

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DOCENCIA ECONÓMICAS, A.C.**



**UNA APLICACIÓN EMPÍRICA DEL MÉTODO  
CONSISTENTE DE RESTRICCIONES CONDICIONALES  
DE MOMENTOS**

**T E S I N A**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:**

**MAESTRO EN ECONOMÍA**

**PRESENTA**

**JORGE LUIS PÉREZ OLEA**

**DIRECTOR DE LA TESINA  
DR. RODOLFO SÓCRATES CERMEÑO BAZÁN**

**MÉXICO, D.F. MAYO 2013**



# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Marco teórico</b>	<b>4</b>
2.1. La paridad de las tasas de interés . . . . .	4
2.2. Expectativas y eficiencia . . . . .	5
2.3. Eficiencia Especulativa . . . . .	6
2.4. Una exploración de la anomalía de la tasa <i>forward</i> en los mercados de divisas	11
<b>3. Estimadores</b>	<b>15</b>
3.1. El método generalizado de momentos . . . . .	15
3.2. El método de restricciones condicionales de momentos . . . . .	17
<b>4. Datos</b>	<b>21</b>
<b>5. Simulación</b>	<b>22</b>
<b>6. Estimación</b>	<b>25</b>
<b>7. Conclusiones</b>	<b>27</b>

# 1. Introducción

En muchas áreas de la ciencia económica, como la macroeconomía y las finanzas, existen modelos definidos en términos de las restricciones condicionales de momentos. Estos modelos involucran ciertas funciones paramétricas con media condicional igual a cero cuando se evalúan en el valor "real" del parámetro. Comúnmente las condiciones implican que el valor esperado de las funciones paramétricas evaluadas en el valor real, multiplicadas por una función que depende de las variables condicionales es igual a cero. Así, cuando las variables condicionantes tienen un soporte de cardinalidad infinita, las restricciones condicionales de momentos implican un número infinito de restricciones incondicionales de momentos.

El trabajo que se desarrolla aquí hace uso del modelo de la estructura de las tasas de interés desarrollado por Bansal (1997) y lo estima por dos vías: la del método generalizado de momentos (GMM), desarrollado por Hansen y Singleton (1982) y a través del método de restricciones condicionales de momentos (CMM) desarrollado por Domínguez y Lobato (2004). La finalidad del trabajo es hacer un contraste entre los dos métodos de estimación para distintos periodos de tiempo e identificar las diferencias entre un método de estimación que incorpora elementos arbitrarios propuestos por el estimador y un método de estimación que permite la identificación global de los parámetros.

Para realizar dicho contraste, primero se generan procesos para realizar cuatro simulaciones, con 50, 100, 200 y 400 observaciones. Las simulaciones presentadas constan de 1000 repeticiones cada una. La comparación entre estimadores se hará por tres vías: el sesgo, el error cuadrático medio y la normalidad de los residuos. Posteriormente, se procederá a realizar dos estimaciones con datos de tasas de interés libres de riesgo para Certificados de la Tesorería (CETES) y Treasury Bills (T-Bills). La diferencia entre las estimaciones se basa en la volatilidad y en el tamaño de muestra. La comparación entre estos estimadores se hace por dos vías: varianza del estimador y la predicción intra-muestra (condición de ortogonalidad).

Como se sabe, la estimación por GMM consiste en dos etapas:

- i) Elegir un número finito de restricciones incondicionales de momentos de entre un número infinito de restricciones.
- ii) Definir el estimador como aquel valor del parámetro que hace que los análogos empíricos de los momentos incondicionales seleccionados sean lo más cercano posible a cero.

El método GMM provee estimadores consistentes en el caso de modelos lineales; sin embargo, para el caso de modelos no lineales, las restricciones incondicionales seleccionadas pueden satisfacerse para distintos valores de parámetros, aún a pesar de que las restricciones condicionales se satisfagan para un solo valor. Esto implica que la función objetivo puede tener distintos mínimos globales.

Para ejemplificar este hecho supongamos la existencia de una variable aleatoria  $Y$  que satisface  $E(Y|X) = X^{\theta_0}$  con  $\theta_0 = 4$ , el valor real del parámetro, y donde  $X$  es una variable aleatoria simétrica alrededor del cero cuyos cuarto y sexto momento son idénticos, como en una distribución normal con media cero y varianza  $1/5$ . Asumiendo que el investigador especifica correctamente el modelo  $E(Y|X) = X^\theta$  con  $\theta \in \Theta = [2, \infty)$  y desea estimar  $\theta_0$ . El modelo implica que  $E[(Y - X^{\theta_0})g(X)] = 0$  para cualquier  $g$  siempre que  $E[(Y - X^{\theta_0})g(X)] < \infty$ . Asumiendo que el investigador propone como instrumentos a 1 y a  $X$ , surge un problema dado que estos instrumentos no identifican el valor del parámetro  $\theta_0 = 4$ , ya que el sistema de ecuaciones  $E(Y - X^\theta) = E((Y - X^\theta)X) = 0$  se resuelve también para el valor de  $\theta = 6$ . Este ejemplo ilustra cómo el procedimiento arbitrario de selección de instrumentos puede conducir a una estimación que no garantice la identificación global de los parámetros.

El trabajo está estructurado de la siguiente manera: en la sección 2 se establece el marco teórico para estudiar la anomalía de la tasa *forward*, incluyendo el modelo de Bansal (1997). En la sección 3 se detallan los modelos GMM y CMM. En la sección 4 se presenta la estadística descriptiva de los datos. En la sección 5 se presentan simulaciones para contrastar el sesgo, el error cuadrático medio y la capacidad predictiva entre ambos estimadores. En la sección 6 se presentan las estimaciones por ambos métodos y el contraste entre estos. Finalmente la sección 7 presenta las conclusiones.

## 2. Marco teórico

### 2.1. La paridad de las tasas de interés

La paridad de las tasas de interés es una condición de no arbitraje que relaciona las tasas de interés con el tipo de cambio. Esta condición afirma que los retornos que un inversionista obtiene de adquirir un instrumento financiero denominado en moneda extranjera, y cubrirse mediante un *forward*, deben igualar a los retornos de comprar un instrumento financiero similar en la moneda del país de origen. En otras palabras, el diferencial entre el tipo de cambio *spot* y la tasa *forward* debe incorporar la diferencia entre las tasas de interés. Existen dos versiones de esta condición: la paridad cubierta de las tasas de interés y la paridad descubierta de las tasas de interés.

La paridad cubierta de las tasas de interés afirma que el diferencial de las tasas de interés entre activos financieros similares y con la misma madurez, denominados en distintas monedas, debe ser igual al costo de cubrir el riesgo cambiario en el mercado del *futuro*, es decir:

$$\frac{F_t - S_t}{S_t} = r_t - r_t^* \quad (1)$$

donde  $S_t$  es el tipo de cambio *spot* en el tiempo  $t$ ;  $r_t$  y  $r_t^*$  las tasas de interés nominal del país de origen y el país extranjero respectivamente, y  $F_t$  es la tasa *forward* del mismo plazo residual<sup>1</sup> que los activos. La primera formulación de esta hipótesis se encuentra en el trabajo de Keynes (1923).

La paridad descubierta de las tasas de interés, asume que:

$$\frac{E_t[S_{t+1}] - S_t}{S_t} = r_t - r_t^* \quad (2)$$

---

<sup>1</sup>El término plazo residual se usa como traducción a *term to maturity*

donde  $E_t[\cdot]$  es el valor esperado, condicional a la información disponible en el periodo  $t$ .

## 2.2. Expectativas y eficiencia

En la determinación del valor de la moneda, la incorporación de las expectativas y de la eficiencia es fundamental, debido a que, si los mercados de divisas son eficientes, estos deberían de reflejar toda la información disponible de los agentes, a través de los precios de las monedas. Si se toma la ecuación (1) y se suma y resta  $S_{t+1}/S_t$  del lado izquierdo de la ecuación, tenemos:

$$\frac{F_t - S_{t+1} + S_{t+1} - S_t}{S_t} = r_t - r_t^*.$$

Tomando  $E_t$  y reacomodando términos:

$$\frac{F_t - E_t[S_{t+1}]}{S_t} + \frac{E_t[S_{t+1} - S_t]}{S_t} = r_t - r_t^*.$$

Si se considera un inversionista en México, que compra un *forward* (dólares americanos) en el periodo  $t$ , asegura  $F_t$  dólares en el periodo  $t + 1$ , por cada peso en el periodo  $t + 1$ , mientras que se compromete a pagar  $S_{t+1}$  dólares por cada peso. De llevarse a cabo esta transacción, las ganancias del inversionista serían  $F_t - S_{t+1}$  por cada peso en el contrato.

Si los agentes son neutrales al riesgo, entonces las expectativas indicarían que  $F_t = E_t[S_{t+1}]$ . Ante este supuesto, se da la equivalencia entre la paridad cubierta de las tasas de interés y la paridad descubierta. A este resultado, se le conoce como la hipótesis de la eficiencia en los mercados.<sup>2</sup>

Los modelos que buscaban probar las hipótesis de eficiencia de los mercados, tuvieron su auge en los setenta con el trabajo de Frenkel (1976). El autor hace un examen utilizando el

---

<sup>2</sup>market efficiency hypothesis

siguiente modelo:

$$\log S_{t+1} = a + b \log F_t + u \quad (3)$$

$$E_t[u] = 0.$$

Este modelo carecía de capacidad explicativa, debido a que solo funcionaba para datos de periodos con inflación elevada. Las hipótesis utilizadas para probar la eficiencia serían, naturalmente, que el término  $a$  no sea significativamente distinto de cero y que el término  $b$  no sea significativamente distinto de uno. Trabajos posteriores, como el de Bilson (1981) abandonaron el enfoque de las expectativas racionales y abordan la hipótesis de la eficiencia especulativa, que hace uso de una prima para evaluar la eficiencia de los mercados.

### 2.3. Eficiencia Especulativa

Se introducen dos conceptos para el desarrollo del trabajo:

- i) Se define la depreciación del tipo de cambio como:

$$d_t \equiv \log(S_{t+1}) - \log(S_t). \quad (4)$$

- ii) Se define la prima de la tasa *forward* como:

$$z_t \equiv \log(F_t) - \log(S_t). \quad (5)$$

Una gran cantidad de trabajos abordaron la hipótesis de la eficiencia especulativa, arrojando distintas conclusiones. El principal problema al hacer el contraste de las hipótesis, es que la varianza de la tasa de depreciación es menor que la varianza de la prima de la tasa *forward*. De acuerdo con Bilson (1981), la diferencia entre la desviación estándar de la depreciación

y la prima es consecuencia de que la prima no es sino un estimado del valor esperado de la depreciación.

La prueba natural de la hipótesis de eficiencia especulativa se construye bajo el siguiente modelo:

$$d_t = \beta_0 + \beta_1 z_t + u_t. \quad (6)$$

Se puede reescribir la ecuación (6) de manera que, bajo las hipótesis de eficiencia, tanto la constante como la pendiente sean iguales a cero:

$$d_t - z_t = \beta_0 + (\beta_1 - 1)z_t + u_t. \quad (7)$$

En la Tabla 1 se detallan los estimadores de la regresión por mínimos cuadrados ordinarios (MCO) de la ecuación (7), extraídos del trabajo de Bilson (1981).

Se puede apreciar claramente, que los estimadores de la pendiente de la regresión en (7) son mas cercanos al valor de -1 que al valor esperado. Este resultado demuestra que las aproximaciones convencionales a la hipótesis de la eficiencia especulativa carecen de potencia explicativa. En una segunda aproximación, Bilson (1981) propone el siguiente modelo:

$$d_{n,t} - z_{n,t} = \beta_0 + (\beta_1 - 1)z_{n,t} + u_{n,t}.$$

Donde  $n$  es un indicador del país. En la estimación por MCO, el autor obtiene:

$$d_{n,t} - z_{n,t} = 3,123 - 0,822z_{n,t} + u_{n,t}$$

(1,18) (0,18).

Tabla 1: Estimación de la ecuación (7) por MCO

País	$\beta_0$	$\beta_1$
Canadá	-4.010 (2.05)	-1.804 (0.94)
Reino Unido	1.928 (5.21)	-0.372 (0.99)
Bélgica	5.27 (3.86)	-0.973 (0.69)
Francia	0.407 (4.39)	-1.849 (0.86)
Alemania	6.37 (6.29)	-1.208 (1.65)
Italia	-7.428 (4.73)	-1.372 (0.35)
Holanda	7.285 (3.61)	-2.741 (1.05)
Suiza	11.32 (8.52)	-1.184 (1.38)
Japón	3.917 (4.03)	-1.655 (0.86)

En su trabajo, Bilson (1981) sugiere un firme rechazo de la hipótesis de eficiencia especulativa y acepta que una explicación consistente con los datos es que la prima de la tasa *forward* se determina principalmente por las tasas de interés, que reflejan la tasa de inflación anticipada.

Cumby y Obstfeld (1981) retoman la hipótesis de la paridad descubierta de las tasas de interés, siguiendo el trabajo de Fisher (1930), quien aseguraba que: "las tasas de interés siguen a los cambios de precios de manera cercana en grado, pero de manera distante a través del tiempo". Formalmente:

$$\begin{aligned}
 E_t[\log(S_{t+1})] - \log(S_t) &= \log(1 + r_t) - \log(1 + r_t^*) \\
 &\approx r_t - r_t^*.
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Para poder hacer una prueba de la condición dada en (8), los autores proponen el modelo:

$$\log(S_{t+1}) = E_t[\log(S_{t+1})] + \epsilon_t \quad (9)$$

con  $E_t(\epsilon_t) = E_t(\epsilon_t, \epsilon_{t+i})$  para  $i \neq 0$ . Así, combinando (8) y (9) se obtiene:

$$\log(S_{t+1}) - \log(S_t) = r_t - r_t^*. \quad (10)$$

Tomando (4) y definiendo:

$$x_t \equiv r_t - r_t^* \quad (11)$$

se obtiene:

$$d_t - x_t = \epsilon_t.$$

Bajo aversión al riesgo,  $\epsilon_t$  es la suma del error en las expectativas y una prima de riesgo que absorbe la divergencia entre el diferencial de las tasas de interés y el valor esperado de la depreciación. Si se asume la paridad cubierta, la prima de riesgo puede expresarse como la diferencia entre el logaritmo de la tasa *forward* en el periodo  $t$  y el tipo de cambio *spot* en el periodo  $t + 1$ . Entonces, la prima de riesgo  $p_t$  se define como:

$$p_t \equiv \log(F_t) - \log(S_{t+1}). \quad (12)$$

Cumby y Obstfeld (1981) concluyen que la evidencia sugiere que la paridad descubierta de las tasas de interés no se cumple y parece favorecer la existencia de una prima de riesgo de la tasa *forward* para la mayoría de las divisas. La hipótesis de la paridad descubierta de la prima de riesgo de la tasa *forward*, afirma que la prima de riesgo de la tasa *forward* es invariante en el tiempo. En Fama (1984) se define:

$$d_t^e \equiv E_t[d_t] = E_t[\log(S_{t+1})] - \log(S_t) \quad (13)$$

como la tasa de depreciación esperada. Sumando el término  $-\log(S_t)$  en ambos lados de (13), se obtiene:

$$p_t - \log(S_t) = \log(F_t) - \log(S_{t+1}) - \log(S_t). \quad (14)$$

Tomando  $E_t$  en (14) y reordenando términos, se obtiene:

$$\begin{aligned} \log(F_t) - \log(S_t) &= p_t + E_t[\log(S_{t+1})] - \log(S_t) \\ z_t &= p_t + d_t^e. \end{aligned} \quad (15)$$

Considerando las regresiones lineales de  $p_t$  y  $d_t$  sobre  $z_t$  y asumiendo la eficiencia de la tasa *forward*, las pendientes de las regresiones quedan dadas por:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\text{cov}(p_t, z_t)}{\text{var}(z_t)} \\ \beta_2 &= \frac{\text{cov}(d_t, z_t)}{\text{var}(z_t)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Sustituyendo (15) en (16) se obtiene:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\text{var}(p_t) + \text{cov}(p_t, d_t^e)}{\text{var}(p_t) + \text{var}(d_t^e) + 2\text{cov}(p_t, d_t^e)} \\ \beta_2 &= \frac{\text{var}(d_t^e) + \text{cov}(p_t, d_t^e)}{\text{var}(p_t) + \text{var}(d_t^e) + 2\text{cov}(p_t, d_t^e)}. \end{aligned}$$

Esto implica que cuando  $\beta_2$  tiene signo negativo, entonces el término  $\text{cov}(p_t, d_t^e)$  debe ser negativo y mayor que  $\text{var}(d_t^e)$ . Esta correlación negativa entre la prima de riesgo y la depreciación esperada evidencia la variación en el tiempo de las variables, lo que denota la falla en la hipótesis de la paridad descubierta de la prima de riesgo de la tasa *forward*.

Para explicar esta anomalía, Bansal (1997) caracteriza la depreciación esperada y las tasas de interés por un conjunto de factores de descuento estocástico entre distintos países a través de un modelo de la estructura temporal de las tasas de interés.

## 2.4. Una exploración de la anomalía de la tasa *forward* en los mercados de divisas

Bansal (1997) intenta desarrollar un marco teórico basado en modelos de la estructura temporal de las tasas de interés para estudiar la evidencia relacionada con la anomalía de la tasa *forward*. La principal innovación del trabajo de Bansal consiste en el hallazgo de no-linealidades sobre la estructura de la prima de riesgo de la tasa *forward*, esto provoca que la violación de la paridad descubierta de las tasas de interés depende del signo del diferencial de las tasas de interés entre países.

Sea  $\mathbf{H}_{t+1}$  un vector de retornos unitarios sobre bonos domésticos nominales libres de riesgo, libre de oportunidades de arbitraje y sea

$$\mathbf{w}_t = \operatorname{argmax}_{\omega_t} E_t[\log(\omega_t^T \mathbf{H}_t)].$$

Sea  $R_{t+1}$  el retorno del costo unitario del portafolio. Las condiciones del modelo satisfacen:

$$E_t \left[ \frac{1 + h_{t+1}}{R_{t+1}} \right] = 1$$

para todo  $(1 + h_{t+1}) \in \mathbf{H}_t$ . Asumiendo que la estructura de retornos unitarios sobre los bonos consta de un solo factor, entonces  $\mathbf{w}_t = w_t$  y el retorno se compone únicamente de la tasa de interés libre de riesgo y del retorno sobre un bono riesgoso libre de *default*, es decir:

$$R_{t+1} = 1 + r_t + w_t[h_{t+1} - r_t]$$

donde  $[h_{t+1} - r_t]$  es el retorno (riesgoso) en exceso entre los periodos  $t$  y  $t + 1$ . El siguiente supuesto es que el retorno tiene una función de distribución condicional normal y además se

cumple:

$$h_{t+1} - r_t = c_t + \sigma_t u_{t+1}$$

donde  $c_t$  y  $\sigma_t^2$  son la media y varianza condicional, y se asume que  $u_{t+1}$  tiene una distribución condicional normal con media cero y varianza uno.

El último supuesto es que la media y la varianza condicional dependen únicamente de las tasas de interés. Así, haciendo una aproximación local y utilizando  $\log(1 + r_t) \approx r_t$  y  $1/R_t = \exp(-\log(R_{t+1}))$  se obtiene:

$$\log(R_{t+1}) = r_t + w_t c_t - \frac{w_t^2 \sigma_t^2}{2} + w_t \sigma_t u_{t+1}. \quad (17)$$

Así, se obtiene:

$$w_t = \frac{c_t}{\sigma_t^2}. \quad (18)$$

De (17) se obtiene:

$$\exp[-\log(R_{t+1})] = \exp[-r_t] \exp \left[ -w_t c_t + \frac{w_t^2 \sigma_t^2}{2} - w_t \sigma_t u_{t+1} \right]. \quad (19)$$

Sea  $m_{t+1} \equiv 1/R_{t+1}$  el factor de descuento estocástico que precia los pagos denominados en la moneda doméstica. Si el inversionista puede adquirir bonos en el extranjero, la condición de arbitraje implicaría que:

$$E_t \left[ m_{t+1} \left( \frac{S_{t+1}}{S_t} \right) R_{t+1}^* \right] = 1$$

donde  $R_{t+1}^*$  es un retorno en moneda extranjera. Suponiendo que  $R_{t+1}^*$  se comporta de manera similar al factor doméstico, se tiene que  $m_{t+1}^* \equiv \frac{1}{R_{t+1}^*}$  cumple:

$$\frac{S_{t+1}}{S_t} = \frac{m_{t+1}^*}{m_{t+1}}. \quad (20)$$

Si se define  $\lambda_t \equiv c_t/\sigma_t$ , el precio de mercado del riesgo, de (19) se obtiene:

$$m_{t+1} = \exp(-r_t) \exp\left(-\frac{\lambda_t^2}{2} - \lambda_t u_{t+1}\right). \quad (21)$$

Expresión que es válida para el mercado extranjero. Tomando logaritmos en la expresión (20) y definiendo  $d_t^e$  como en (13) se obtiene:

$$d_t^e = E_t[\log(m_{t+1}^*) - \log(m_{t+1})] \quad (22)$$

Sustituyendo la expresión (21) en (22) se obtiene:

$$d_t^e = [r_t - r_t^*] - \left(\frac{\lambda_t^{2*} - \lambda_t^2}{2}\right). \quad (23)$$

Combinando (15) y la hipótesis de la paridad descubierta de las tasas de interés sabemos que:

$$\begin{aligned} z_t &= d_t^e + p_t \\ &= [r_t - r_t^*] \end{aligned} \quad (24)$$

Así, sustituyendo (23) y (24) en (15) se tiene:

$$p_t = \frac{\lambda_t^{2*} - \lambda_t^2}{2}. \quad (25)$$

Así, con dos supuestos adicionales sobre la estructura temporal de las tasas de interés:

$$c_t = \mu + \delta r_t$$

$$\sigma_t = \kappa r_t^\gamma$$

obtenemos:

$$\lambda_t = \frac{\mu + \delta r_t}{\kappa r_t^\gamma}. \quad (26)$$

Estas condiciones arrojan errores que son secuencias de diferencia de martingala (MDS):

$$\sigma_t u_{t+1} = h_{t+1} - r_t - c_t \quad (27)$$

$$\eta_{t+1} = \sigma_t^2 u_{t+1}^2 - \sigma_t^2 \quad (28)$$

$$\zeta_{t+1} = \log(S_{t+1}/S_t) - [r_t - r_t^*] + \left( \frac{\lambda_t^{2*} - \lambda_t^2}{2} \right) \quad (29)$$

Para el caso de dos países, estas restricciones nos permiten identificar los parámetros de interés:

$$\theta = [\mu, \delta, \kappa, \gamma] \quad (30)$$

que pueden variar de país a país, según la especificación deseada.

### 3. Estimadores

#### 3.1. El método generalizado de momentos

El modelo desarrollado por Hansen y Singleton (1982), referido en este trabajo como GMM, se caracteriza por condiciones de primer orden dadas por:

$$E_t[h(\mathbf{x}_{t+n}, \mathbf{b}_0)] = 0 \quad (31)$$

donde  $\mathbf{x}_{t+n}$  es un vector de instrumentos de dimensión  $k$  y  $\mathbf{b}_0$  es un vector de parámetros desconocidos de dimensión  $l$ . Definiendo  $\mathbf{z}_t$  como un vector de dimensión  $q$  y asumiendo que tanto  $\mathbf{z}_t$  como  $h(\mathbf{x}_{t+n}, \mathbf{b}_0)$  tienen varianzas incondicionales finitas, podemos definir la función  $f$  como:

$$f(\mathbf{x}_{t+n}, \mathbf{z}_t, \mathbf{b}) = h(\mathbf{x}_{t+n}, \mathbf{b}) \otimes \mathbf{z}_t. \quad (32)$$

Los supuestos anteriores y las ecuaciones (31) y (32) implican:

$$E_t[f(\mathbf{x}_{t+n}, \mathbf{z}_t, \mathbf{b}_0)] = 0. \quad (33)$$

La ecuación (33) representa un conjunto de  $mq$  condiciones de ortogonalidad en la población, a partir de las cuales se construye un estimador para  $\mathbf{b}_0$  siempre que se satisfaga la condición  $mq \geq l$ . Con  $g_0(\mathbf{b}) = E_t[f(\mathbf{x}_{t+n}, \mathbf{z}_t, \mathbf{b})]$  para  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^l$ .

El estimador queda dado por:

$$g_T(\mathbf{b}) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T f(\mathbf{x}_{t+n}, \mathbf{z}_t, \mathbf{b}).$$

Asumiendo la continuidad de esta función en  $\mathbf{b}$ , se puede escoger algún  $\mathbf{b}$  en algún espacio compacto de parámetros  $\Omega$  que haga que  $g_T$  sea cercano a cero, resolviendo el problema:

$$\min_{\mathbf{b} \in \Omega} J_T(\mathbf{b})$$

sujeto a:

$$J_T(\mathbf{b}) = (g_T(\mathbf{b}))' \widehat{\mathbf{W}} (g_T(\mathbf{b}))$$

donde  $\widehat{\mathbf{W}}_T \in \mathbb{R}^{r \times r}$  es una matriz simétrica y positiva definida, que puede depender de la información en la muestra.

Sea  $\widehat{\mathbf{b}}_0$  el estimador de  $\mathbf{b}_0$ . La varianza asintótica de este estimador está dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_T &\equiv \text{asyvar}(\widehat{\mathbf{b}}_0) \\ &= (\mathbf{H}'_T \mathbf{W}_T \mathbf{H}_T)^{-1} \mathbf{H}'_T \mathbf{W}_T \mathbf{S}_T \mathbf{W}_T \mathbf{H}_T (\mathbf{H}'_T \mathbf{W}_T \mathbf{H}_T)^{-1} \end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{H}_T = \frac{\sum_{t=1}^T E_t[f_b(\mathbf{x}_{t+n}, \mathbf{z}_t, \mathbf{b}_0)]}{T},$$

$$f_b(\mathbf{x}_{t+n}, \mathbf{z}_t, \mathbf{b}) = \left[ \frac{\partial h(\mathbf{x}_{t+n}, \mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}} \right] \otimes \mathbf{z}_t,$$

$\mathbf{W}_T$  es una matriz de vectores no aleatorios tal que  $\widehat{\mathbf{W}}_T \xrightarrow{P} \mathbf{W}_T$  y:

$$\mathbf{S}_T = \frac{\sum_{s=1}^T \sum_{t=1}^T E_t[f(\mathbf{x}_{t+n}, \mathbf{z}_t, \mathbf{b}_0) f(\mathbf{x}_{t+n}, \mathbf{z}_t, \mathbf{b}_0)']}{T}.$$

Bajo ciertas condiciones de regularidad se satisface:

$$\mathbf{H}_T - \frac{\sum_{t=1}^T f_b(\mathbf{x}_{t+n}, \mathbf{z}_t, \hat{\mathbf{b}}_0)}{T} \xrightarrow{P} \mathbf{0}.$$

Finalmente Newey y West (1986) proponen el siguiente estimador para  $\mathbf{S}_T$ :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{S}}_T &= \hat{\Psi}_0 + \sum_{j=1}^m a(j, m) [\hat{\Psi}_j + \hat{\Psi}_j'], \\ \hat{\Psi}_j &= \frac{\sum_{t=j+1}^T f(\mathbf{x}_{t+n}, \mathbf{z}_t, \hat{\mathbf{b}}_0) f(\mathbf{x}_{t+n}, \mathbf{z}_t, \hat{\mathbf{b}}_0)'}{T} \text{ y} \\ a(j, m) &= 1 - \frac{j}{m+1}.\end{aligned}$$

### 3.2. El método de restricciones condicionales de momentos

El artículo de Domínguez y Lobato (2004) nos presenta un método de estimación simple, que, a diferencia del GMM, no requiere información adicional elegida arbitrariamente por el usuario. A lo largo de todo este trabajo, se hará referencia a este estimador por CMM.

Sea  $\mathbf{Z}_t$  un vector de datos y sean  $\mathbf{Y}_t$ ,  $\mathbf{X}_t$  dos subvectores de  $\mathbf{Z}_t$  con posibles coordenadas comunes, de dimensión  $k$  y  $d$  respectivamente. El vector  $\mathbf{Y}_t$  contiene variables endógenas o exógenas, mientras que el vector  $\mathbf{X}_t$  consiste únicamente de variables exógenas. Se asume que la distribución de los datos satisface la restricción condicional de momentos:

$$E(h(\mathbf{Y}_t, \theta_0) | \mathbf{X}_t) = 0 \tag{34}$$

para un único valor  $\theta_0 \in \Theta$  donde  $\Theta \subset \mathbb{R}^m$ . La ecuación (34) define el valor del parámetro de interés  $\theta_0$ , conocido por el econometrista. La función  $h : \mathbb{R}^k \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}^l$  se supone conocida.

Los autores desarrollan únicamente el caso de  $l = 1$ .

Como se ha discutido previamente, el procedimiento estándar que involucra la selección de condiciones de ortogonalidad no garantiza la identificación global de los parámetros de interés. El método propuesto por Domínguez y Lobato (2004) utiliza toda la información disponible en (34) para estimar  $\theta_0$ . Se sabe además que (34) implica:

$$H(\theta_0, \mathbf{x}) = 0$$

para casi todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ . Donde  $H(\theta_0, \mathbf{x}) = E(h(\mathbf{Y}_t, \theta_0)I(\mathbf{X}_t \leq \mathbf{x}))$  es la función integradora de Brunk (1970) y la función indicadora  $I(\mathbf{X}_t \leq \mathbf{x})$  es igual a 1 en cada componente donde  $\mathbf{X}_t$  es menor o igual al componente en  $\mathbf{x}_t$  y cero en otro caso.

De (34) se tiene que  $P(E(h(\mathbf{Y}_t, \theta)|\mathbf{X}_t) = 0) < 1$  cuando  $\theta \neq \theta_0$ , así que  $H(\theta, \mathbf{x}) \neq 0$  en un conjunto no vacío del espacio muestral de  $\mathbf{X}_t$ . Así, denotando  $P_{\mathbf{X}_t}$  a la función de distribución del vector aleatorio  $\mathbf{X}_t$ , se tiene  $\int H(\theta_0, \mathbf{x})^2 dP_{\mathbf{X}_t}(\mathbf{x}) = 0$  pero  $\int H(\theta, \mathbf{x})^2 dP_{\mathbf{X}_t}(\mathbf{x}) > 0$  para todo  $\theta \neq \theta_0$ . Así, podemos escribir:

$$\theta_0 = \operatorname{argmin}_{\theta \in \Theta} \int H(\theta, \mathbf{x})^2 dP_{\mathbf{X}_t}(\mathbf{x}), \quad (35)$$

y  $\theta_0$  es el único valor que satisface (35).

La función de regresión integrada muestral se denota por:

$$H_T(\theta, \mathbf{x}) = T^{-1} \sum_{t=1}^T h(\mathbf{Y}_t, \theta) I(\mathbf{X}_t \leq \mathbf{x})$$

para todo  $g$  el análogo muestral de  $\int g^2(\mathbf{x}) dP_{\mathbf{X}_t}(\mathbf{x})$  es  $T^{-1} \sum_{t=1}^T g^2(\mathbf{X}_t)$ . Entonces el análogo muestral de (35) es:

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmin}_{\theta \in \Theta} \frac{1}{T^3} \sum_{l=1}^T \left( \sum_{t=1}^T h(\mathbf{Y}_t, \theta) I(\mathbf{X}_t \leq \mathbf{X}_l) \right)^2. \quad (36)$$

En Domínguez y Lobato (2004) se demuestra que:

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0) \xrightarrow{d} \left( \int \dot{H} \dot{H}' dP_{\mathbf{X}_1} \right)^{-1} \int \dot{H} B_r dP_{\mathbf{X}_1},$$

Donde  $\dot{H}(\mathbf{x}) = E(\dot{h}(\mathbf{Y}_t, \theta_0) I(\mathbf{X}_t \leq \mathbf{x}))$  y  $B_r$  denotan un proceso gaussiano centrado en el espacio de funciones reales continuas por arriba y con límites definidos por abajo, con estructura de covarianza  $\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = E(h^2(\mathbf{Y}_t, \theta_0) I(\mathbf{X}_t \leq \mathbf{r} \wedge \mathbf{s}))$ .

Adicionalmente prueban que:

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0) \xrightarrow{d} \mathbf{N}(0, \Omega),$$

donde

$$\Omega = \left( \int \dot{H} \dot{H}' \right)^{-1} \times \int \int \dot{H}(\mathbf{x}_1) \dot{H}'(\mathbf{x}_2) \Gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) dP_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_1) dP_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_2) \left( \int \dot{H} \dot{H}' dP_{\mathbf{X}} \right)^{-1}.$$

Un estimador consistente de  $\Omega$  es el análogo muestral:

$$\left( \sum_{i=1}^T \dot{H}_T(\mathbf{X}_i) \dot{H}'_T(\mathbf{X}_i) \right)^{-1} \times \sum_{i=1}^T \sum_{j=1}^T \dot{H}_T(\mathbf{X}_i) \dot{H}'_T(\mathbf{X}_j) \Gamma_T(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) \left( \sum_{i=1}^T \dot{H}_T(\mathbf{X}_i) \dot{H}'_T(\mathbf{X}_i) \right)^{-1}$$

donde

$$\begin{aligned}\dot{H}_T(\mathbf{t}) &= T^{-1} \sum_{i=1}^T \dot{h}(\mathbf{Y}_i, \hat{\theta}) I(\mathbf{X}_i \leq \mathbf{t}) y \\ \Gamma_T(\mathbf{t}, \mathbf{s}) &= T^{-1} \sum_{i=1}^T h^2(\mathbf{Y}_i, \hat{\theta}) I(\mathbf{X}_i \leq \mathbf{t} \wedge \mathbf{s}).\end{aligned}$$

## 4. Datos

En el presente trabajo se utilizan datos semanales de Datastream para Estados Unidos y México con 471 observaciones que abarcan el periodo de Agosto de 2001 a Agosto 2010. Las series incluyen tipos de cambio *spot* dólar/peso y las tasas de interés nominal para bonos gubernamentales libres de riesgo con periodos de madurez de un mes y un año. Se utilizan datos para los Treasury Bills (T-Bills) y Certificados de la Tesorería (CETES).

Se denotará por  $r_{U,t}$  y  $r_{M,t}$  a las tasas nominales de interés para T-Bills y CETES, respectivamente. Definimos  $x_t = r_{U,t} - r_{M,t}$  como el diferencial de la tasa de interés entre países. Como antes  $d_{t+1}$  será la depreciación del tipo de cambio *spot*. En la Tabla 2 se presenta la descripción estadística de los datos.

Tabla 2: Descripción de los datos

Variable	Código DS	Media	$\sigma(\cdot)$	Mín.	Máx.
T-Bills 1 mes	Y70460	0.0202	0.0162	0.0001	0.0518
T-Bills 12 meses	S02556	0.02414	0.0158	0.0025	0.053
CETES 28 días	S01487	0.0695	0.01468	0.0414	0.0981
CETES 364 días	S03783	0.0792	0.01675	0.0484	0.1301
$x_t$	-	-0.049	0.01617	-0.0857	-0.0185
$d_{t+1}$	-	-0.00007	0.01552	-0.1164	0.0785

Las Figuras<sup>3</sup> 1 y 2 presentan la evolución de los diferenciales de las tasas de interés  $x_t$  y la depreciación del tipo de cambio *spot*  $d_{t+1}$ .

---

<sup>3</sup>Por motivos de estética, se ha decidido incluir todas las Figuras en el Apéndice II del trabajo

## 5. Simulación

En esta sección se presenta una simulación para comparar la validez de los estimadores. Para ello se generan dos procesos AR para las tasas de interés de cada país. En particular se especifican:

$$\begin{aligned}r_{U,t} &= 0.029 + r_{U,t-1} - 0.15r_{U,t-2} + 0.14r_{U,t-3} + \epsilon_t \\ \epsilon_t &\sim N(0, 0.00166)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r_{M,t} &= 0.074 + 1.065r_{M,t-1} - 0.106r_{M,t-2} + \nu_t \\ \nu_t &\sim N(0, 0.00347).\end{aligned}$$

Esta simulación de los datos nos permite generar un vector de retornos en exceso:

$$\begin{aligned}h_{t+1} - r_t &= c_t + \sigma_t u_{t+1} \\ u_{t+1} &\sim N(0, 1)\end{aligned}$$

recordando que los parámetros de interés están dados por el vector:

$$\theta = [\mu_U, \mu_M, \delta_U, \delta_M, \kappa_U, \kappa_M, \gamma_U, \gamma_M].$$

Imponemos las restricciones  $\mu_U = \mu_M = \mu$  y  $\gamma_U = \gamma_M = \gamma$ . Adicionalmente, determinamos valores de los parámetros para calibrar la estimación:

$$\begin{aligned}
\mu &= 0 \\
\delta_U &= 0,17 \\
\delta_M &= 0,14 \\
\kappa_U &= 0,19 \\
\kappa_M &= 0,16 \\
\gamma &= 1,02.
\end{aligned}$$

Con esta especificación, los retornos en exceso se especifican de manera:

$$\begin{aligned}
h_{U,t+1} - r_{U,t} &= 0.17r_{U,t} + 0.19r_{U,t}^{1,02} u_{t+1} \\
u_{t+1} &\sim N(0, 1) \\
h_{M,t+1} - r_{M,t} &= 0.14r_{U,t} + 0.16r_{U,t}^{1,02} v_{t+1} \\
v_{t+1} &\sim N(0, 1).
\end{aligned}$$

Debido a las restricciones características del estimador CMM se ha decidido estimar únicamente la ecuación (29) y al mismo tiempo simular los datos para la depreciación del tipo de cambio. Para la simulación y la estimación con GMM se asume que la MDS  $\zeta_{t+1}$  es ortogonal al vector de instrumentos  $[1, x_t, x_t^2]$  lo que arroja tres condiciones de ortogonalidad.

Para la simulación y la estimación con CMM se ha especificado la siguiente condición sobre

la variable indicadora<sup>4</sup>:

$$I(\mathbf{X}_t \leq \mathbf{X}_l) = 1 \quad \text{si} \quad \text{abs}(x_t) \leq \text{abs}(x_l)$$

$$I(\mathbf{X}_t \leq \mathbf{X}_l) = 0 \quad \text{si} \quad \text{abs}(x_t) > \text{abs}(x_l).$$

Se han corrido 1000 replicaciones para datos de 50, 100 y 200 observaciones, respectivamente. La Tabla 3 presenta los resultados de las simulaciones. Las Figuras 3, 4 y 5 presentan los histogramas de los estimadores y de los errores de estimación.

Tabla 3: Simulaciones

	$n = 50$		$n = 100$		$n = 200$		$n=400$	
	$\gamma_{GMM}$	$\gamma_{CMM}$	$\gamma_{GMM}$	$\gamma_{CMM}$	$\gamma_{GMM}$	$\gamma_{CMM}$	$\gamma_{GMM}$	$\gamma_{CMM}$
Sesgo	0.0341	0.029	0.0479	0.0331	0.0336	0.0202	-0.0241	0.0156
ECM	0.0028	0.0012	0.0044	0.0014	0.0038	0.000698	0.0048	0.000982
RECM	0.0526	0.0341	0.0667	0.0381	0.0615	0.0264	0.0689	0.0313
p-value JB	0.8180	0.4931	0.2740	0.8168	0.7525	0.6639	0.6845	0.2174

Como es posible observar, para las tres simulaciones el sesgo es mayor para el caso del estimador GMM que para el CMM. La mejor estimación (con  $n = 400$ ) arroja un sesgo de -0.0241 (2.4 % relativo al valor del parámetro) para el estimador GMM y un sesgo de 0.0156 (1.6 % relativo al parámetro) para el CMM. Dadas las características intrínsecas de los datos, no es posible concluir algo consistente sobre el comportamiento asintótico de los estimadores, con los estadísticos de la prueba Jarque-Bera presentados no es posible rechazar la hipótesis nula de que los errores provienen de una distribución normal en ninguno de los casos. Sin embargo se aprecia el claro beneficio de utilizar la estimación por CMM para muestras finitas.

<sup>4</sup>La determinación de la condición sobre la variable indicadora se basó exclusivamente en un proceso de prueba y error, resultando en la decisión de la restricción más sencilla.

## 6. Estimación

Dada la estructura del estimador CMM, detallada con anterioridad, se estima únicamente la ecuación (29). La estimación presentada en este trabajo se divide en dos partes: La Estimación 1 considera 334 observaciones hasta el periodo de diciembre de 2007, mientras que la segunda considera estas 334 observaciones e incluye otras 137 con mayor volatilidad, hasta agosto 2010 <sup>5</sup>. La Estimación 2 se lleva a cabo con la finalidad de ver la consistencia del estimador CMM en presencia de una mayor volatilidad en el proceso.

La Tabla 4 presenta estimaciones previas multiparametrales realizadas por Pérez (2011) con GMM. La diferencia entre las estimaciones (Est 1 y Est 2) radica en la utilización de distintos instrumentos para la función objetivo de GMM: en la primera estimación se utilizan como instrumentos únicamente los bonos con madurez de 1 mes, mientras que la segunda incluye como instrumentos a los bonos con tres, seis y doce meses de maduración. Los errores estándar de estas regresiones se especifican entre paréntesis.

Tabla 4: Estimación multiparametral por GMM en Pérez (2011)

Variable	Est 1	Est 2
$\delta_U$	0.1712 (0.0051)	0.1709 (0.0043)
$\delta_M$	0.1469 (0.0044)	0.1404 (0.0034)
$\kappa_U$	0.1869 (0.0044)	0.1868 (0.0042)
$\kappa_M$	0.1633 (0.0045)	0.1562 (0.0031)
$\gamma$	1.024 (0.0013)	1.0238 (0.0011)

La Tabla 5 presenta los resultados de la estimación de los modelos especificados en este trabajo. Como es posible observar, al igual que la simulación el estimador de GMM arroja un

<sup>5</sup>El corte de los datos se hace debido a la presencia de observaciones referentes a la recesión económica de 2008-2009

Tabla 5: Estimaciones

	Estimación 1	Estimación 2
# obs	334	471
$\gamma_{GMM}$	1.0553	1.0384
$\gamma_{CMM}$	1.0467	1.0252
$\sigma_{GMM}$	0.1658	0.2623
$\sigma_{CMM}$	0.1518	0.0816
$\sum \zeta_{GMM}^2$	0.0945	0.4286
$\sum \zeta_{CMM}^2$	0.1005	0.3286

valor estimado mayor que el valor estimado por CMM y más alejado que el valor de las estimaciones multiparametrales de Pérez (2011) que es de 1.024. Las Figuras 7 y 8 presentan los gráficos de las estimaciones: la línea de puntos (···) representa la función objetivo del CMM mientras que la línea de trazos cortos (---) representa la función objetivo del GMM.

Como se aprecia, en ambas estimaciones, la desviación estándar por el metodo GMM es mayor para el método de CMM. Bajo el supuesto de que la identificación global es la identificación más cercana al parámetro verdadero, podemos ver la ganancia evidente de incluir los datos con mayor volatilidad en la eficiencia del CMM. De la misma manera, la predicción intra-muestra, medida por la suma del cuadrado del valor de la condición de ortogonalidad, que es la MDS definida por  $\zeta$  es de menor tamaño en presencia de las observaciones con mayor volatilidad para el CMM que para el GMM. Esto permite destacar el comportamiento del estimador en presencia de volatilidad dadas las propiedades de la función indicadora como fue definida con anterioridad.

Queda pendiente para un análisis posterior la extensión del estimador CMM para aumentar el número de restricciones condicionales de momentos que actúan dentro de la función objetivo.

## 7. Conclusiones

La determinación del uso de los métodos de estimación para modelos con restricciones condicionales de momentos es un tema que aún queda pendiente por resolver dentro de la literatura econométrica. Este trabajo constituye la primera aplicación empírica del estimador desarrollado por Domínguez y Lobato (2004) y representa un avance en las decisiones sobre la utilización de los estimadores, particularmente en temas de macroeconomía y finanzas.

Este trabajo hace uso de la propuesta de Bansal (1997) que modela la estructura de la depreciación del tipo de cambio en términos de las tasas de interés. Si bien este modelo permite estudiar la evolución de los precios del riesgo y medir las oportunidades de arbitraje, es importante aclarar que esto no es la finalidad del trabajo; sino presentar la evolución de los precios del riesgo para los mercados cambiarios, ni medir las oportunidades de arbitraje; sino presentar la primera aplicación empírica de un método de estimación sencillo que puede trasladarse a otros ámbitos de la ciencia económica y podría abrir una ventana de oportunidad para investigaciones posteriores. Las aportaciones más significativas de este trabajo son el desarrollo y la presentación del algoritmo que se utilizó para las simulaciones y las estimaciones. El algoritmo completo, programado en MATLAB se presenta en el Apéndice I del trabajo.

Las cuatro simulaciones que se construyeron en este trabajo, reflejan la clara ventaja del estimador CMM con respecto al GMM, en términos de sesgo y consistencia. El ejercicio de simulación indica que la propiedad de normalidad se satisface aún para muestras pequeñas; haciéndose más evidente mientras crecen. No obstante, es importante hacer notar que el sesgo no parece reducirse sistemáticamente cuando aumenta el tamaño de la muestra. Es posible resaltar la sencillez en cuanto a la toma de decisiones de los instrumentos por parte del investigador al hacer uso del CMM, en contraste con los problemas que surgen en la delimitación de las condiciones de ortogonalidad necesarias para el GMM. De igual modo, es claro el

beneficio de utilizar CMM para muestras finitas.

Una clara falla en términos de la estimación por CMM es que únicamente se consigue una identificación que permite a lo más un sesgo relativo del 1.5 por ciento. Esto se explica en parte por la falta de restricciones condicionales de momentos dentro de la función objetivo, que hacen que la identificación sea incompleta, y por otra parte, la complejidad del modelo de Bansal (1997) hace que no exista claridad en cuanto al problema de identificación, como en el ejemplo detallado en la introducción del trabajo.

Las dos estimaciones que se presentan aquí permiten concluir que la introducción de los datos con mayor volatilidad beneficia en mayor medida a la estimación por CMM que a la estimación por GMM.

Hace falta una estimación multiparametral para profundizar aún más en la capacidad predictiva de ambos métodos de estimación y la incorporación de modelos de reciente manufactura, con relevancia en el ámbito económico y que cuente con las mismas características intrínsecas que dan surgimiento a los métodos de momentos.

## Referencias

- Bansal, R. (1997). An exploration of the forward premium puzzle in currency markets. *The Review of Financial Studies*, 369-403.
- Bilson, J. F. (1981). The 'speculative efficiency' hypothesis. *The Journal of Business*, 435-451.
- Brunk, H. D. (1970). Estimation for isotonic regression. *Nonparametric Techniques in Statistical Inference*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Cumby, R., y Obstfeld, M. (1981). A note on exchange rate expectations and nominal interest differentials: a test of the fisher hypothesis. *The Journal of Finance*, 697-703.
- Domínguez, M. A., y Lobato, I. N. (2004). Consistent estimation of models defined by conditional moment restrictions. *Econometrica*, 1601-1615.
- Fama, E. (1984). Short-term interest rates as predictors of inflation. *The American Economic Review*, 269-282.
- Fisher, I. (1930). *The theory of interest*. Augustus M. Kelly Publishers.
- Frenkel, J. (1976). A monetary approach to the exchange rate: doctrinal aspects and empirical evidence. *The Scandinavian Journal of Economics*, 200-224.
- Hansen, L. P. y Singleton, K. J. (1982). Generalized instrumental variables estimation of nonlinear rational expectation models. *Econometrica*, 1269-1286.
- Keynes, J. M. (1923). A tract on monetary reform. En *The collected writings of J. M. Keynes*. London.
- Newey, W. K. y West, K. D. (1986). A simple, positive semi-definite, heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix. *National Bureau of Economic Research*

Pérez, J. (2011) Una nueva exploración de la anomalía de la prima del tipo de cambio a plazo.  
Tesis de Licenciatura. *Instituto Tecnológico Autónomo de México*

## Apéndice I: Código de simulación en MATLAB

```
1 clear
2 clc
3 for cont=1:1000
4     n=200;
5 mu=0;
6 delta_u=0.17;
7 delta_m=0.14;
8 kappa_u=0.19;
9 kappa_m=0.16;
10 gamma=1.02;
11 mu_ru=0.029;
12 mu_rm=0.074;
13 sigma_ru=0.00166;
14 sigma_rm=0.00347;
15 plus=3;
16 RU=zeros(n+plus,1);
17 RUH=zeros(n+plus,1);
18 RUS=zeros(n+plus,1);
19 HU=zeros(n+plus,1);
20 LU=zeros(n+plus,1);
21 RM=zeros(n+plus,1);
22 RMH=zeros(n+plus,1);
23 RMS=zeros(n+plus,1);
24 HM=zeros(n+plus,1);
25 LM=zeros(n+plus,1);
```

```

26 for i=4: length (RUH)
27     RU(i)=mu_ru+RU(i-1)-0.15*RU(i-2)+0.14*RU(i-3)+normrnd
        (0,0.00166);
28     RUH(i)=mu_ru+RUH(i-1)-0.15*RUH(i-2)+0.14*RUH(i-3)+normrnd
        (0,0.00166);
29     RUS(i)=mu_ru+RUS(i-1)-0.15*RUS(i-2)+0.14*RUS(i-3)+normrnd
        (0,0.00166);
30     HU(i)=(1+delta_u)*RUH(i)+kappa_u*(RUH(i)^gamma)*randn;
31     LU(i)=(mu+delta_u*RUS(i))/(kappa_u*RUS(i)^gamma);
32 end
33 for i=3: length (RMH)
34     RM(i)=mu_rm+1.065*RM(i-1)-0.106*RM(i-2)+normrnd
        (0,0.00347);
35     RMH(i)=mu_rm+1.065*RMH(i-1)-0.106*RMH(i-2)+normrnd
        (0,0.00347);
36     RMS(i)=mu_rm+1.065*RMS(i-1)-0.106*RMS(i-2)+normrnd
        (0,0.00347);
37     HM(i)=(1+delta_m)*RMH(i)+kappa_m*(RMH(i)^gamma)*randn;
38     LM(i)=(mu+delta_m*RMS(i))/(kappa_m*RMS(i)^gamma);
39 end
40 for i=1: length (LM)
41     D(i)=(RUS(i)-RMS(i))-(LM(i)^2-LU(i)^2)/2;
42 end
43 RU=RU(plus+1:plus+n);
44 RM=RM(plus+1:plus+n);
45 HU=HU(plus+1:plus+n);
46 HM=HM(plus+1:plus+n);

```

```

47 D=D( plus +1: plus+n );
48 syms fcmm ru rm hu hm d x lu lm cu cm su sm m du dm ku km g
49 cu=m+du*ru ;
50 cm=m+dm*rm ;
51 su=ku*ru^g ;
52 sm=km*rm^g ;
53 lu=cu / su ;
54 lm=cm / sm ;
55 x=ru-rm ;
56 sigmauu=hu-ru-cu ;
57 sigmaum=hm-rm-cm ;
58 zeta=d-x+(lm-lu) / 2 ;
59 etau=sigmauu^2-su^2 ;
60 etam=sigmaum^2-sm^2 ;
61 fcmm=zeta ;
62 fcmm=subs( fcmm, { m, du, dm, ku, km }, { mu, delta_u, delta_m, kappa_u,
        kappa_m } );
63 X=RU-RM;
64 sum=0;
65 sum2=0;
66 for j=1:length(X)
67     for i=1:length(X)
68         f0cmm=subs( fcmm, { ru, hu, rm, hm, d }, { RU(i), HU(i), RM(i), HM
                (i), D(i) } );
69         if abs(X(i))<abs(X(j))
70             indice=1;
71         else

```

```

72         indice=0;
73     end
74     sum=sum+(f0cmm*indice)^2;
75 end
76 sum2=sum2+sum;
77 end
78 K=sum/(length(X)^3);
79 Kf=matlabFunction(K);
80 thetacmm=fminsearch(Kf,1);
81 TCMM(cont)=thetacmm;
82 syms fgmm ru rm hu hm d x lu lm cu cm su sm m du dm ku km g
83 cu=m+du*ru;
84 cm=m+dm*rm;
85 su=ku*ru^g;
86 sm=km*rm^g;
87 lu=cu/su;
88 lm=cm/sm;
89 x=ru-rm;
90 sigmauu=hu-ru-cu;
91 sigmaum=hm-rm-cm;
92 etau=sigmauu^2-su^2;
93 etam=sigmaum^2-sm^2;
94 zeta=d-x+(lm-lu)/2;
95 f1=[etau]*[1,ru,ru^2]';
96 f2=[etam]*[1,rm,rm^2]';
97 f3=[zeta]*[1,x,x^2]';
98 fgmm=[f3];

```

```

99 fgmm=subs (fgmm, {m, du, dm, ku, km}, {mu, delta_u, delta_m, kappa_u,
      kappa_m});
100 sum=0;
101 for i=1:length(RU)
102     sum=sum+subs (fgmm, {ru, rm, hu, hm, d}, {RU(i), RM(i), HU(i), HM(i)
      ), D(i)});
103 end
104 G=sum/length(RU);
105 W=eye(length(G), length(G));
106 J=real(G'*W*G);
107 Jf=matlabFunction(J);
108 thetagmm=fminsearch(Jf, 1);
109 mat=zeros(length(fgmm), length(fgmm));
110 sum2=0;
111 for i=1:length(RU)
112     f0gmm=subs (fgmm, {ru, rm, hu, hm, d, g}, {RU(i), RM(i), HU(i), HM(i)
      ), D(i), thetagmm});
113     mat=mat+f0gmm*f0gmm';
114     sum2=sum2+f0gmm;
115 end
116 S=mat/length(RU);
117 W=inv(S);
118 H=sum2/length(RU);
119 J=real(G'*W*G);
120 Jf=matlabFunction(J);
121 thetagmm=fminsearch(Jf, 1);
122 asyvargmm=inv((H'*W*H))*(H'*W*S*W*H)*inv((H'*W*H));

```

```

123 TGMM( cont )=thetagmm ;
124 cont
125 toc
126 end
127 meanTGMM=mean (TGMM)
128 meanTCMM=mean (TCMM)
129 sum3=0;
130 sum4=0;
131 for i = 1 : length (TGMM)
132     sum3=sum3+(TGMM( i )-gamma) ^ 2 ;
133     sum4=sum4+(TCMM( i )-gamma) ^ 2 ;
134 end
135 biasGMM=meanTGMM-gamma
136 biasCMM=meanTCMM-gamma
137 mseGMM=sum3 / length (TGMM)
138 mseCMM=sum4 / length (TCMM)
139 t = [ 1 : 0.001 : 1.05 ] ;
140 th1=min ( [ thetagmm , thetacmm ] ) ;
141 th2=max ( [ thetagmm , thetacmm ] ) ;

```

## Apéndice II: Figuras

Figura 1: Diferencial de las tasas de interés  $x_t$

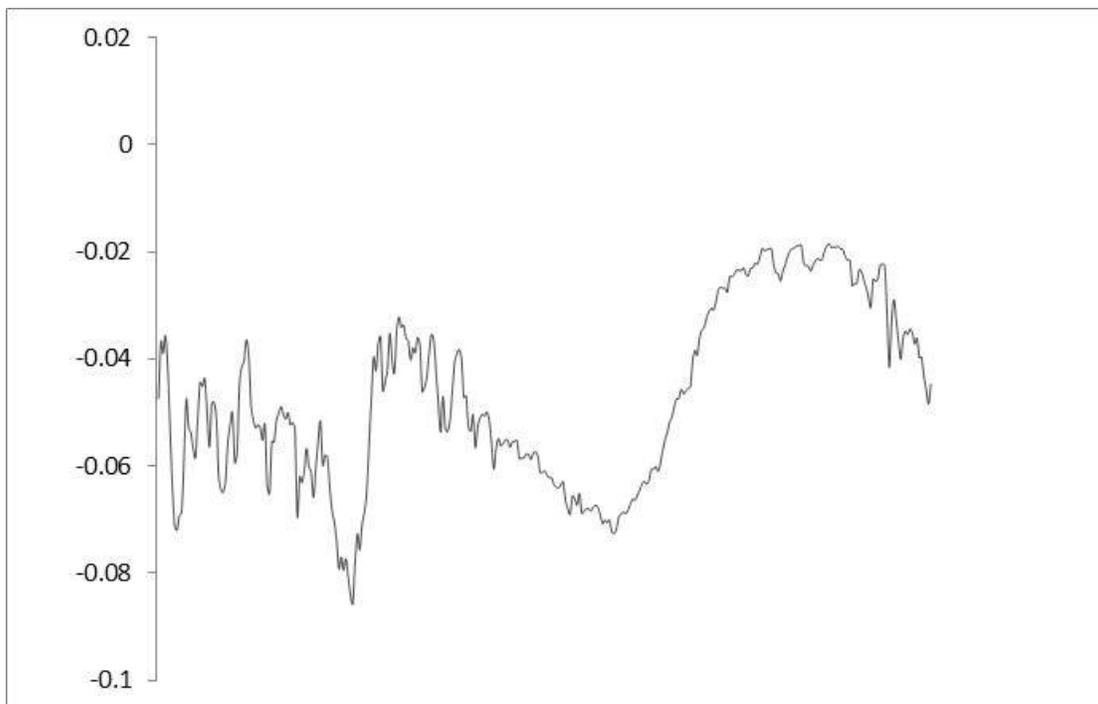


Figura 2: Depreciación del tipo de cambio *spot*  $d_{t+1}$

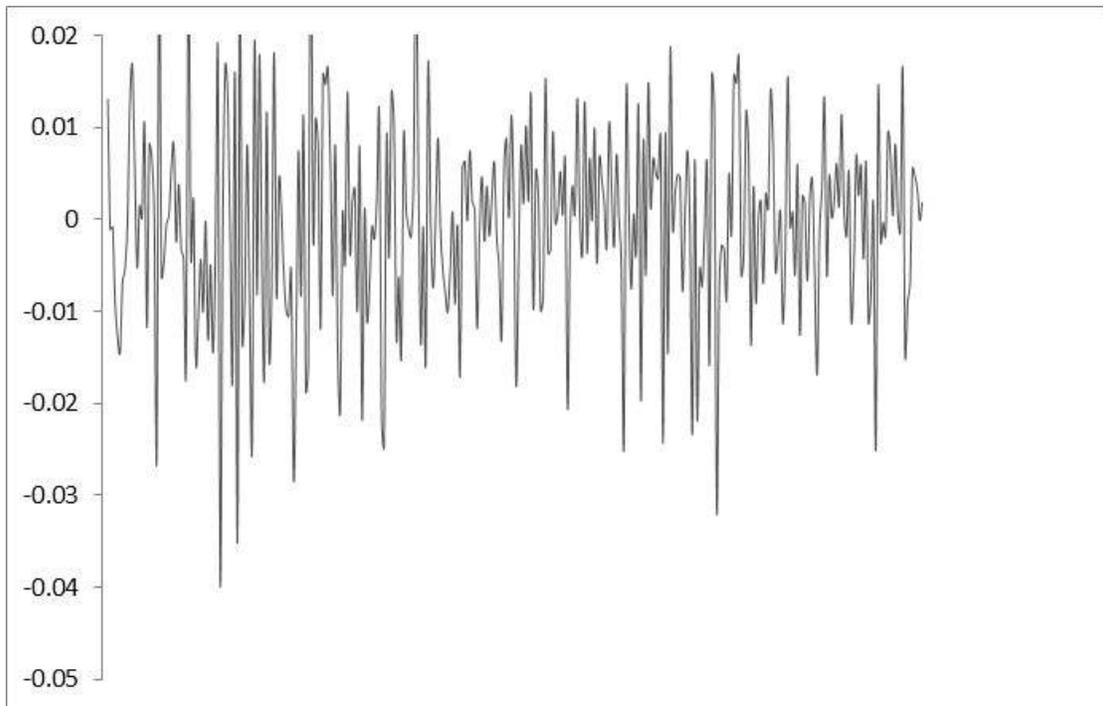


Figura 3: Histogramas  $n = 50$

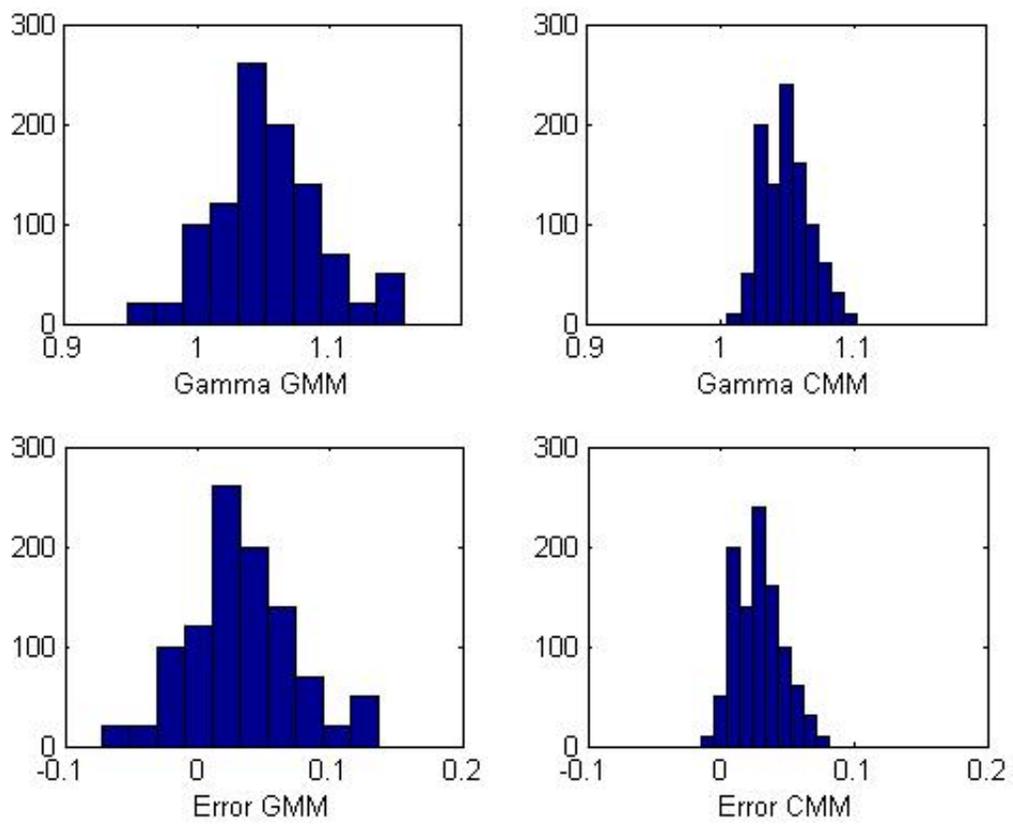


Figura 4: Histogramas  $n = 100$

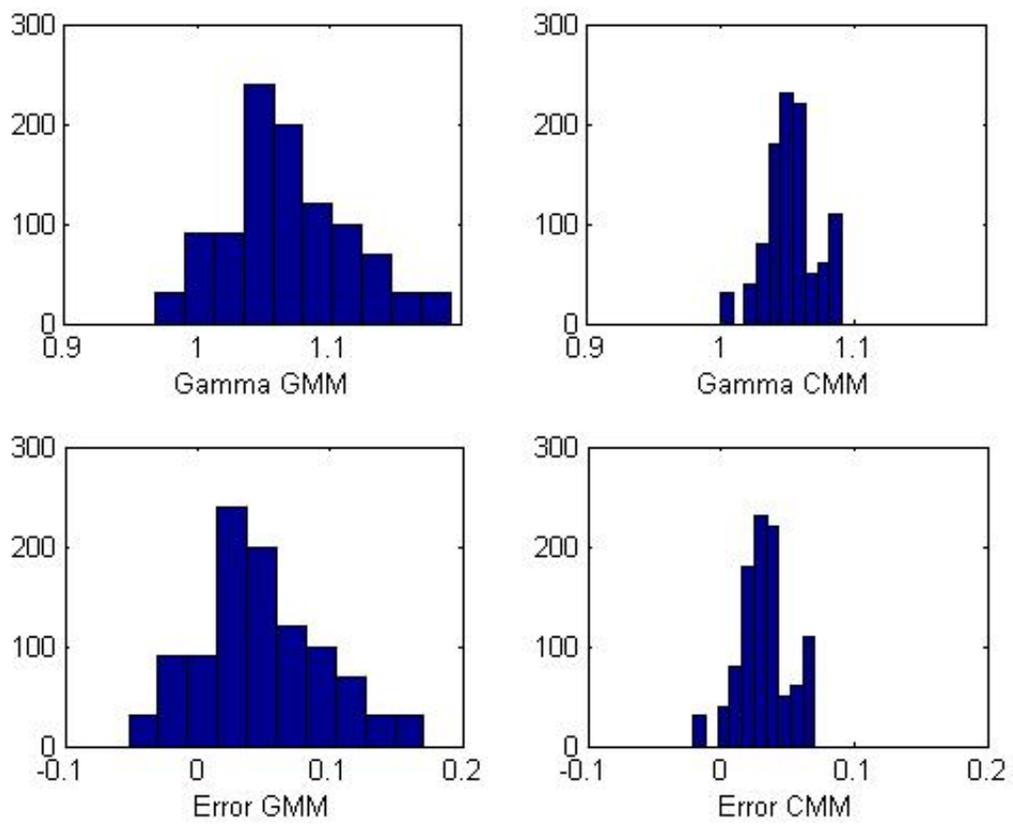


Figura 5: Histogramas  $n = 200$

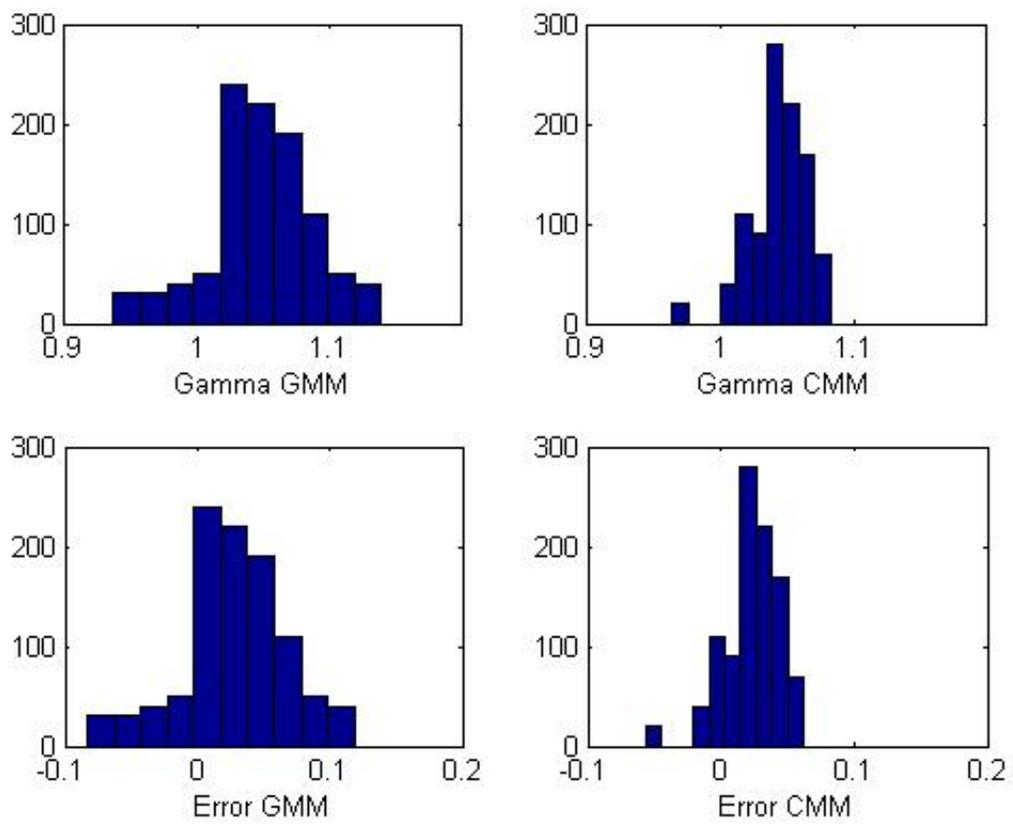


Figura 6: Histogramas  $n = 400$

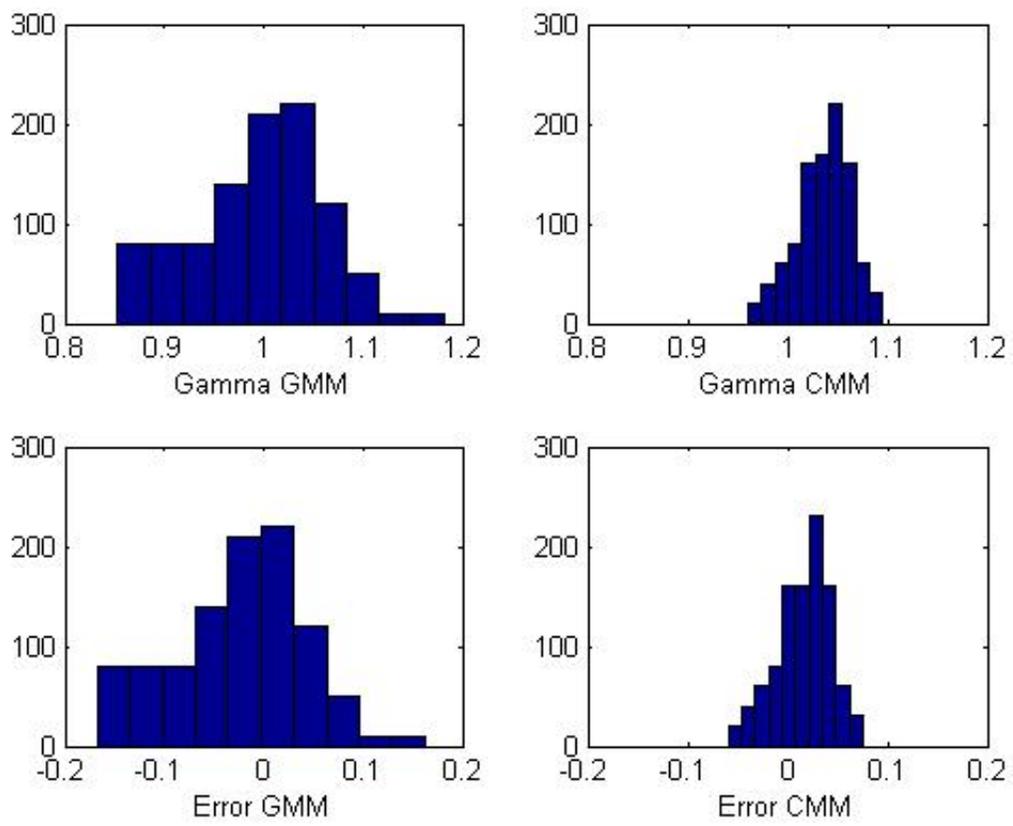


Figura 7: Estimación 1

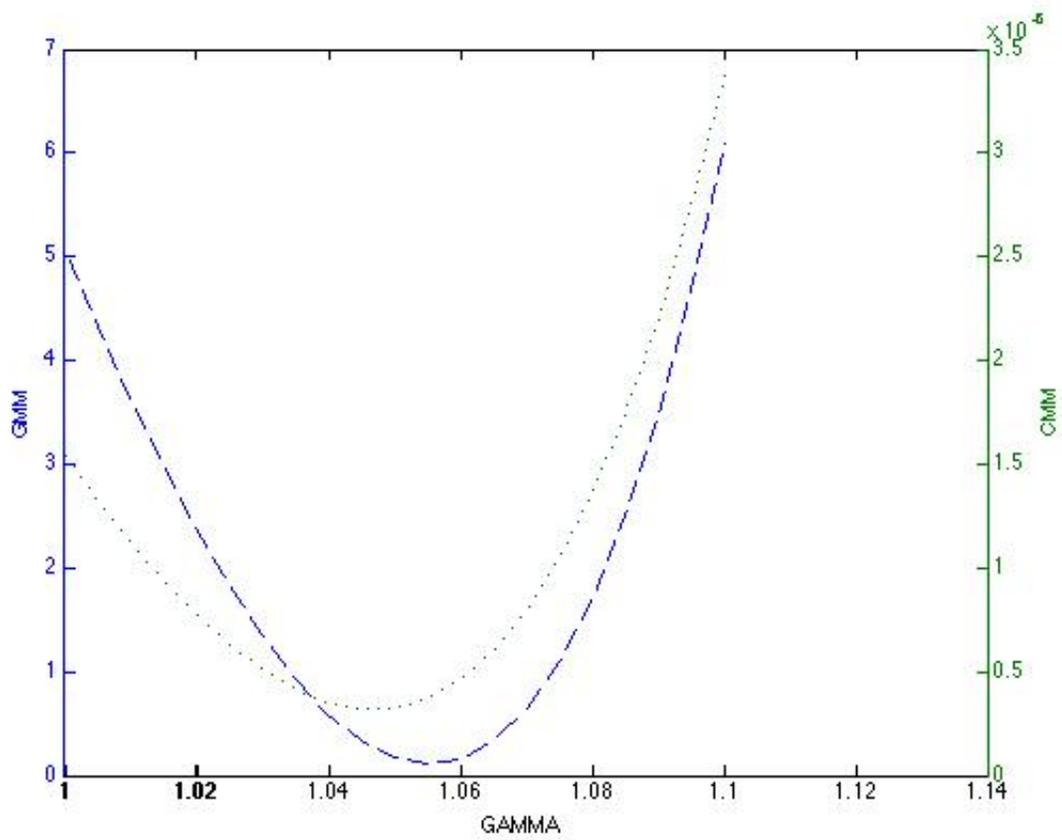


Figura 8: Estimación 2

