CIDE

NÚMERO 13

David Mayer

PUNTOS QUE FIJAN UN CUERPO BAJO ISOMETRÍAS

Introducción

Consideramos algún cuerpo en el espacio de n dimensiones y lo sujetamos deteniéndolo de $n+1$ puntos situados sobre su superficie. ¿Bajo qué condiciones queda sujeto el cuerpo? Distinguimos en primer término las condiciones según las cuales no es posible realizar una traslación sin que los puntos penetren en el cuerpo. Establecemos condiciones de primero y segundo orden para que, cuando se someta el cuerpo a isometrías que contengan rotaciones, los puntos fijen el cuerpo. Caracterizamos las condiciones de primer orden en términos de la disposición geométrica de las líneas que pasan por los puntos en la dirección de las normales a la superficie del cuerpo. Para el caso del tetraedro en $n = 3$ mostramos que las condiciones de segundo orden son consecuencia de su geometría intrínseca. Establecemos también el teorema algebraico $|\lambda| < tr(\mathbf{A})$ para matrices $\mathbf{A}$ móndrigas de dimensión 3, motivado por estas consideraciones, donde λ es valor propio de $\mathbf{A}$.

Sea $M^{n-1} = \partial K \subset E^n$ una variedad inmersa en el espacio euclidiano de n dimensiones, dotada de un campo normal unitario N global que apunta hacia el complemento de K; K un abierto simplemente conexo. Iremos dotando E^n de diferentes sistemas de coordenadas canónicas.

Definición. Sean $P = (p_0^0, \ldots, p_0^n)$ una $(n+1)-$ada de puntos de $M \subset E^n$, $N^0, \ldots, N^n$ las normales situadas en los puntos expresados en vectores columna con respecto a algún sistema de coordenadas. Decimos que los puntos fijan M bajo el grupo de isometrías, si para cualquier curva de isometrías $\varphi(t)$ de E^n,

$$\exists\ 0 \leq i \leq n : \varphi(-\varepsilon, \varepsilon)(p_0^i) \cap K \neq \varnothing. \blacksquare$$

1. Deslizamiento: condición de primer orden

La primera condición para que P fije M bajo el grupo de isometrías es que lo fije el grupo de traslaciones. En ese caso (denotando con b las traslaciones)

$$\forall\ b \neq 0\ \exists\ 0 \leq i \leq n : N^i \cdot b \leq 0 \tag{1.1}$$

Esto implica que cualquier subconjunto de $\{N^0, \ldots, N^n\}$ con n vectores es linealmente independiente. Pues si, por ejemplo, $\{N^0, \ldots, N^{n-1}\}$ es linealmente dependiente, existe algún vector b tal que $b \cdot N^0 = \ldots = b \cdot N^n = 0$, y entonces, ya sea $N^i \cdot b$ o $N^i \cdot (-b)$ es ≤ 0. También implica que 0 es una combinación convexa de N^i, pues de lo contrario existiría un hiperplano separando N^i de 0, es decir, un vector b tal que $N^i \cdot b > 0$. Existen, por tanto, $a_i > 0$ con $\Sigma_0^n a_i = 1$, $\Sigma_0^n a_i N^i = 0$. Resultará más sencillo trabajar con $n^i = a_{(i)} N^i$, $\Sigma_0^n n^i = 0$. Consideramos $n^i = n^i(P)$.

Utilizaremos para estos vectores normales los siguientes cálculos. Dados los n vectores $(n_a^0 ; \dots , n_a^n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ortogonales a $(1 , \dots , 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ($a \in \{1, \dots , n\}$ indica componentes) existen n vectores $(\omega_a^i , \dots , \omega_a^n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ con

$$\sum_{i=0}^{n} \omega_a^i n_b^i = \delta_{ab} , \quad \sum_{i=0}^{n} \omega_a^i = 0. \tag{1.2}$$

Es decir, las matrices $(n + 1) \times (n + 1)$

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} n^0 & \dots & n^n \\ & e & \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} \omega^0 & \\ & e \\ \omega^n & \end{pmatrix}$$

son inversas, donde $e = (n + 1)^{-1/2} (1 , \dots , 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Conmutando la multiplicación se tiene también

$$\sum_{a=1}^{n} \omega_a^i n_a^j + \frac{1}{n+1} = \delta^{ij}. \tag{1.3}$$

Sean $p^i = p^i (t) = A(t)\, p_0^i$, $i = 1 , \dots , n$ las trayectorias de los puntos P bajo la acción de curvas de isometrías $A (t) : (-\varepsilon , \varepsilon) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $A (0) = I$. Suponiendo que se satisface la condición (1.1) sólo en el caso en que las trayectorias $p^1 , \dots , p^n$ sean tangentes a M puede fallar que los puntos fijen M. Buscamos la condición de que p^0 sea tangente a M. Sean $p_a^i (t)$ los componentes de p^i. Escríbase

$$p^i = A (t)\, p_0^i = b (t) + R (t)\, p_0^i \tag{1.4}$$

descomponiendo $A (t)$ en traslación y rotación. Sean $n^i = n^i (P)$ las normales a M sobre las curvas. Tenemos $n^i \cdot p^i (t) = 0$, $i = 1 , \dots , n$ es decir

$$n^i \cdot (b' + R' p_0^i) = 0. \tag{1.5}$$

La matriz $N^0 = \begin{pmatrix} n^1 \\ \cdots \\ n^n \end{pmatrix}$ tiene inversa, por lo que

$$b' = (N^0)^{-1} (N^1 \cdot (R' p_o^1) , \dots , n^1 \cdot R' p_0^1))^T \tag{1.6}$$

Podemos interpretar esto como una ecuación diferencial ordinaria de la que se obtiene una única $b (t)$ para cada $R (t)$ (con condición inicial $b = 0$), que mantiene las trayectorias $p^i (t)$ sobre M.

Si $p^0(t)$ también es tangente a M, tendremos la ecuación (1.5) para $i = 0$ también. Sumando 1.5 en i.

$$\sum_{i=0}^{n} n^i \cdot R' p_0^i = 0 \tag{1.7}$$

Puesto que esto es válido para cualquier transformación antisimétrica R', 1.7 afirma que

$$\sum_{i=0}^{n} n^i \cdot p_0^{iT} \text{ es simétrica, o } \sum_{i=0}^{n} n^i \wedge p_0^i = 0 \tag{1.8}$$

(Utilizamos aquí los espacios de Grassman $G^P(\mathbb{R}^n)$). Si se interpretan n^i como fuerzas, éstas suman cero y tienen un momento angular cero.

Para cada R', n de las condiciones de (1.5) definen b' y la restante puede obtenerse de (1.8) que, por consiguiente, es la condición de primer orden para que los puntos p_0^i fijen M.

En caso de que se satisfaga la condición de primer orden, podemos calcular

$$\begin{pmatrix} n^0 \ldots n^n \\ e \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} b' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n^0 \cdot b' \\ n^n \cdot b' \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} n^0 \cdot R' p_0^0 \\ n^n \cdot R' p_0^n \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} b' \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \omega^0 \;\; \omega^n \\ e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n^0 \cdot R' p_0^0 \\ n^n \cdot R' p_0^n \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

Proposición 1.1

Sean $P, N \in (\mathbb{R}^n)^{n+1}$. Entonces

$$S = \sum_0^n n^i \cdot p^{iT} = S^T \Leftrightarrow p_a^i = S_{ab}\, \omega_b^i + \beta_a,\ \beta = \frac{1}{n+1} \sum_0^n p^i \tag{1.10}$$

Demostración. Dada $S_{ab} = \sum_{i=0}^{n} n_a^i p_b^i$,

$$\sum_{b=1}^{n} \omega_b^i\ S_{bu} = \sum_{j=0}^{n} \omega_b^i n_b^j p_a^j = \sum_{j=0}^{n} (\delta^{ij} - \frac{1}{n+1}) p_a^j = p_a^i - \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} p_a^j$$

por lo que $p_a^i = \sum_{b=1}^{n} \omega_b^i S_{ba} + \beta_a$. Inversamente, si escogemos p^i como en 1.9,

$$\sum_{i=0}^{n} n_a^i \cdot p_b^i = \sum_{i=0}^{n} \sum_{c=1}^{n} n_a^i \cdot (S_{bc}\, \omega_c^i + \beta_c) = \sum_{c=1}^{n} S_{bc} \sum_{i=0}^{n} \omega_c^i\, n_a^i = S_{ab}$$

Por lo que S resulta ser la matriz simétrica en cuestión, y cualquier valor de β es aceptable. ■

La condición de primer orden 1.8 tiene la caracterización geométrica siguiente. Escribimos <A> para el espacio generado por el conjunto o n-ada de vectores A.

Teorema 1.2
$P \in (M)^{n+1}$ satisfacen $S = \Sigma_0^n n^i \cdot p^{iT} = S^T$, si y sólo si cada plano de dimensión $n-2$ que intersecta o es paralelo a n de las líneas $L^i = \{ p^i + tn^i : t \in \mathbb{R}\}$ intersecta o es paralelo a la línea restante.

Demostración. Supongamos que $\Sigma_0^n p^i \wedge n^i = 0$. Sea Q^{n-2} un plano de dimensión $n-2$, con direcciones linealmente independientes $v_1, \ldots, v_{n-2}$ y con $q \in Q^{n-2}$. Supóngase que L^i intersecta Q^{n-2}, $i \neq j$. Entonces $q - p^i \in \langle n^i, v_1, \ldots, v_{n-2} \rangle$ por lo que

$$(q - p^i) \wedge n^i \wedge v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-2} = 0.$$

La misma ecuación se obtiene si L^i es paralelo a Q^{n-2}, pues en ese caso n^i es combinación lineal de $v_1^1, \ldots, v_{n-2}$, y $n^i \wedge v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-2} = 0$. Por tanto

$$(q - p^j) \wedge n^j \wedge v_1 \wedge \quad \wedge v_{n-2} = -\sum_{i \neq j}^{n} (q - p^i) \wedge v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-2} = 0,$$

puesto que $\Sigma_0^n n^i = 0$ y $\Sigma_0^n p^i \wedge n^i = 0$. Se infiere que L^j también intersecta o es paralelo a Q^{n-2}, según si $n^j \wedge v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-2}$ es diferente o igual a cero.

Demostramos la implicación inversa primero para $n = 2$ y luego reducimos los demás casos a éste. En el caso $n = 2$ existe algún punto q en el que se intersectan L^0 y L^1, puesto que no son paralelas. Por consiguiente, L^2 también pasa por q y tenemos $p^i = q + \alpha^i n^i$ $i = 0, 1, 2$, por lo que $\Sigma_0^2 p^i \wedge n^i = \Sigma_0^2 (q + \alpha^i n^i) \wedge n^i = 0$.

Para $n \geq 3$ exprésese $\omega = \Sigma_0^n p^i \wedge n^i$ en términos de $n_1, \ldots, n_n$. Si $\omega \neq 0$, renumerando si es necesario, $n_1 \wedge n_2$ no tiene coeficiente cero, por lo que $\pi^* \omega \neq 0$, donde $\pi : E^n \to E^2$ es la proyección sobre $<n_1, n_2>$. Por las condiciones de independencia lineal de las normales $\pi(T^s)$, $\pi(T^1)$, $\pi(T^2)$, satisfacen la hipótesis de intersección para el caso $n = 2$, por lo que podemos concluir que $0 = \Sigma_0^2 \pi(p^i) \wedge \pi(n^i) = \pi^* \omega$, lo cual es una contradicción. (Identificamos los vectores con sus formas duales vía el producto interior.) ■

2. Condición de segundo orden

Queremos ahora calcular hasta el segundo orden, si la trayectoria $p^0(t)$, asumiendo que es tangente a M en $t = 0$, se introduce en M. En el caso de una trayectoria $x(t)$ de M, sea $T(t) = x'(t)$ su vector tangente. Omitiendo t, puesto que $0 = x' \cdot N$,

$$0 = x'' \cdot N + x' \cdot N' = x'' \cdot N + B(x', x') \tag{2.1}$$

donde B es la segunda forma fundamental de M, de tal modo que, suponiendo que N apunta hacia afuera, en $t = 0$

$$(p' \cdot N)' = p'' \cdot N + B(p', p') > 0 \tag{2.2}$$

implica que el punto se desplaza hacia el exterior de la variedad en ambos sentidos de la curva.

Obsérvese que para las trayectorias $p^i(t)$, en caso de ser tangentes, $(p^{i\prime} \cdot n^i)' = a_i (p^{i\prime} \cdot N^i)' + a_i' p^{i\prime} \cdot N^i = a_i (p^{i\prime} \cdot N^i)$,

Supongamos que para $i = 1, \ldots, n$ tenemos $(p^{i\prime} \cdot n^i)' = 0$ (estos n puntos tienen trayectorias en M), y $(p^{0\prime} \cdot n^0)' < 0$ (la trayectoria restante se introduce en el interior de K). Sumando,

$$\begin{aligned} 0 > \sum_{i=0}^{n} (p^{i\prime} \cdot n^i)' &= \sum_{i=0}^{n} n^i \cdot (b'' + R'' p_0^i) + p^{i\prime} \cdot n^{i\prime} \\ &- \sum_{i=0}^{n} n^i \cdot R'' p_0^i + \sum_{i=0}^{n} a_i B^i (p^{i\prime}, p^{i\prime}) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Para evaluar en $t = 0$, observamos que para cualquier camino $R\ (t)$ de rotaciones con $R\ (0) = I$,

$$0 = (R^{T''} R + 2R^{T'} R' + R^T R'') \big|_0 \Rightarrow R''^S \big|_0 = -(R'^T R') \big|_0.$$

Escribamos también

$$b^i\ (X, Y) = a_{(i)} B^i\ (X, Y) = < D_X (n^i), Y > \tag{2.4}$$

La condición de segundo orden es, para $t = 0$,

$$\sum_{i=0}^{n} b^i\ (p^{i\prime}, p^{i\prime}) < \sum_{i=0}^{n} (R' n^i) \cdot (R' p_0^i) \tag{2.5}$$

donde $p^{i\prime} = b' + R' p_0^i = R' p_0^i - \sum_{j=0}^{n} (n^j \cdot R' p_0^j)\ \omega^j$ (véase 1.6).

3. *Condiciones de segundo orden para el tetraedro en n = 3*

Consideremos un tetraedro en $\mathbb{R}^3$, sujetado de los puntos P. En este caso la condición de segundo orden es

$$0 < \sum_{i=0}^{3} (R' n^i) \cdot (R' p^i)$$

Tomemos el origen en p^0, y definamos las matrices

$$N_0 = (n_1, \ldots, n_3), \quad P_0 = (p_1, \ldots, p_3).$$

La condición de segundo orden puede escribirse

$$0 < tr((R' N_0)^T (R' P_0)) = tr\ (N_0^T R' P_0) = tr\ (R' P_0 N_0^T R'^T)$$

Si se cumple la condición de primer orden, $P_0 N_0^T = S$ es simétrica y, escribiendo con respecto a una base ortonormal de sus vectores propios,

$$tr\ (R' P_0 N_0^T R'^T) = \sum_{1 < a, b < 3} R'_{ab} \lambda_b R'_{ab} = \frac{1}{2} \sum_{1 < a, b < 3} (\lambda_a + \lambda_b) R'^2_{ab}$$

es positivo, si y sólo si cualquier par de valores propios tiene suma positiva. Por último obsérvese que

$$P_0 N_0^T \text{ es conjugado de } N_0^T P_0 N_0^T (N_0^T)^{-1} = N_0^T P_0$$

Por tanto, si se cumple la condición de primer orden, en el caso $n = 3$, la condición de segundo orden se cumple, si y sólo si los valores propios λ de $\mathbf{A} = N_0^T P_0$ satisfacen la condición $\lambda < tr(\mathbf{A})$.

El siguiente teorema demuestra que se satisface esta última condición. Es fácil ver que las hipótesis sobre la matriz **A** corresponden precisamente a que los puntos P se encuentren en las caras de un tetraedro con normales N, donde tomamos el origen en P^0. El teorema demuestra más de lo necesario, extendiéndose al caso de valores propios complejos.

Teorema 3.1
Sea $\mathbf{A} = (a_{ij})$ una matriz 3×3 que satisfaga

$$a_{ii} > 0, \sum_i a_{ij} > 0, a_{ij} < a_{ii} \quad 1 \leq i, j \leq 3$$

(**A** es móndriga de dimensión 3). Entonces cada valor propio z de **A** satisface

$$|z| < tr(\mathbf{A}). \blacksquare$$

Para la demostración consideramos la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & a-d & a-e \\ b-g & b & b-f \\ c-h & c-i & c \end{pmatrix}$$

que satisface las hipótesis si cada letra representa un número no negativo y

$$t_1 = g + h, \quad t_2 = d + i, \quad t_3 = e + f$$

son menores que $t = a + b + c$. El polinomio característico de **A** tiene la forma

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^3 - t\lambda^2 + a_1\lambda + a_0.$$

Demostramos primero que el teorema es consecuencia de las desigualdades

$$\begin{gathered} |a_0| < t^3,\ |a_1| < t^2,\ a_1 t + a_0 > 0 \\ t^6 - a_0^2 - a_0\, t^3 - a_1\, t^4 > 0. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Luego demostramos las desigualdades.

Para mostrar que las raíces reales de $p_A\,(\lambda)$ satisfacen $\lambda \leq t$ mostramos que

$$p_A\,(t) > 0,\quad p_A'\,(t) > 0,\quad p_A''\,(t) > 0,\quad p_A'''\,(t) > 0\,, \tag{3.2}$$

que implican $p_A\,(\lambda) > 0$ para $\lambda \geq t$. Puesto que

$$\begin{aligned} p_A\,(t) &= a_t\, t + a_0 \\ p_A'\,(t) &= a_1 + t^2 \\ p_A''\,(t) &= 4t \end{aligned} \tag{3.3}$$

y $p_A'''\,(\lambda) \equiv 6$, las desigualdades 3.1 claramente implican las desigualdades 3.2. De manera similar, para mostrar que las raíces reales satisfacen $-\,t \leq \lambda$, mostramos que

$$p_A\,(-t) < 0,\quad p_A'\,(-t) > 0,\quad p_A''\,(-t) < 0,\quad p_A'''\,(-t) > 0 \tag{3.4}$$

que implican $p_A\,(\lambda) < 0$ para $\lambda \leq -\,t$. Puesto que

$$\begin{aligned} p_A\,(-\,t) &= -\,2t^3 - a_1\, t + a_0 \\ p_A'\,(-\,t) &= 5t^2 + a_1 \\ p_A''\,(-\,t) &= -\,8t \end{aligned} \tag{3.5}$$

las desigualdades 3.1 implican las desigualdades 3.4.

Para demostrar la desigualdad $|z| < t$ para raíces complejas de $p_A\,(\lambda)$, utilizamos el siguiente procedimiento. Suponiendo que $p_A\,(\lambda)$ tiene una raíz compleja $z = x + iy$ y alguna raíz real r, observamos que

$$(\lambda^2 - 2x\lambda + |z|^2)\,(t - r) = \lambda^3 - t\lambda^2 + a_1\,\lambda + a_0\,.$$

Igualando coeficientes,

$$\begin{aligned} t &= 2x + r \\ |z|^2\, r &= a_0 \\ |z|^2 + 2rx &= a_1 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Eliminando r y x, obtenemos una ecuación cúbica para $|z|^2$,

$$Q\,(|z|^2) = 0, \text{ donde } Q\,(\mu) = \mu^3 - a_1\,\mu^2 - ta_0\,\mu - a_0^2.$$

Aplicando la misma técnica, mostramos que las raíces reales μ de Q satisfacen $\mu < t^2$, lo que implica que $|z|^2 < t^2$. Ahora requerimos que

$$\begin{aligned} Q\,(t^2) &= -\,a_0^2 - a_0\,t^3 - a_1\,t^4 + t^6 > 0 \\ Q'\,(t^2) &= -\,a_0\,t - 2a_1\,t^2 + 3t^4 > 0 \\ Q''\,(t^2) &= -ub1 + 6t^2 > 0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

La primera es un de las desigualdades que demostraremos. Las otras dos son consecuencias de las primeras desigualdades de 3.1.

A fin de demostrar las desigualdades, primero mostraremos una relación que existe entre los polinomios Q y p_A. Si $\det A = -\,a_0 \neq 0$,

$$\begin{aligned} Q\,(\lambda) &= -\,a_0^2 - ta_0\lambda - a_1\lambda^2 + \lambda^3 \\ &= \frac{\lambda^3}{a_0}\left[-\,(\frac{a_0}{\lambda})^3 - t\,(\frac{a_0}{\lambda})^2 - a_1\,(\frac{a_0}{\lambda}) + a_0\right] \\ &= -\,\frac{\lambda^3}{\det A}\,p_A\,(\frac{\det A}{\lambda}) \end{aligned}$$

El siguiente problema es maximizar $p_A\,(0)$, $p'_A\,(0)$ y minimizar $p_A\,(0)$, $p'_A\,(0)$, $p_A\,(t)$, $p'_A\,(t)$, $Q\,(t^2)$, para obtener las desigualdades 3.1. Fijamos a, b, c, y por lo tanto t. Los máximos y mínimos se toman en el interior de la región $\mathfrak{R}$ dada por las condiciones

$$0 \leq \min\,(d, e, f, g, h, i)\,, \quad \max\,(d, e, f, g, h, i) \leq t,$$
$$0 \leq \min\,(g + h, d + i, e + f)\,, \quad \max\,(g + h, d + i, e + f) \leq t.$$

Obsérvese primero que en cualquiera de las caras 1 a 6 dimensionales de esta región, los valores extremos se encuentran en las fronteras. Concentrémonos en la variable g.

En cualquier cara en la que g es una variable, h también puede serlo o podemos tener $h = t - g$. Es decir, podemos tener $\dfrac{\partial h}{\partial g}$ igual a cero o igual a $-\,1$. En cualquiera de estos casos $p_A\,(\lambda)$ es lineal en g, por lo que en cada cara se realizan los valores extremos en la frontera. Asimismo, las segundas derivadas de a_0 y a_1 son cero. Como consecuencia, encontramos que en cualquiera de los dos casos,

$$\frac{\partial^2}{\partial g^2} Q(\lambda) = -2\left(\frac{\partial a_0}{\partial g}\right)^2 \leq 0,$$

por lo que los valores mínimos se realizan en las fronteras.

Por consiguiente, sólo es necesario evaluar las funciones $p_A(0)$, $p_A'(0)$, $p_A(t)$, $Q(t^2)$, en los vértices para encontrar los máximos y los mínimos requeridos.

Consideremos $a_0 = p_A(0)$. Definimos los casos

i) $g + h = d + i = e + f = 0$;
ii) $g + h = d + i = 0,\ e + f = t$;
iii) $g + h = 0,\ d + i = e + f = t$;
iv) $g + h = d + i = e + f = t$.

En los casos *i* o *ii* $- a_0 = \begin{vmatrix} a & a & a-e \\ b & b & b-f \\ c & c & c \end{vmatrix} = 0.$

$$\text{En el caso } iii - a_0 = \begin{vmatrix} a & a-d & a-e \\ b & b & b-f \\ c & c-i & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & 0 & 0 \\ b & b & b-f \\ c & c-i & c \end{vmatrix}$$

$$= t\,(fc + ib - fi) = \begin{cases} 0 & f = i = 0; \\ t^2 b & f = 0, i = t; \\ t^2 c & f = t, i = 0, \\ -at^2 & f = i = t \end{cases}$$

$$\text{En el caso } iv - a_0 = \begin{vmatrix} a & a-d & a-e \\ b-g & b & b-f \\ c-h & c-1 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b-g & b & b-f \\ c-h & c-i & c \end{vmatrix} = 0$$

Por lo tanto $|a_0| < t^3$.

Consideremos ahora $a_1 = p_A'(0)$.

$$a_1 = \begin{vmatrix} a & a-d \\ b-g & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a-e \\ c-h & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b-f \\ c-i & c \end{vmatrix}$$

$$= a\,(g+h) + b\,(d+i) + c\,(e+f) - (dg + eh\,fi)\,.$$

Claramente $a\,(g+h)+b\,(d+i)+c\,(e+f)<t^2$ en el interior de $\mathfrak{R}$, mientras que

$$\begin{aligned}(dg+eh+fi) &< (t-i)\,g+e\,(t-g)+(t-e)\,i\\ &= t\,(g+e+i)-(ig+eg+ei)\end{aligned}$$

Si $g=0$,

$$(dg+eh+fi)\leq t\,(e+i)-ei<t^2$$

en $\mathfrak{R}$, donde hemos considerado los casos $(e,i)\in\{0,t\}\times\{0,t\}$. Si $g=t$,

$$(dg+eh+fi)\leq t^2-ei<t^2$$

En $\mathfrak{R}$. Por lo tanto $|a_1|<t^2$.

Consideremos ahora

$$p_A(t)=\begin{vmatrix} t-a & d-a & e-a\\ g-b & t-b & f-b\\ h-c & i-c & t-c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3\\ g-b & t-b & f-b\\ h-c & i-c & t-c\end{vmatrix}$$

En los casos i y ii

$$p_A(t)=\begin{vmatrix} 0 & 0 & t_3\\ -b & t-b & f-b\\ -c & -c & t-c\end{vmatrix}=ctt_3>0.$$

En el caso iii

$$p_A(t)=\begin{vmatrix} 0 & 0 & t\\ -b & t-b & f-b\\ -c & i-c & t-c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & t & t\\ -b & t & f\\ -c & i & t\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & t\\ -b & t-f & f\\ -c & i-t & t\end{vmatrix}=t\,(db+ec)>0$$

En el caso iv

$$p_A(t)=\begin{vmatrix} t & t & t\\ g-b & t-b & f-b\\ h-c & i-c & t-c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} t & 0 & 0\\ g-b & t-g & f-g\\ h-c & i-h & t-h\end{vmatrix}=t\begin{vmatrix} h & f-g\\ i-h & g\end{vmatrix}$$

$$=t\,(hf+ig-fi)=t\,((t-g)\,f+ig-fi)\,.$$

Puesto que la cantidad que estamos considerando es simétrica en todas sus variables, podemos limitarnos a los casos

$$g = 0 \Rightarrow p_A(t) = t\,(t - i)\,f > 0 \text{ en } \Re,$$
$$g = t \Rightarrow p_A(t) = t\,(t - f)\,i > 0 \text{ en } \Re.$$

Consideremos ahora $Q(t^2)$. En los casos en que $a_0 = 0$ tenemos

$$Q(t^2) = t^6 - a_1 t^4 > 0\,.$$

Quedan tres subcasos del caso iii.

a) $f = 0,\ i = t$

$$Q(t^2) = \frac{t^6}{a_0}\, p_A\left(\frac{a_0}{t^2}\right) = -\frac{t_4}{b}\, p_A(-b) = -\frac{t^4}{b}\begin{vmatrix} b-a & -a & -a \\ -b & -2b & -b \\ -c & t-c & -b-c \end{vmatrix}$$

$$= \frac{t^4}{b}\begin{vmatrix} b+a & -a & -a \\ b & -2b & -b \\ c & t-c & -b-c \end{vmatrix} = \frac{t^4}{b}\begin{vmatrix} b & 0 & -a \\ 0 & -b & -b \\ -b & t+b & -b-c \end{vmatrix} = \frac{t^4}{b}\begin{vmatrix} b & 0 & -a \\ 0 & -b & -b \\ 0 & t+b & -c \end{vmatrix}$$

$$= t^1 \begin{vmatrix} -b & -b \\ t+b & -t \end{vmatrix} = bt^4\,(2t + b) > 0\,.$$

b) $f = t\,,\ i = 0$. Este caso es simétrico al anterior.

c) $f = i = t$.

$$Q(t^2) = \frac{t^6}{a}\, p_A^{(a)}$$

$$= \frac{t^6}{a}\begin{vmatrix} 0 & -a & -a \\ -b & a-b & t-b \\ -c & t-c & a-c \end{vmatrix}$$

$$= \frac{t^6}{a}\begin{vmatrix} 0 & 0 & -a \\ -b & a-t & t-b \\ -c & t-a & a-c \end{vmatrix}$$

$$= t^6 \begin{vmatrix} b & a-t \\ c & t-a \end{vmatrix} = t^6(t-a)\,(b+c) = t^6(b+c)^2 > 0$$

Hemos demostrado cada desigualdad de 3.1, completando la demostración del teorema. ■

Referencias bibliográficas

Bracho, J., L. Montejano y J. Urrutia, *Immobilization of Smooth Convex Figures*, 1992 (en prensa).

Czyzowickz, J., I. Stojmenovic y Jorge Urrutia, *Immobilizing a Shape*, Department d'Informatique, Université du Québec à Hull, rr90/11-18, 1990.

Hilbert, D. y S. Cohn-Vossen, *Geometry and Imagination*, Nueva York, Chelsea Publishing Company, 1952.

Horn, R. A. y C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge, Cambridge University Press, 1985.

Kuperberg, W., *DIMACS Workshop on Polytopes*, Rutgers University, enero de 1990.

Markenscoff, X., L. Ni y Ch. H. Papadimitriou, "The Geometry of Grasping", *International Journal of Robotics Research*, vol. 9, núm. 1, 1990, pp. 61-74.