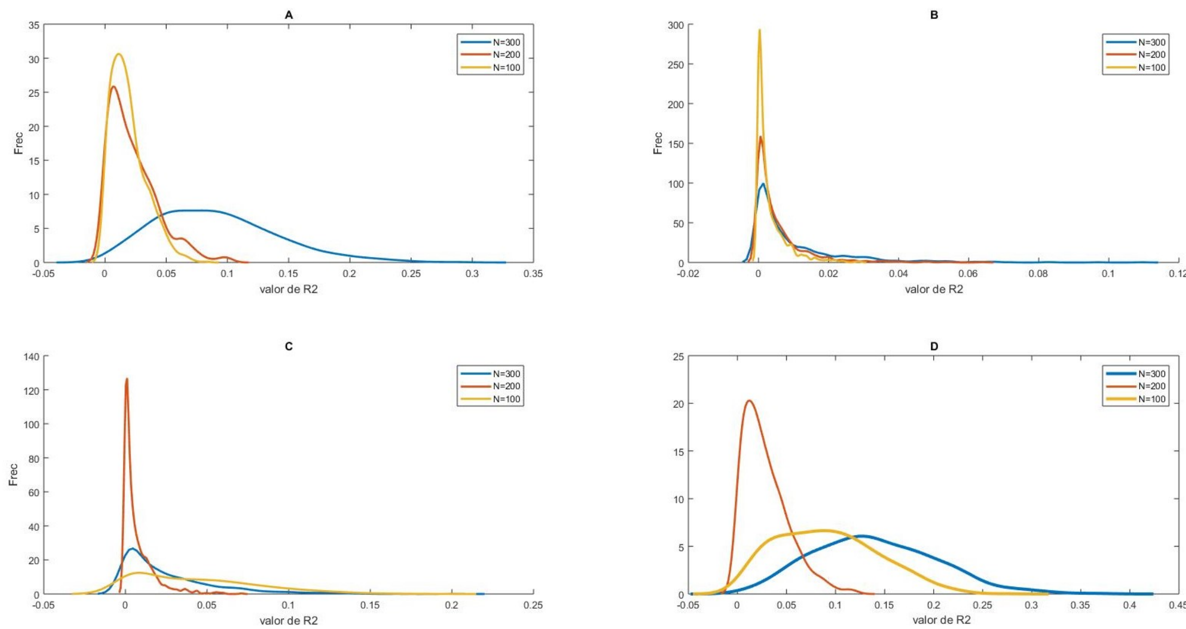

Figura 2.2: Distribución de la R^2 de VI. A) muestra la distribución de la R^2 con el instrumento válido y relevante, B) muestra la distribución de la R^2 con el instrumento válido y no relevante, C) muestra la distribución de la R^2 con el instrumento no válido y no relevante, y D) muestra la distribución de la R^2 con el instrumento no válido y relevante

2.2. Prueba de hipótesis

Del vector de R^2 generado anteriormente con el instrumento válido y relevante con una muestra de 10,000 observaciones, se ordenaron de menor a mayor y se estableció un umbral de rechazo (significancia) de 10 %, 5 % y 1 % que corresponde a las observaciones 9000, 9500 y 9900 respectivamente, seguido de esto, se realiza la simulación de la R^2 de los cuatro casos con la hipótesis nula Ho: el instrumento cumple con las condiciones de validez y/o relevancia según los casos 2,3,4 y la hipótesis alternativa, Ha: el instrumento es válido y relevante. A partir de esta hipótesis se generan las tasas de rechazo de los cuatro casos mencionados anteriormente con distintos tamaños de muestra, mismos que se presentan en la tabla (4.3).

Como se puede observar, esta es una prueba de hipótesis de una cola (derecha) y las propor-

	Instrumento válido y relevante			Instrumento válido y no relevante		
Tamaño de muestra	$\alpha = 1\,\%$	$\alpha = 5\,\%$	$\alpha = 10\,\%$	$\alpha = 1\,\%$	$\alpha = 5\,\%$	$\alpha = 10\,\%$
100	0.018	0.089	0.215	0	0.001	0.002
200	0.022	0.194	0.412	0	0	0
300	0	0.001	0.013	0	0	0
	Instrumento no válido y no relevante			Instrumento no válido y relevante		
	$\alpha = 1\,\%$	$\alpha = 5\,\%$	$\alpha = 10\,\%$	$\alpha = 1\,\%$	$\alpha = 5\,\%$	$\alpha = 10\,\%$
100	0.002	0.009	0.019	0.147	0.387	0.566
200	0	0	0.002	0.162	0.502	0.755
300	0.097	0.259	0.364	0.501	0.658	0.760

Cuadro 2.1: Tasa de no rechazo de la Ho.

ciones que se observan en cada caso corresponde a los valores que están por arriba del umbral de rechazo.

Capítulo 3

Estimadores asintóticos

En la primera etapa, se estima los estimadores de la regresión $x = \alpha_0 + \beta_0 z + \nu$

$$\hat{\beta_0} = \frac{cov\left(x, z\right)}{var\left(z\right)} \tag{3.1}$$

$$\hat{\alpha_0} = \bar{x} - \hat{\beta_0}\bar{z} \tag{3.2}$$

Con el resultado de (3.1) y (3.2) se obtiene el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \hat{\alpha_0} + \hat{\beta_0} z \\ &= \bar{x} + \hat{\beta_0}\left(z - \bar{z}\right) \end{aligned} \tag{3.3}$$

En la segunda etapa, se estima la regresión $y = \alpha_1 + \beta_1 \hat{x} + \epsilon$ obteniendo los siguientes resultados:

$$\hat{\beta_1} = \frac{cov\left(y, \hat{x}\right)}{var\left(\hat{x}\right)} \tag{3.4}$$

$$\hat{\alpha_1} = \bar{y} - \hat{\beta_1}\bar{\hat{x}} \tag{3.5}$$

Transformando la ecuación (3.4) del estimador de β_1 se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} var\left(\hat{x}\right) &= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\hat{x}-E\left[\hat{x}\right]\right)^2 \\ &= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\hat{\beta}_0\left(z_t-\bar{z}\right)\right)^2 \\ &= \frac{\hat{\beta}_0^2}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\left(z_t-\bar{a}\right)\right)^2 \\ &= \frac{\hat{\beta}_0^2}{T}\left(\sum_{t=1}^{T}z_t^2-\frac{\left(\sum_{t=1}^{T}z_t\right)^2}{T}\right) \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} cov\left(y,\hat{x}\right) &= cov\left(y,\bar{x}+\beta_0 z-\beta_0\bar{z}\right) \\ &= cov\left(y,\bar{x}\right)-\beta_0 cov\left(y,\bar{z}\right)+\beta_0 cov\left(y,z\right) \\ &= \beta_0 cov\left(y,z\right) \\ &= \beta_0\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(y_t-\bar{y}\right)\left(z_t-\bar{z}\right) \end{aligned} \tag{3.7}$$

Dividiendo la ecuación (3.6) entre (3.6) regresamos al estimador de $\beta_1 \equiv \beta_{VI}$:

$$\begin{aligned} \beta_{VI} &= \frac{\hat{\beta}_0\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(y_t-\bar{y}\right)\left(z_t-\bar{z}\right)}{\frac{1}{\hat{\beta_0}^2}\sum_{t=1}^{T}z_t^2-\frac{\left(\sum_{t=1}^{T}z_t\right)^2}{T}} \\ &= \frac{\sum_{t=1}^{T}\left[\beta\left(x_t-\bar{x}\right)+\left(\epsilon_t-\bar{\epsilon}\right)\right]\left[z_t-\bar{z}\right]}{\sum_{t=1}^{T}x_t z_t-\frac{\sum_{t=1}^{T}x_t\sum_{t=1}^{T}z_t}{T}} \\ &= \beta+\frac{\sum_{t=1}^{T}\left(\epsilon_t-\bar{\epsilon}\right)\left(z_t-\bar{z}\right)}{\sum_{t=1}^{T}x_t z_t-\frac{\sum_{t=1}^{T}x_t\sum_{t=1}^{T}z_t}{T}} \\ \beta_{VI}-\beta &= \frac{\sum_{t=1}^{T}\epsilon_t z_t}{\sum_{t=1}^{T}x_t z_t-\frac{\sum_{t=1}^{T}x_t\sum_{t=1}^{T}z_t}{T}} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Tomando el límite en probabilidad y por Ley de Grandes Números (LGN) se tiene que:

$$\beta_{VI} \xrightarrow{a} N\left(\beta, \frac{1}{T} var\left(\sigma^2 Q_{zx}^{-1} Q_{zz} Q_{xz}^{-1}\right)\right) \tag{3.9}$$

donde

$Q_{zx} = plim \frac{\sum_{t=1}^{T}(z_t - \bar{z})(x_t - \bar{x})}{T}$ y $Q_{zz} = plim \frac{\sum_{t=1}^{T}(z_t - \bar{z})^2}{T}$.

Este resultado asintótico es importante para poder corregir la distribución de la R^2 para que a medida que la muestra crezca las distribuciones permanezcan centradas.

3.1. R^2 en MCO y Variables instrumentales

A continuación se presenta la R^2 del modelo MCO sin hacer referencia al proceso generador de datos (PGD). Este cálculo ayudará ya que en las siguientes secciones se utiliza con el PGD específico para cada caso, tanto en MCO como en variables instrumentales.

Partamos de la ecuación (2.10) de la R^2 y descomponiendo sus partes, cuando el modelo es de la forma $y_t = \alpha + \beta x_t + \epsilon_t$ se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
R^2 &= 1 - \frac{\sum_{t=1}^{T} \hat{e_t}^2}{\sum_{t=1}^{T} y_t - \bar{y}} \\
&= 1 - \frac{\sum_{t=1}^{T}\left(y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta} x_t\right)^2}{\sum_{t=1}^{T}(y_t - \bar{y})^2} \\
&= 1 - \frac{\sum_{t=1}^{T}\left(y_t - \bar{y} + \hat{\beta}\bar{x} - \hat{\beta} x_t\right)^2}{\sum_{t=1}^{T}(y_t - \bar{y})^2} \\
&= 1 - \frac{\sum_{t=1}^{T}\left([y_t - \bar{y}] - \hat{\beta}\left[x_t - \bar{x}\right]\right)^2}{\sum_{t=1}^{T}(y_t - \bar{y})^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
R^2 &= 1 - \frac{\sum_{t=1}^{T}\left(\left[y_t-\bar{y}\right]^2 - 2\left[y_t-\bar{y}\right]\hat{\beta}\left[x_t-\bar{x}\right] + \hat{\beta}^2\left[x_t-\bar{x}\right]^2\right)}{\sum_{t=1}^{T}\left(y_t-\bar{y}\right)^2} \\
&= 1 - \frac{\sum_{t=1}^{T}\left[y_t-\bar{y}\right]^2 - 2\sum_{t=1}^{T}\left[y_t-\bar{y}\right]\hat{\beta}\left[x_t-\bar{x}\right] + \sum_{t=1}^{T}\hat{\beta}^2\left[x_t-\bar{x}\right]^2}{\sum_{t=1}^{T}\left(y_t-\bar{y}\right)^2} \\
&= \frac{2\hat{\beta}\sum_{t=1}^{T}\left(y_t-\bar{y}\right)\left(x_t-\bar{x}\right) - \hat{\beta}^2\sum_{t=1}^{T}\left(x_t-\bar{x}\right)^2}{\sum_{t=1}^{T}\left(y_t-\bar{y}\right)^2}
\end{aligned}
$$

3.1.1. R^2 en MCO

Recordemos que $\hat{\beta_{ols}} = \beta + \frac{cov(x,\epsilon)}{var(x)} = \beta + \frac{\sum_{t=1}^{t}(x_t-\bar{x})(\epsilon_t-\bar{\epsilon})}{\sum_{t=1}^{t}(x_t-\bar{x})^2}$, por lo que la ecuación anterior queda como:

$$
\begin{aligned}
R^2_{ols} &= \frac{2\hat{\beta_{ols}}\sum_{t=1}^{T}\left(y_t-\bar{y}\right)\left(x_t-\bar{x}\right) - \hat{\beta_{ols}}^2\sum_{t=1}^{T}\left(x_t-\bar{x}\right)^2}{\sum_{t=1}^{T}\left(y_t-\bar{y}\right)^2} \\
&= \frac{2\left(\beta + \frac{\sum_{t=1}^{T}(x_t-\bar{x})(\epsilon_t-\bar{\epsilon})}{\sum_{t=1}^{T}(x_t-\bar{x})^2}\right)\sum_{t=1}^{T}\left(y_t-\bar{y}\right)\left(x_t-\bar{x}\right) - \left(\beta + \frac{\sum_{t=1}^{T}(x_t-\bar{x})(\epsilon_t-\bar{\epsilon})}{\sum_{t=1}^{T}(x_t-\bar{x})^2}\right)^2\sum_{t=1}^{T}\left(x_t-\bar{x}\right)^2}{\sum_{t=1}^{T}\left(y_t-\bar{y}\right)^2} \\
&= \frac{\left(\beta + \frac{\sum_{t=1}^{T}x_t\epsilon_t}{\sum_{t=1}^{T}x_t^2 - \frac{\left(\sum_{t=1}^{T}x_t\right)^2}{T}}\right)}{\sum_{t=1}^{T}y_t^2 - \frac{\left(\sum_{t=1}^{T}y_t\right)^2}{T}}\left[2\sum_{t=1}^{T}y_tx_t - 2\frac{\sum_{t=1}^{T}y_t\sum_{t=1}^{T}x_t}{T} - \beta\sum_{t=1}^{T}x_t^2 + \beta\frac{\left(\sum_{t=1}^{T}x_t\right)^2}{T} - \sum_{t=1}^{T}x_t\epsilon_t\right]
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Cuando no existen problemas de endogeneidad, *i.e.*, $\frac{\sum_{t=1}^{T}x_t\epsilon_t}{T} = 0$, la R^2_{ols} está dada por:

$$
R^2_{ols} = \frac{\beta}{\sum_{t=1}^{T}y_t^2 - \frac{\left(\sum_{t=1}^{T}y_t\right)^2}{T}}\left[2\sum_{t=1}^{T}y_tx_t - 2\frac{\sum_{t=1}^{T}y_t\sum_{t=1}^{T}x_t}{T} - \beta\left(\sum_{t=1}^{T}x_t^2 - \frac{\left(\sum_{t=1}^{T}x_t\right)^2}{T}\right)\right]
\tag{3.11}
$$

3.1.2. R^2 en Variables instrumentales

De la ecuación de la R^2 y del estimador de β en variables instrumentales (ec. 3.8) se obtiene lo siguiente:

$$R^2_{VI} = \frac{2\hat{\beta_{VI}} \sum_{t=1}^{T} (y_t - \bar{y})(x_t - \bar{x}) - \hat{\beta_{VI}}^2 \sum_{t=1}^{T} (x_t - \bar{x})^2}{\sum_{t=1}^{T} (y_t - \bar{y})^2}$$

$$= \frac{2\left(\beta + \frac{\sum(\epsilon_t - \bar{\epsilon})(z_t - \bar{z})}{\sum x_t z_t - \frac{\sum x_t \sum z_t}{T}}\right) \sum_{t=1}^{T} (y_t - \bar{y})(x_t - \bar{x}) - \left(\beta + \frac{\sum(\epsilon_t - \bar{\epsilon})(z_t - \bar{z})}{\sum x_t z_t - \frac{\sum x_t \sum z_t}{T}}\right)^2 \sum_{t=1}^{T} (x_t - \bar{x})^2}{\sum_{t=1}^{T} (y_t - \bar{y})^2}$$

$$= \frac{\beta + \frac{\sum_{t=1}^{T} z_t \epsilon_t}{\sum_{t=1}^{T} x_t z_t - \frac{\sum_{t=1}^{T} x_t \sum_{t=1}^{T} z_t}{T}}}{\sum_{t=1}^{T} y_t^2 - \frac{\left(\sum_{t=1}^{T} y_t\right)^2}{T}} \left[2\sum_{t=1}^{T} y_t x_t - 2\frac{\sum_{t=1}^{T} y_t \sum_{t=1}^{T} x_t}{T}\right.$$
$$\left. - \left(\beta + \frac{\sum_{t=1}^{T} z_t \epsilon_t}{\sum_{t=1}^{T} x_t z_t - \frac{\sum_{t=1}^{T} x_t \sum_{t=1}^{T} z_t}{T}}\right) \left(\sum_{t=1}^{T} x_t^2 - \frac{\left(\sum_{t=1}^{T} x_t\right)^2}{T}\right)\right] \tag{3.12}$$

Cuando el instrumento es válido y relevante $\rightarrow \frac{\sum_{t=1}^{T} z_t \epsilon_i}{T} = 0$ y $\frac{\sum_{t=1}^{T} x_t z_t}{T} - \frac{\sum_{t=1}^{T} x_t \sum_{t=1}^{T} z_t}{T^2} \neq 0$, por lo que la ecuación (3.12) queda como:

$$R^2_{VI} = \frac{\beta}{\sum_{t=1}^{T} y_t^2 - \frac{\left(\sum_{t=1}^{T} y_t\right)^2}{T}} \left[2\sum_{t=1}^{T} y_t x_t - 2\frac{\sum_{t=1}^{T} y_t \sum_{t=1}^{T} x_t}{T} - \beta\left(\sum_{t=1}^{T} x_t^2 - \frac{\left(\sum_{t=1}^{T} x_t\right)^2}{T}\right)\right] \tag{3.13}$$

Como se observa, en la ecuación (3.11) y (3.13) son iguales, ya que si el instrumento cumple la condición de relevancia y validez se está corrigiendo plenamente la endogeneidad, y por consecuencia las ecuaciones (3.11) y (3.13) deberían de ser iguales.

Dado el Proceso Generador de Datos (PGD) analizamos la ecuación (3.12) para cada caso.

Consideremos el siguiente PGD:

$$\begin{aligned}
x_t &= \psi_t + \gamma w_t \\
z_t &= \xi_t + \eta \psi_t + \theta \nu_t \\
\epsilon_t &= \nu_t + \kappa w_t \\
y_t &= \alpha + \beta x_t + \epsilon_t
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Caso	η	θ
1.- Instrumento válido y relevante	1	0
2.- Instrumento no válido y relevante	1	1
3.- Instrumentos válidos y no relevante	0	0
4.- Instrumentos no válido y no relevante	0	1

Cuadro 3.1: Proceso Generador de Datos

Analizando este PGD, las ecuaciones que generan x_t, ϵ_t y por tanto y_t son los mismas para cada caso, lo que varia es la forma de generar el instrumento z_t que es el objeto de análisis, puesto que sobre él se deben cumplir las condiciones de relevancia y validez, por lo tanto las siguientes operaciones son válidas para los cuatro casos.

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{t=1}^{T} x_t\right)^2 &= \left(\sum_{t=1}^{T} \psi_t + \gamma_t \sum_{t=1}^{T} w_t\right)^2 \\
&= \left(\sum_{t=1}^{T} \psi_t\right)^2 + 2\gamma_t \sum_{t=1}^{T} \psi_t \sum_{t=1}^{T} w_t + \gamma_t^2 \left(\sum_{t=1}^{T} w_t\right)^2
\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{T} \left(x_t^2\right) &= \sum_{t=1}^{T} \left(\psi_t + \gamma w_t\right)^2 \\
&= \sum_{t=1}^{T} \left(\psi_t\right)^2 + 2\gamma \sum_{t=1}^{T} \psi_t w_t + \gamma^2 \sum_{t=1}^{T} \left(w_t\right)^2
\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{T}\epsilon_t x_t &= \sum_{t=1}^{T}\left(\psi_t+\gamma w_t\right)\left(\nu_t+\kappa w_t\right)\\ &= \sum_{t=1}^{T}\nu_t x_t+\gamma\sum_{t=1}^{T}\nu_t w_t+\kappa\sum_{t=1}^{T}w_t\psi_t+\gamma\kappa\sum_{t=1}^{T}\left(w_t\right)^2\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{T}\epsilon_t\sum_{t=1}^{T}x_t &= \sum_{t=1}^{T}\nu_t+\kappa w_t\sum_{t=1}^{T}\psi_t+\gamma w_t\\ &= \sum_{t=1}^{T}\nu_t\sum_{t=1}^{T}\psi_t+\gamma\sum_{t=1}^{T}\nu_t\sum_{t=1}^{T}w_t+\kappa\sum_{t=1}^{T}w_t\sum_{t=1}^{T}\psi_t+\gamma\kappa\left(\sum_{t=1}^{T}w_t\right)^2\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}y_t\sum_{t=1}^{T}x_t &= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\alpha+\beta x_t+\epsilon_t\right)\sum_{t=1}^{T}x_t\\ &= \alpha\sum_{t=1}^{T}x_t+\frac{\beta}{T}\left(\sum_{t=1}^{T}x_t\right)^2+\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\epsilon_t\sum_{t=1}^{T}x_t\\ &= \alpha\sum_{t=1}^{T}\left(\psi_t+\gamma w_t\right)+\frac{\beta}{T}\left[\sum_{t=1}^{T}\left(\psi_t+\gamma w_t\right)\right]^2+\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\epsilon_t\sum_{t=1}^{T}\left(\psi_t+\gamma w_t\right)\\ &= \alpha\sum_{t=1}^{T}\psi_t+\alpha\gamma\sum_{t=1}^{T}w_t+\frac{\beta}{T}\left[\left(\sum_{t=1}^{T}\psi_t\right)^2+2\gamma_t\sum_{t=1}^{T}\psi_t\sum_{t=1}^{T}w_t+\gamma_t^2\left(\sum_{t=1}^{T}w_t\right)^2\right]\\ &+\frac{1}{T}\left[\sum_{t=1}^{T}\nu_t\sum_{t=1}^{T}\psi_t+\gamma\sum_{t=1}^{T}\nu_t\sum_{t=1}^{T}w_t+\kappa\sum_{t=1}^{T}w_t\sum_{t=1}^{T}\psi_t+\gamma\kappa\left(\sum_{t=1}^{T}w_t\right)^2\right]\\ &= \frac{1}{T}\left(2\beta\gamma+\kappa\right)\sum_{t=1}^{T}\psi_t\sum_{t=1}^{T}w_t+\frac{\gamma}{T}\left(\beta\gamma+\kappa\right)\left(\sum_{t=1}^{T}w_t\right)^2\\ &+\left(\alpha+\frac{\beta\sum_{t=1}^{T}\psi_t}{T}+\frac{\sum_{t=1}^{T}\nu_t}{T}\right)\sum_{t=1}^{T}\psi_t+\gamma\left(\alpha+\frac{\sum_{t=1}^{T}\nu_t}{T}\right)\sum_{t=1}^{T}w_t\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{T} y_t x_t &= \sum_{t=1}^{T} (\alpha + \beta x_t + \epsilon_t) x_t \\ &= \alpha \sum_{t=1}^{T} (\psi_t + \gamma w_t) + \beta \sum_{t=1}^{T} (\psi_t + \gamma w_t) + \sum_{t=1}^{T} \left[(\nu_t + \kappa w_t) (\psi_t + \gamma w_t) \right] \\ &= (2\beta\gamma + \kappa) \sum_{t=1}^{T} \psi_t w_t + \gamma (\beta\gamma + \kappa) \sum_{t=1}^{T} (w_t)^2 + \left(\alpha + \beta \sum_{t=1}^{T} \psi_t \right) \sum_{t=1}^{T} \psi_t + \\ &+ \alpha\gamma \sum_{t=1}^{T} w_t + \sum_{t=1}^{T} \nu_t \psi_t + \gamma \sum_{t=1}^{T} \nu_t w_t \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{T} (y_t)^2 &= \sum_{t=1}^{T} (\alpha + \beta x_t + \epsilon_t)^2 \\ &= \sum_{t=1}^{T} \left(\alpha^2 + \epsilon_t^2 + \beta^2 x_t^2 + 2\alpha\beta x_t + 2\alpha\epsilon_t + 2\beta x_t \epsilon_t \right) \\ &= T\alpha^2 + \left(\kappa^2 + \beta^2\gamma^2 + 2\beta\gamma\kappa \right) \sum_{t=1}^{T} (w_t)^2 + 2(\kappa + \beta\gamma) \sum_{t=1}^{T} \nu_t w_t + 2\beta (\beta\gamma + \kappa) \sum_{t=1}^{T} \psi_t w_t + \\ &+ 2\alpha (\beta\gamma + \kappa) \sum_{t=1}^{T} w_t + 2\beta \sum_{t=1}^{T} \psi_t \nu_t + 2\alpha \left(\beta \sum_{t=1}^{T} \psi_t + \sum_{t=1}^{T} \nu_t \right) + \beta^2 \sum_{t=1}^{T} (\psi_t)^2 + \sum_{t=1}^{T} (\nu_t)^2 \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\left(\sum_{t=1}^{T} y_t\right)^2}{T} &= \frac{1}{T}\left(T\alpha + \beta\sum_{t=1}^{T} x_t + \sum_{t=1}^{T}\epsilon_t\right)^2 \\
&= \frac{1}{T}\left[T^2\alpha^2 + \beta^2\left(\sum_{t=1}^{T} x_t\right)^2 + \left(\sum_{t=1}^{T}\epsilon_t\right)^2 + 2\beta\sum_{t=1}^{T} x_t\sum_{t=1}^{T}\epsilon_t + 2T\alpha\beta\sum_{t=1}^{T} x_t + 2T\alpha\sum_{t=1}^{T}\epsilon_t\right] \\
&= T\alpha^2 + \frac{1}{T}\left(\beta^2\gamma^2 + \kappa^2 + 2\beta\gamma\kappa\right)\left(\sum_{t=1}^{T} w_t\right)^2 + \frac{2\beta}{T}\left(\gamma\beta + \kappa\right)\sum_{t=1}^{T}\psi_t\sum_{t=1}^{T} w_t + \\
&+ \frac{2}{T}\left(\kappa + \gamma\beta\right)\sum_{t=1}^{T}\nu_t\sum_{t=1}^{T} w_t + 2\beta\left(\frac{\beta}{2T}\sum_{t=1}^{T}\psi_t + \frac{\sum_{t=1}^{T}\nu_t}{T} + \alpha\right)\sum_{t=1}^{T}\psi_t + \\
&+ \left(\frac{\sum_{t=1}^{T}\nu_t}{T} + 2\alpha\right)\sum_{t=1}^{T}\nu_t + 2\alpha\left(\beta\gamma + \kappa\right)\sum_{t=1}^{T} w_t
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

Definamos las siguientes variables como la diferencia de las ecuaciones anteriores: $C \equiv (3.21) - (3.22) = \sum_{t=1}^{T}(y_t)^2 - \frac{\left(\sum_{t=1}^{T} y_t\right)^2}{T}$, $D \equiv (3.20) - (3.19) = \sum_{t=1}^{T} y_t x_t - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t \sum_{t=1}^{T} x_t$ y $F \equiv (3.16) - (3.15) = \sum_{t=1}^{T}(x_t^2) - \left(\sum_{t=1}^{T} x_t\right)^2$, las cuales como se mostró, son las mismas para los cuatro casos analizados.

1.- Instrumento válido y relevante

Conociendo que el instrumento cumple las condiciones de validez y relevancia podemos partir de la ecuación (3.13) y remplazando el PGD de z_t se obtiene lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{T} z_t\epsilon_t &= \sum_{t=1}^{T}\left(\xi_t + \eta\psi_t\right)\left(\nu_t + \kappa_t w_t\right) \\
&= \sum_{t=1}^{T}\left(\xi_t\nu_t + \kappa\xi_t w_t + \eta\psi_t\nu_t + \eta\kappa\psi_t w_t\right) \\
&= \sum_{t=1}^{T}\xi_t\nu_t + \kappa\sum_{t=1}^{T}\xi_t w_t + \eta\sum_{t=1}^{T}\psi_t\nu_t + \eta\kappa\sum_{t=1}^{T}\psi_t w_t \equiv A
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{T} x_t z_t &= \sum_{t=1}^{T} \left[\left(\psi_t + \gamma w_t \right) \left(\xi_t + \eta \psi_t \right) \right] \\ &= \sum_{t=1}^{T} \left[\psi_t \xi_t + \eta \left(\psi_t \right)^2 + \gamma w_t \xi_t + \gamma \eta w_t \psi_t \right] \\ &= \sum_{t=1}^{T} \psi_t \xi_t + \eta \sum_{t=1}^{T} \left(\psi_t \right)^2 + \gamma \sum_{t=1}^{T} w_t \xi_t + \gamma \eta \sum_{t=1}^{T} w_t \psi_t\end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} x_t \sum_{t=1}^{T} z_t &= \frac{1}{T} \left[\sum_{t=1}^{T} \left(\psi_t + \gamma w_t \right) \right] \left[\sum_{t=1}^{T} \left(\xi_t + \eta \psi_t \right) \right] \\ &= \frac{1}{T} \left[\sum_{t=1}^{T} \psi_t \sum_{t=1}^{T} \xi_t + \eta \left(\sum_{t=1}^{T} \psi_t \right)^2 + \gamma \sum_{t=1}^{T} w_t \sum_{t=1}^{T} \xi_t + \gamma \eta \sum_{t=1}^{T} w_t \sum_{t=1}^{T} \psi_t \right]\end{aligned} \tag{3.25}$$

Definiendo $B = (3.24) - (3.25) = \sum_{t=1}^{T} x_t z_t - \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} x_t \sum_{t=1}^{T} z_t$ y la $R^2_{VI,1}$ bajo este PGD se puede escribir como:

$$R^2_{VI,1} = \frac{\beta + \frac{A}{B}}{C} \left[2D - \left(\beta + \frac{A}{B} \right) (F) \right] \tag{3.26}$$

2.- Instrumento no válido y relevante

Bajo el PGD de z_t cuando el instrumento es no válido y relevante se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{T} z_t\epsilon_t &= \sum_{t=1}^{T} \left(\xi_t + \eta\psi_t + \theta\nu_t\right)\left(\nu_t + \kappa_t w_t\right) \\
&= \sum_{t=1}^{T} \left(\xi_t\nu_t + \kappa\xi_t w_t + \eta\psi_t\nu_t + \eta\kappa\psi_t w_t + \theta\left(\nu_t\right)^2 + \kappa\theta\nu_t w_t\right) \\
&= \sum_{t=1}^{T} \xi_t\nu_t + \kappa\sum_{t=1}^{T} \xi_t w_t + \eta\sum_{t=1}^{T} \psi_t\nu_t + \eta\kappa\sum_{t=1}^{T} \psi_t w_t + \theta\left(\sum_{t=1}^{T} \nu_t\right)^2 + \kappa\theta\sum_{t=1}^{T} \nu_t w_t
\end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{T} x_t z_t &= \sum_{t=1}^{T} \left[\left(\psi_t + \gamma w_t\right)\left(\xi_t + \eta\psi_t + \theta\nu_t\right)\right] \\
&= \sum_{t=1}^{T} \left[\psi_t\xi_t + \eta\left(\psi_t\right)^2 + \theta\psi_t\nu_t + \gamma w_t\xi_t + \gamma\eta w_t\psi_t + \gamma\theta w_t\nu_t\right] \\
&= \sum_{t=1}^{T} \psi_t\xi_t + \eta\sum_{t=1}^{T} \left(\psi_t\right)^2 + \theta\sum_{t=1}^{T} \psi_t\nu_t + \gamma\sum_{t=1}^{T} w_t\xi_t + \gamma\eta\sum_{t=1}^{T} w_t\psi_t + \gamma\theta\sum_{t=1}^{T} w_t\nu_t
\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t \sum_{t=1}^{T} z_t &= \frac{1}{T}\left[\sum_{t=1}^{T} \left(\psi_t + \gamma w_t\right)\right]\left[\sum_{t=1}^{T} \left(\xi_t + \eta\psi_t + \theta\nu_t\right)\right] \\
&= \frac{1}{T}\left[\sum_{t=1}^{T} \psi_t \sum_{t=1}^{T} \xi_t + \eta\left(\sum_{t=1}^{T} \psi_t\right)^2 + \theta\sum_{t=1}^{T} \psi_t \sum_{t=1}^{T} \nu_t + \gamma\sum_{t=1}^{T} w_t \sum_{t=1}^{T} \xi_t + \right. \\
&\left. \gamma\eta\sum_{t=1}^{T} w_t \sum_{t=1}^{T} \psi_t + \gamma\theta\sum_{t=1}^{T} w_t \sum_{t=1}^{T} \nu_t \right]
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Remplazando los valores de A, B, C, D y F la $R^2_{VI,2}$ bajo este PGD es:

$$R^2_{VI,2} = \frac{\beta + \frac{A+\theta\left[\left(\sum_{t=1}^{T} w_t\right)^2 + \kappa \sum_{t=1}^{T} \nu_t w_t\right]}{B+\theta\{\sum_{t=1}^{T} \psi_t \nu_t + \gamma \sum_{t=1}^{T} w_t \nu_t - \frac{1}{T}\left[\sum_{t=1}^{T} \psi_t \sum_{t=1}^{T} \nu_t + \gamma \sum_{t=1}^{T} w_t \sum_{t=1}^{T} \nu_t\right]}}{C}$$

$$\left[2D - \left(\beta + \frac{A+\theta\left[\left(\sum_{t=1}^{T} w_t\right)^2 + \kappa \sum_{t=1}^{T} \nu_t w_t\right]}{B+\theta\{\sum_{t=1}^{T} \psi_t \nu_t + \gamma \sum_{t=1}^{T} w_t \nu_t - \frac{1}{T}\left[\sum_{t=1}^{T} \psi_t \sum_{t=1}^{T} \nu_t + \gamma \sum_{t=1}^{T} w_t \sum_{t=1}^{T} \nu_t\right]\}}\right)(F)\right] \tag{3.30}$$

3.- Instrumento válido y no relevante

Bajo el PGD de z_t cuando el instrumento es válido y no relevante se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{T} z_t \epsilon_t &= \sum_{t=1}^{T} (\xi_t)(\nu_t + \kappa_t w_t) \\ &= \sum_{t=1}^{T} \xi_t \nu_t + \kappa \sum_{t=1}^{T} \xi_t w_t \end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{T} x_t z_t &= \sum_{t=1}^{T} \left[(\psi_t + \gamma w_t)(\xi_t)\right] \\ &= \sum_{t=1}^{T} \left[\psi_t \xi_t + \gamma w_t \xi_t\right] \\ &= \sum_{t=1}^{T} \psi_t \xi_t + \gamma \sum_{t=1}^{T} w_t \xi_t \end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} x_t \sum_{t=1}^{T} z_t &= \frac{1}{T} \left[\sum_{t=1}^{T} (\psi_t + \gamma w_t)\right] \left[\sum_{t=1}^{T} (\xi_t)\right] \\ &= \frac{1}{T} \left[\sum_{t=1}^{T} \psi_t \sum_{t=1}^{T} \xi_t + \gamma \sum_{t=1}^{T} w_t \sum_{t=1}^{T} \xi_t\right] \end{aligned} \tag{3.33}$$

Realizando el mismo proceso de sustitución de A, B, C, D, F se obtiene el siguiente resultado:

$$R^2_{VI,3} = \frac{\beta + Proceso_3}{C}\left[2D - (\beta + Proceso_3)(F)\right] \tag{3.34}$$

$$Proceso_3 \equiv \frac{A - \eta\left(\sum_{t=1}^{T}\psi_t\nu_t + \kappa\sum_{t=1}^{T}\psi_t w_t\right)}{B - \eta\left\{\sum_{t=1}^{T}(\psi_t)^2 + \gamma\sum_{t=1}^{T}w_t\psi_t - \frac{1}{T}\left[\left(\sum_{t=1}^{T}\psi_t\right)^2 + \gamma\sum_{t=1}^{T}\psi_t\sum_{t=1}^{T}w_t\right]\right\}}$$

4.- Instrumento no válido y no relevante

Analizando el PGD para z_t se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{T} z_t\epsilon_t &= \sum_{t=1}^{T}(\xi_t + \theta\nu_t)(\nu_t + \kappa_t w_t)\\ &= \sum_{t=1}^{T}\left(\xi_t\nu_t + \kappa\xi_t w_t + \theta(\nu_t)^2 + \kappa\theta\nu_t w_t\right)\\ &= \sum_{t=1}^{T}\xi_t\nu_t + \kappa\sum_{t=1}^{T}\xi_t w_t + \theta\left(\sum_{t=1}^{T}\nu_t\right)^2 + \kappa\theta\sum_{t=1}^{T}\nu_t w_t\end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{T} x_t z_t &= \sum_{t=1}^{T}\left[(\psi_t + \gamma w_t)(\xi_t + \theta\nu_t)\right]\\ &= \sum_{t=1}^{T}\left[\psi_t\xi_t + \theta\psi_t\nu_t + \gamma w_t\xi_t + \gamma\theta w_t\nu_t\right]\\ &= \sum_{t=1}^{T}\psi_t\xi_t + \theta\sum_{t=1}^{T}\psi_t\nu_t + \gamma\sum_{t=1}^{T}w_t\xi_t + \gamma\theta\sum_{t=1}^{T}w_t\nu_t\end{aligned} \tag{3.36}$$

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}x_t\sum_{t=1}^{T}z_t = \frac{1}{T}\left[\sum_{t=1}^{T}(\psi_t+\gamma w_t)\right]\left[\sum_{t=1}^{T}(\xi_t+\theta\nu_t)\right]$$
$$= \frac{1}{T}\left[\sum_{t=1}^{T}\psi_t\sum_{t=1}^{T}\xi_t+\theta\sum_{t=1}^{T}\psi_t\sum_{t=1}^{T}\nu_t+\gamma\sum_{t=1}^{T}w_t\sum_{t=1}^{T}\xi_t+\gamma\theta\sum_{t=1}^{T}w_t\sum_{t=1}^{T}\nu_t\right] \tag{3.37}$$

Sustituyendo A, B, C, D, F se obtiene el siguiente resultado:

$$R^2_{VI,4} = \frac{\beta + Proceso_4}{C}\left[2D - (\beta + Proceso_4)(F)\right] \tag{3.38}$$

$$Proceso_4 \equiv \left\{A+\theta\left[\left(\sum_{t=1}^{T}w_t\right)^2+\kappa\sum_{t=1}^{T}\nu_t w_t\right]-\eta\left(\sum_{t=1}^{T}\psi_t\nu_t+\kappa\sum_{t=1}^{T}\psi_t w_t\right)\right\}\left[B+\right.$$
$$\theta\left\{\sum_{t=1}^{T}\psi_t\nu_t+\gamma\sum_{t=1}^{T}w_t\nu_t-\frac{1}{T}\left[\sum_{t=1}^{T}\psi_t\sum_{t=1}^{T}\nu_t+\gamma\sum_{t=1}^{T}w_t\sum_{t=1}^{T}\nu_t\right]\right\}-$$
$$\left.\eta\left\{\sum_{t=1}^{T}(\psi_t)^2+\gamma\sum_{t=1}^{T}w_t\psi_t-\frac{1}{T}\left[\left(\sum_{t=1}^{T}\psi_t\right)^2+\gamma\sum_{t=1}^{T}\psi_t\sum_{t=1}^{T}w_t\right]\right\}\right]^{-1}$$

3.2. R^2 Asintótica

TEOREMA **1.** *Suponga que y_t, x_t, z_t, se generan de acuerdo con las ecuaciones (3.14), con el PGD (3.1) y que $T \to \infty$ entonces:*

1. *Si el instrumento es válido y relevante*

$$R^2 \xrightarrow{D} 1 - \frac{\sigma_\nu\omega_\nu(1)+\kappa^2\sigma_w\omega_w(1)}{\sigma_\nu\omega_\nu(1)+\beta^2\sigma_\psi\omega_\psi(1)+(\beta\gamma+\kappa)^2\sigma_w\omega_w(1)} \tag{3.39}$$

2. *Si el instrumento es No válido y relevante*

$$R^2 \xrightarrow{D} 1 - \left\{\eta^2 \left[\sigma_\psi \omega_\psi (1)\right]^2 \left[\sigma_\nu \omega_\nu (1) + \kappa^2 \sigma_w \omega_w (1)\right] - 2\eta\gamma\kappa\sigma_\nu\omega_\nu (1) \sigma_\psi \omega_\psi (1) \sigma_w \omega_w (1) \theta + \left[\sigma_\nu \omega_\nu (1)\right]^2 \left[\sigma_\psi \omega_\psi (1) + \gamma^2 \sigma_w \omega_w (1)\right] \theta^2\right\} \left\{\eta^2 \left[\sigma_\psi \omega_\psi (1)\right]^2 \left[\sigma_\nu \omega_\nu (1) + \beta^2 \sigma_\psi \omega_\psi (1) + (\beta\gamma + \kappa)^2 \sigma_w \omega_w (1)\right] \right\}^{-1} \tag{3.40}$$

3. *Si el instrumento es válido y no relevante*

$$R^2 \xrightarrow{D} 1 - \left\{\left[\sigma_\nu \sigma_\xi \omega_{\nu\xi} (1)\right]^2 \left[\sigma_\psi \omega_\psi (1) + \gamma^2 \sigma_w \omega_w (1)\right] + \left[\sigma_\psi \sigma_\xi \omega_{\psi\xi} (1) + \gamma \sigma_w \sigma_\xi \omega_{w\xi} (1)\right]^2 \sigma_\nu \omega_\nu (1) + 2\kappa \sigma_\nu \sigma_\xi \omega_{\nu\xi} (1) \left[-\gamma \sigma_\psi \sigma_\xi \omega_{\psi\xi} (1) \sigma_w \omega_w (1) + \sigma_\psi \omega_\psi (1) \sigma_w \sigma_\xi \omega_{w\xi} (1)\right] + \kappa^2 (\left[\sigma_\psi \sigma_\xi \omega_{\psi\xi} (1)\right]^2 \sigma_w \omega_w (1) + \sigma_\psi \omega_\psi (1) \left[\sigma_w \sigma_\xi \omega_{w\xi} (1)\right]^2)\right\} \left\{ \left[\sigma_\nu \omega_\nu (1) + \beta^2 \sigma_\psi \omega_\psi (1) + (\beta\gamma + \kappa)^2 \sigma_w \omega_w (1)\right] \left[\sigma_\psi \sigma_\xi \omega_{\psi\xi} (1) + \gamma \sigma_w \sigma_\xi \omega_{w\xi} (1)\right]^2 \right\}^{-1} \tag{3.41}$$

4. *Si el instrumento es No válido y No relevante*

$$R^2 \xrightarrow{D} 1 - \left\{\left[\sigma_\nu \omega_\nu (1)\right]^2 \left[\sigma_\psi \omega_\psi (1) + \gamma^2 \sigma_w \omega_w (1)\right] \theta^2\right\} \left\{ \left[\sigma_\nu \omega_\nu (1) + \beta^2 \sigma_\psi \omega_\psi (1) + \left[\beta\gamma + \kappa\right]^2 \sigma_w \omega_w (1)\right] \left[\sigma_\psi \sigma_\xi \omega_{\psi\xi} (1) + \theta \sigma_\nu \sigma_\psi \omega_{\nu\psi} (1) + \gamma\theta \left[\sigma_w \sigma_\xi \omega_{w\xi} (1) + \sigma_\nu \sigma_w \omega_{\nu w} (1)\right]\right]^2 \right\}^{-1} \tag{3.42}$$

Derivación: Véase el apéndice el apéndice A.

Como se observa en las ecuaciones anteriores los parámetros γ y κ desde la perspectiva del usuario son no estimables debido a que sólo se conocen los datos x_t, y_t y z_t y no la forma en la que están construidos y desgraciadamente la prueba potencial bajo este PGD no se puede concluir, sin embargo, con motivo de continuar con la investigación asumiremos que son conocidos y supondremos que $\gamma = \kappa = 1$.

La siguientes gráficas muestran la simulación para los 4 casos del teorema (1), bajo el PGD descrito en (3.14). Los parámetros α y β fueron aleatorios para todo el proceso, para los parámetros de validez y relevancia se toman los casos extremos, *i.e.*, 0 o 1 según sea el caso.

La realización del Teorema (1) se muestra en la gráfia (3.1) para una muestra $T = 1000$, $T = 2000$ y $T = 3000$ y 1000 repeticiones.

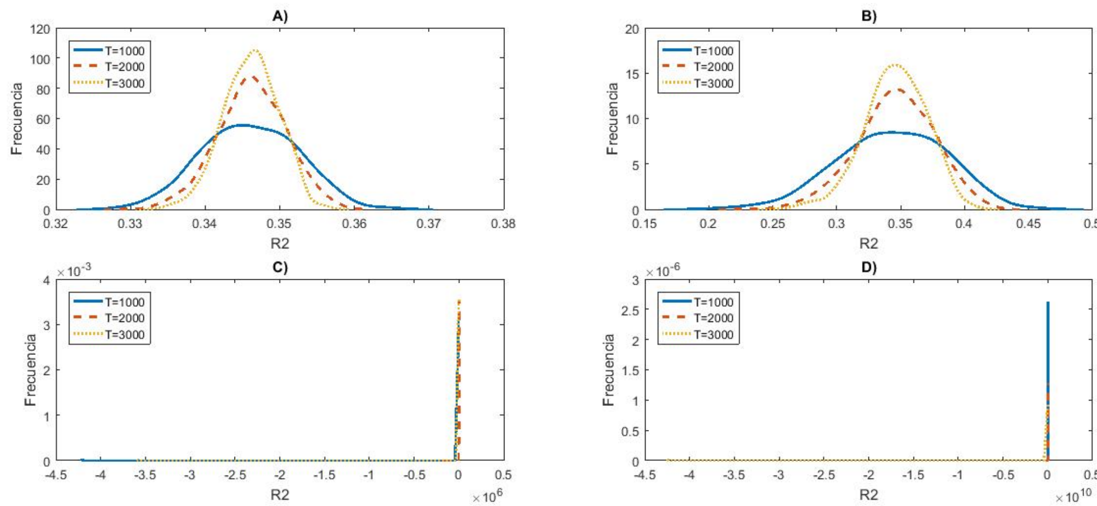

Figura 3.1: Simulación de la R^2 asintótica de VI. A)Instrumento válido y relevante, B) Instrumento no válido y relevante, C) Instrumentos válidos y no relevante, D) Instrumentos no válido y no relevante.

Bajo los mismos parámetros de α y β pero ahora con una muestra mayor la realización de la R^2 asintótica se comporta como en la gráfica (3.2).

Como se observa en las gráficas (3.1) y (3.2) la R^2 de VI para los casos de instrumentos no relevantes $R^2 \xrightarrow{D} 0$, por lo tanto, instrumentos no relevantes tendrán una $R^2 \approx 0$, como también se muestra en las gráficas anteriores, discriminar entre el caso de validez y relevancia del instrumento y cuando el instrumento es relevante pero no válido tiene mayor dificultad.

Como se observa en la gráfica (3.3) la velocidad de convergencia entre los casos de validez y relevancia del instrumento y relevante pero no válido son distintas lo que implica que tengan

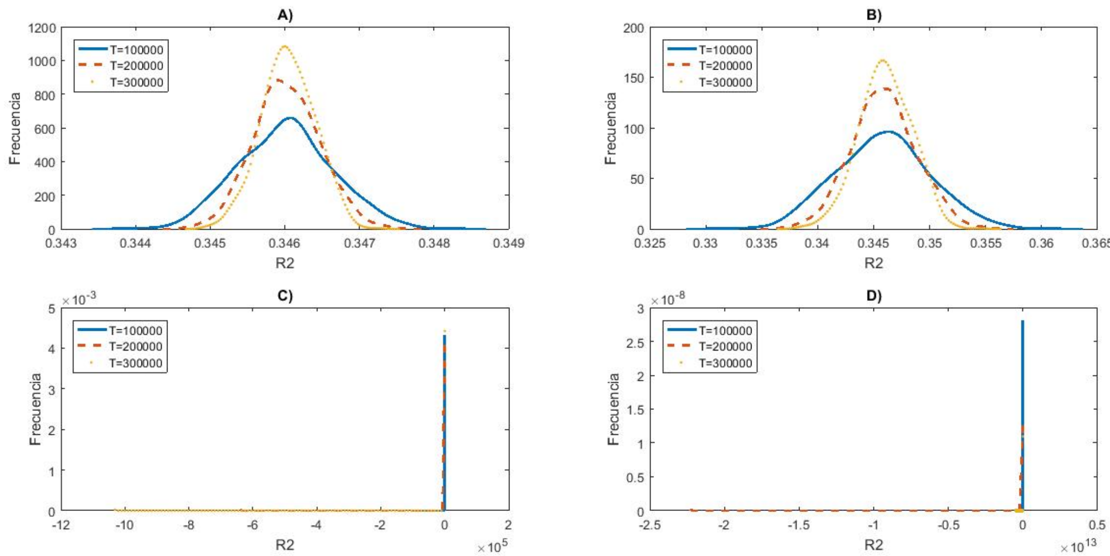

Figura 3.2: Simulación de la R^2 asintótica de VI. A)Instrumento válido y relevante, B) Instrumento no válido y relevante, C) Instrumentos válidos y no relevante, D) Instrumentos no válido y no relevante.

distinta varianza. Si el instrumento es válido y relevante la varianza de la R^2 es menor comparada contra la varianza de la R^2 cuando el instrumento es relevante pero no válido.

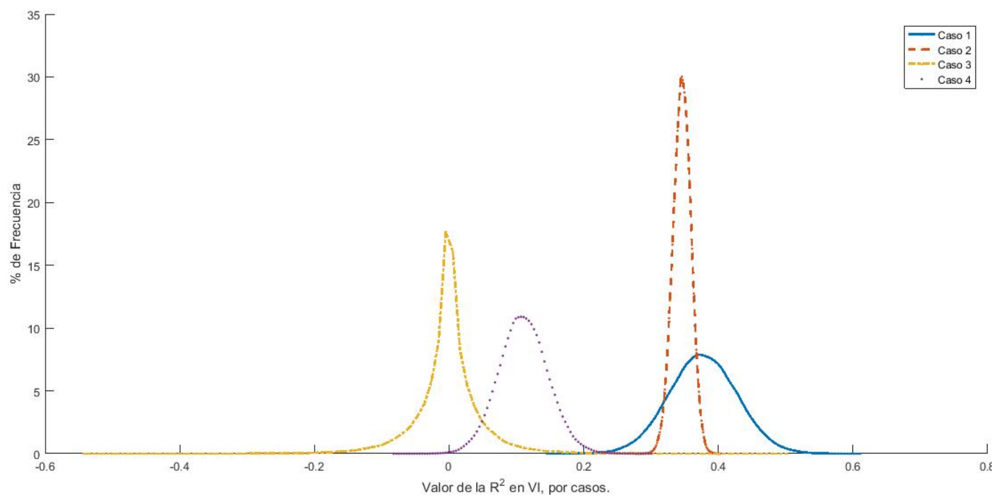

Figura 3.3: Distribución de la R^2 en VI, Caso 1: Instrumento válido y relevante, caso 2: Instrumento no válido y relevante, caso 3:Instrumentos válidos y no relevante, caso 4: Instrumentos no válido y no relevante.

Capítulo 4

Prueba de hipótesis:

Es necesario definir qué se entiende por Error tipo I, Error tipo II y potencia del contraste con el fin de hacer uso de éstos en la prueba de hipótesis y poder determinar cuál es la tasa de rechazo de la hipótesis nula en cada uno de los casos analizados. Las siguientes tres definiciones son tomadas de Greene (2003, p. 139).

DEFINICIÓN **3.** *Error tipo I:* Rechazar la hipótesis nula siendo verdadera.

DEFINICIÓN **4.** *Error tipo II:* No rechazar la hipótesis nula siendo falsa.

DEFINICIÓN **5.** *Potencia del contraste* Probabilidad de que el nivel de significancia α conduzca correctamente a rechazar la hipótesis nula cuando es falsa.

$$potencia = 1 - \beta = 1 - Prob\,(Error\ tipo\ II) \tag{4.1}$$

4.0.1. Prueba de hipótesis sobre la R^2 asintótica de VI.

Para contrastar Ha: $R^2_{VI} = R^2_i$ donde $i = 2, 3, 4$ son los casos con problemas de estimación y descritos en el teorema 1 y Ho:$R^2_{real} = R^2_1$. En este caso se hará el caso 2, en el que el instrumento es no válido pero relevante por tratarse del que presenta mayor dificultad en el análisis.

Tomando la ecuación asintótica se realizó la siguiente simulación y ordenando los datos se obtienen los valores críticos al $10\,\%$, $5\,\%$y $1\,\%$, los resultados se muestran en la tabla (4.2).

Valores críticos asintóticos bajo la prueba de una cola		
Cola inferior		Cola superior
$\alpha = 1\,\%$	0.25951	0.49636
$\alpha = 5\,\%$	0.29466	0.46048
$\alpha = 10\,\%$	0.31304	0.44179
Valores críticos asintóticos bajo la prueba de dos colas		
Cola inferior		Cola superior
$\alpha = 1\,\%$	0.24663	0.50961
$\alpha = 5\,\%$	0.27844	0.47663
$\alpha = 10\,\%$	0.29466	0.46048

Cuadro 4.1: Valores críticos asintóticos bajo la simulación asintótica con el Instrumento válido y relevante

Prueba Asintótica de una cola (inferior de Ho: Instrumento válido y relevante)		
Nivel de significancia	Instrumentos válido y no relevante	Instrumento No válido y no relevante
$\alpha = 1\,\%$	99.924 %	99.99 %
$\alpha = 5\,\%$	99.973 %	100 %
$\alpha = 10\,\%$	99.985 %	100 %

Cuadro 4.2: Tasas de no rechazo de la Ho.

Como se puede observar en el cuadro anterior, tomando los valores asintóticos en dos de los cuatro casos la potencia es suficientemente alta ya que sólo se puede cometer el error tipo I en un porcentaje muy pequeño (menos del 1 %) a un nivel de significancia de 1 %, esto se puede confirmar por el hecho de que la R^2 en VI converge a 0, como se describe en el teorema (1), en los casos 3 y 4, que a su vez tienen un elemento en común y es el hecho de que el instrumento sea no relevante, por tanto se puede discriminar cuando el instrumento es no relevante.

El cuadro (4.3) nos muestra las tasas de no rechazo de la hipótesis nula para muestras de 100, 200 y 300 observaciones y por tanto también la probabilidad de cometer el error tipo I, para muestras de este tamaño es concluyente que se puede discriminar entre instrumentos no relevantes y relevantes dado el valor de la R^2 de la segunda etapa del método de variables instrumentales.

	Instrumento válido y relevante			Instrumento válido y no relevante		
Tamaño de muestra	$\alpha = 1\,\%$	$\alpha = 5\,\%$	$\alpha = 10\,\%$	$\alpha = 1\,\%$	$\alpha = 5\,\%$	$\alpha = 10\,\%$
100	0.018	0.089	0.215	0	0.001	0.002
200	0.022	0.194	0.412	0	0	0
300	0	0.001	0.013	0	0	0
	Instrumento no válido y relevante			Instrumento no válido y no relevante		
	$\alpha = 1\,\%$	$\alpha = 5\,\%$	$\alpha = 10\,\%$	$\alpha = 1\,\%$	$\alpha = 5\,\%$	$\alpha = 10\,\%$
100	$99.995\,\%$	$99.999\,\%$	$99.999\,\%$	$100\,\%$	$100\,\%$	$100\,\%$
200	$100\,\%$	$99.999\,\%$	$99.999\,\%$	$100\,\%$	$100\,\%$	$100\,\%$
300	$99.992\,\%$	$100\,\%$	$100\,\%$	$100\,\%$	$100\,\%$	$100\,\%$

Cuadro 4.3: Tasa de no rechazo de la Ho.

Capítulo 5

Extensión a un modelo multivariado

Una de las preguntas naturales es qué sucede en casos de más de una variable explicativa, al igual que en el modelo bivariado presentado en el desarrollo de este trabajo, suponemos que la variable con problemas de endogeneidad es x y existen otras variables explicativas H donde $H = h_1, h_2, ..., h_l$, es decir una matriz de Txl, así el modelo a estimar por variables instrumentales es el siguiente:

$$y_t = \alpha + \beta x_t + \delta H + \epsilon_t \tag{5.1}$$

Nuevamente como en el caso bivariado el instrumento es z, de igual forma en que en el caso bivariado si el instrumento es no relevante $\hat{x} = \bar{x}$, por lo tanto el modelo anterior queda como:

$$y_t = \zeta + \delta H + \epsilon_t \tag{5.2}$$

donde: $\zeta = \alpha + \beta\bar{x}$, así se puede mostrar que la R^2_{VI} de la segunda etapa del modelo 5.1 es igual a la $R^2_{sin\ x}$ del modelo estimado sin la variable con endogeneidad x, por lo tanto se cumple que:

$$R^2_{VI} - R^2_{sin\ x} \xrightarrow{D} 0 \tag{5.3}$$

y por tanto se puede discriminar entre instrumentos relevantes y no relevantes aun en modelos multivariados. Sin embargo, se puede conjeturar que con instrumentos relevantes para discriminar entre validez y no validez no es posible discriminar entre validez y no validez (caso 1 y caso2).

Conclusiones

Como se planteo en la parte introductoria de este trabajo y en la hipótesis, el objetivo principal versa sobre la selección entre modelos estimados por el método de variables instrumentales. Ante ello, se presentó un modelo bivariado que mediante las especificaciones adecuadas nos permitió establecer las condiciones sobre relevancia y validez del instrumento dado que existía endogeneidad en la variable explicativa.

De acuerdo con el teorema 1 y las simulaciones de la R^2 asintótica del modelo de variables instrumentales es concluyente en los siguientes casos:

1. El instrumento es válido y no relevante (caso3) $R^2 \xrightarrow{D} 0$
2. El instrumento es no válido y no relevante (caso4) $R^2 \xrightarrow{D} 0$
3. Cuando el instrumento es relevante es más difícil, distinguir entre validez y no validez del instrumento através de la R^2
4. La varianza de la R^2 con instrumentos relevantes y válidos es menor que cuando el instrumento es relevante y no válido.

Por lo tanto para el caso de instrumentos no relevantes se puede rechazar la hipótesis nula 1.2.1 planteada en este trabajo.

Apéndice A

Código mathematica: R^2 asintótica de VI

Sea h_t y q_t dos ruidos blancos $i.i.d.N\left(0,\sigma_h^2\right)$ y $i.i.d.N\left(0,\sigma_q^2\right)$ respectivamente y considere las siguientes especificaciones: $Sh=\sum_{t=1}^{T}h_t$, $Sh2=\sum_{t=1}^{T}h_t^2$, $Shq=\sum_{t=1}^{T}h_tq_t$, además los factores de convergencia para cada caso son los siguientes:

$$\frac{\sum_{t=1}^{T}h_t}{T^{\frac{1}{2}}}\xrightarrow{d}N\left(0,\sigma_h^2\right)\sim\sigma_h\omega_h(1)$$

$$\frac{\sum_{t=1}^{T}h_t^2}{T}\xrightarrow{d}N\left(0,\sigma_h^2\right)\sim\sigma_h\omega_h(1)$$

$$\frac{\sum_{t=1}^{T}h_tq_t}{T^{\frac{1}{2}}}\xrightarrow{d}N\left(0,\sigma_h^2\sigma_q^2\right)\sim\sigma_h\sigma_q\omega_{hq}(1)$$

Por tanto, cada factor T^x que acompaña a las sumas del siguiente código es el factor de convergencia de cada suma.

```
Clear["Global`*"]
Sx=T^(1/2)*Spsi+T^(1/2)*gamma*Sw;
Sz=T^(1/2)*Sxi+T^(1/2)*eta*Spsi+T^(1/2)*theta*Snu;
Se=T^(1/2)*Snu+T^(1/2)*kappa*Sw;
Sy=T*alpha+beta*Sx+Se;
```

```
Sez=T^(1/2)*Snuxi+T^(1/2)*kappa*Swxi+T^(1/2)*eta*Snupsi+T^(1/2)
    *kappa*eta*Swpsi+T*theta*Snu2+T^(1/2)*kappa*theta*Snuw;
Sxz=T^(1/2)*Spsixi+T*eta*Spsi2+T^(1/2)*theta*Snupsi+T^(1/2)*
    gamma*Swxi+T^(1/2)*gamma*eta*Swpsi+T^(1/2)*gamma*theta*Snuw;
Sxe=T^(1/2)*Snupsi+T^(1/2)*gamma*Snuw+T^(1/2)*kappa*Swpsi+T*
    gamma*kappa*Sw2; (*3.16*)
Sx2=T*Spsi2+T^(1/2)*2*gamma*Swpsi+T*gamma^2*Sw2;    (*3.15*)
Se2=T*Snu2+T^(1/2)*2*kappa*Snuw+T*kappa^2*Sw2;
Sy2=T*alpha^2 +T*(kappa^2+beta^2*gamma^2 + 2*beta*gamma*kappa)*
    Sw2 +T^(1/2)*2*(kappa +beta*gamma)*Snuw+2*T^(1/2)*beta*(beta
    *gamma+kappa)*Swpsi +T^(1/2)*2*alpha*(beta*gamma+kappa)*Sw+T
    ^(1/2)*2*beta*Snupsi+T^(1/2)*2*alpha*(beta*Spsi+Snu)+T*beta
    ^2*Spsi2+T*Snu2;(*3.20*)
Syz=alpha*Sz+beta*Sxz+Sez;
Syx=alpha*Sx+beta*Sx2+Sxe;

Myz=(Sy
      Syz);
Mxx=(T   Sx
     Sx  Sx2);
Mzx=(T   Sx
     Sz  Sxz);
Mxz=(T   Sz
     Sx  Sxz);
Mxe=(Se
     Sxe);
Mze=(Se
```

```
        Sez);
Mee=(Se2); (*e'e*)
Mex=Transpose[Mxe]; Mez=Transpose[Mze];
iMzx=Inverse[Mzx];iMxz=Inverse[Mxz];
Mb=iMxz.Myz;
alphahat=Extract[Mb,{1,1}];
betahat=Extract[Mb,{2,1}];
SRE=Mee-2Mex.iMzx.Mze+Mez.iMxz.Mxx.iMzx.Mze;
FACR=SRE/(Sy2-Sy*Sy/T);
k1=Exponent[FACR,T];
RFACTOR=FullSimplify[Limit[Expand[FACR/T^k1],T->Infinity]]
```

Apéndice B

Código Matlab: Simulaciones de las ecuaciones asintóticas

```
clear all;
% y_t = alpha + beta*x_t + e_t
% x_t = psi_t + gamma*w_t
% e_t = nu_t + kappa*w_t
% z_t = xi_t + eta*psi_t + theta*nu_t

t=[300000 20 30 40 50]; %Tamano de muestra
C=1000; %Repeticiones
h=length(t);
R1=zeros(C,h);
R2=zeros(C,h);
R3=zeros(C,h);
R4=zeros(C,h);
%Parametros de inicio
gamma=1;            % randn
```

```
kappa=1;            % randn
eta=1;              %Relevancia de Z
theta=1;            %Validez de Z
alpha=.2747; %rand;        % randn
beta=.3827; %rand;         % randn
for j=1:h
T=t(j);
for i=1:C
    %PGD
    psi = randn(T,1);
    w = randn(T,1);        % normal ya que es parte de e
    nu = randn(T,1);       % normal ya que es parte de e
    xi   = randn(T,1);
    x = psi + gamma*w;
    e = nu + kappa*w;
    y=alpha + beta*x + e;
%Estableciendo las sumas
Spsi2= psi'*psi;
Sw2 =    w'*w;
Snu2= nu'*nu;
Spsi= sum(psi);
Swpsi=w'*psi;
Snupsi= nu'*psi;
%Spsinu=nu'*psi;
Snuw=nu'*w;
%Swnu=nu'*w;
Sxinu=xi'*nu;
```

```
Spsixi = psi'*xi;
%Sxiw =xi'*w;
Swxi=xi'*w;
Snuxi=xi'*nu;
Sxi=sum(xi);
Snu = sum(nu);
Sw= sum(w);
%CASO 1 Instrumento valido y relevante
R1(i,j)=1-(Snu2 + Sw2*kappa^2)/(Snu2 + beta^2*Spsi2 + ((beta*
    gamma + kappa)^2)*Sw2);
%CASO 2 Instrumento no valido y relevante
R2(i,j)=1-(eta^2*Spsi2^2*(Snu2 + kappa^2*Sw2) - 2*eta*gamma*
    kappa*Snu2*Spsi2*Sw2*theta + Snu2^2*(Spsi2 + gamma^2*Sw2)*
    theta^2)/(eta^2*Spsi2^2*(Snu2 + beta^2*Spsi2 + (beta*gamma +
     kappa)^2*Sw2));
%CASO 3 Instrumentos validos y no relevante
R3(i,j)=1-(Snuxi^2*(Spsi2 + gamma^2*Sw2) + Snu2*(Spsixi + gamma
    *Swxi)^2 + 2*kappa*Snuxi*(-gamma*Spsixi*Sw2 + Spsi2*Swxi) +
     kappa^2*(Spsixi^2*Sw2 + Spsi2*Swxi^2))/((Snu2 + beta^2*
    Spsi2 + (beta*gamma + kappa)^2*Sw2)*(Spsixi + gamma*Swxi)^2)
    ;
%CASO 4 Instrumentos no valido y no relevante
R4(i,j)=1-(Snu2^2*(Spsi2 + gamma^2*Sw2)*theta^2)/((Snu2 + beta
    ^2*Spsi2 + (beta*gamma + kappa)^2*Sw2)*(Spsixi + Snupsi*
    theta + gamma*(Swxi + Snuw*theta))^2);
end
hold on
```

```
K1=R1(1:C,j);             %Obtenemos el vector de R2s
[f1,K1]=ksdensity(K1);   %CASO 1 Instrumento valido y relevante
subplot(2,2,1)
plot(K1,f1,'.','LineWidth', 2)
 title('A)')
 xlabel('R2')
 ylabel('Frecuencia')
legend(['T=' num2str(T)])
K2=R2(1:C,j);
hold on
[f2,K2]=ksdensity(K2); %CASO 2 Instrumento no valido y
    relevante
subplot(2,2,2)
plot(K2,f2,'.','LineWidth', 2)
 title('B)')
 xlabel('R2')
 ylabel('Frecuencia')
K3=R3(1:C,j);
hold on
[f3,K3]=ksdensity(K3); %CASO 3 Instrumentos validos y no
    relevante
subplot(2,2,3)
plot(K3,f3,'.','LineWidth', 2)
 title('C)')
 xlabel('R2')
 ylabel('Frecuencia')
K4=R4(1:C,j);
```

```
hold on
[f4 ,K4]=ksdensity(K4); %CASO 4 Instrumentos no valido y no
    relevante
subplot(2,2,4)
plot(K4,f4,'.','LineWidth', 2)
 title('D)')
 xlabel('R2')
 ylabel('Frecuencia')
end
```

Apéndice C

Gráficas de la distribuciones de la R^2 de VI con distintos tamaños de muestra

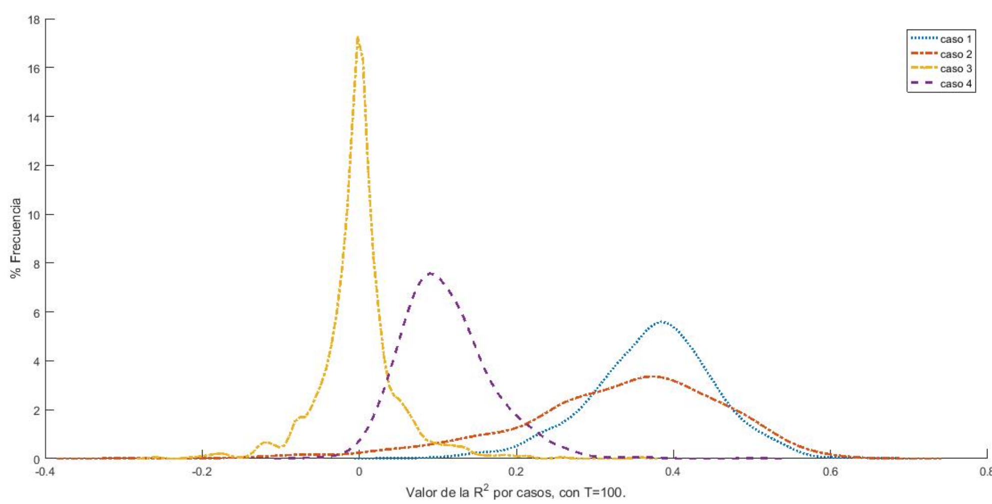

Figura C.1: Distribución de la R^2 en VI, $T = 100$, Caso 1: Instrumento válido y relevante, caso 2: Instrumento no válido y relevante, caso 3:Instrumentos válidos y no relevante, caso 4: Instrumentos no válido y no relevante.

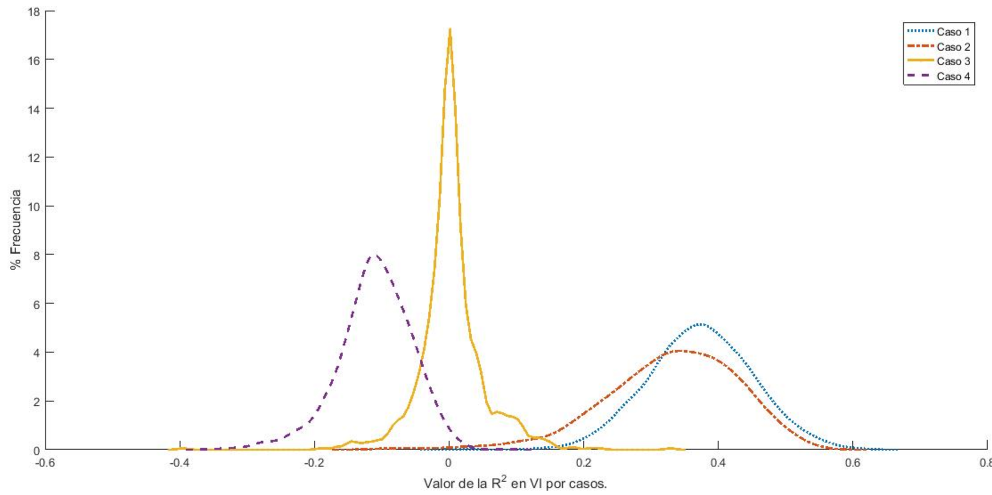

Figura C.2: Distribución de la R^2 en VI, $T = 200$, Caso 1: Instrumento válido y relevante, caso 2: Instrumento no válido y relevante, caso 3:Instrumentos válidos y no relevante, caso 4: Instrumentos no válido y no relevante.

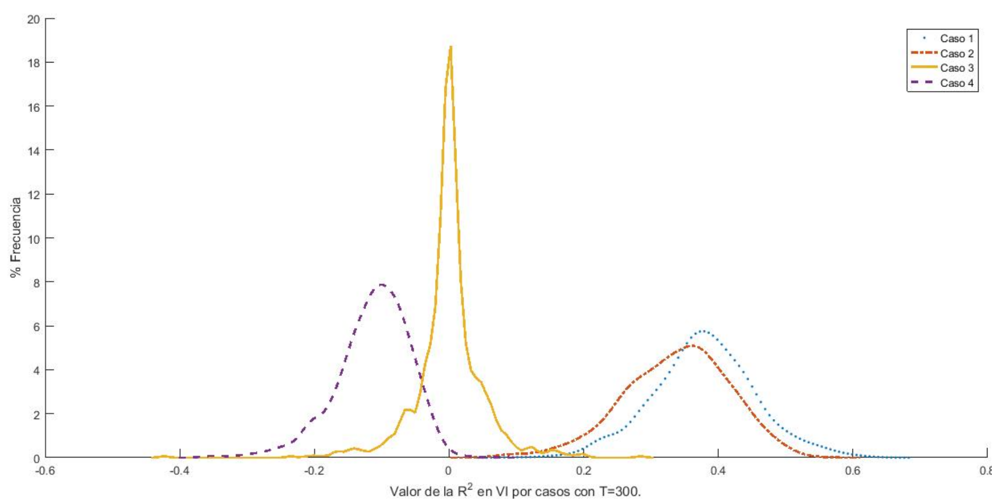

Figura C.3: Distribución de la R^2 en VI, $T = 300$, Caso 1: Instrumento válido y relevante, caso 2: Instrumento no válido y relevante, caso 3:Instrumentos válidos y no relevante, caso 4: Instrumentos no válido y no relevante.

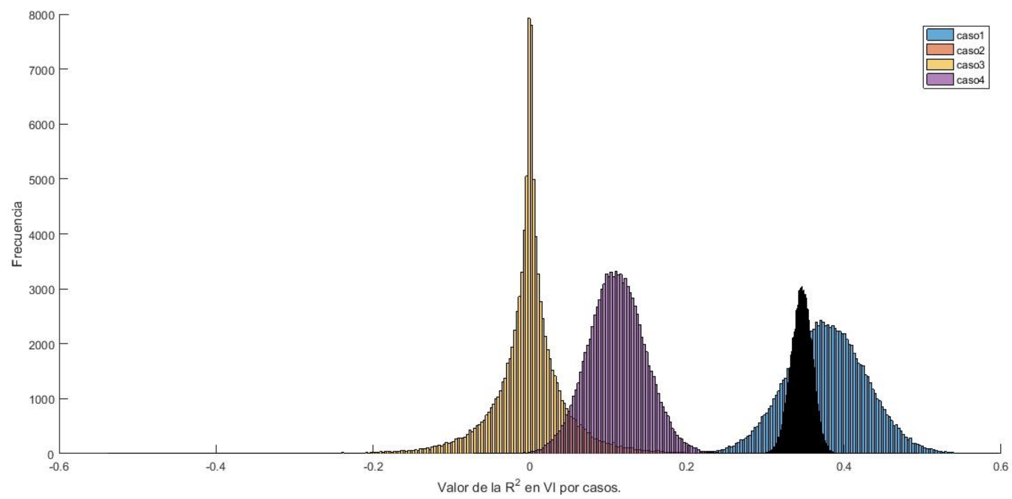

Figura C.4: Histograma de la R^2 en VI asintótico, Caso 1: Instrumento válido y relevante, caso 2: Instrumento no válido y relevante, caso 3:Instrumentos válidos y no relevante, caso 4: Instrumentos no válido y no relevante.

Referencias

Bound, Jaeger, D., y Baker, R. (1995). "Problems with instrumental variables estimation when the correlation between the instruments and the endogenous explanatory variable is weak." *Journal of the American Statistical Association*, *90*(430).

Chavez-Juárez, F. W. (2017). "Notas de clase: Microeconometría." [Manual de software informático].

Greene, W. (2003). *Econometic analisys* (R. Banister, Ed.). Pretice Hall.

Murray, M. P. (2006a). "Avoiding invalid instruments and coping with weak instruments." *Journal of economics perspectives.*, *20*(4), 111-132.

Murray, M. P. (2006b). *Econometrics a modern introduction* (D. Clinton, Ed.). Pearson.

Nelson, C. R., y Startz, R. (1988). "The distribution of the instrumental variables estimator and its t-ratio when the instrument is a poor one." *National Bureau of economic research*.

Pesaran, H., y Smith, R. (1994, mayo). "A generalized r^2 criterion for regression models estimated by the instrumental variables method." *Econometrica*, *62*(2), 705-710.

Reiers∅l, O. (1945). "Confluence analisys by means of sets of instrumental variables." *Econometrica*.

Sargan, J. D. (1958). "The estimation of economic relationships using instrumental variables." *Econometrica*, *26*, 393-415.

Theil, H. (1961). *Economic forecasts and policy*. North-Holland.

White, H. (2001). *Asymptotic theory for econometricians*. Emerald.