CIDE

NÚMERO 35

Adolfo García de la Sienra

EL EQUILIBRIO COMPETITIVO

La finalidad de este trabajo es hacer una presentación didácticamente útil y autocontenida —a la vez que lógicamente rigurosa— de la teoría del equilibrio competitivo, una presentación que pueda ser utilizada como apoyo en un curso a nivel de maestría o como una primera introducción al tema a nivel de doctorado. El material es conocido, por lo que el único aporte del trabajo consiste en el conjuntamiento y ordenamiento del mismo, en un intento por simplificar las demostraciones, así como en una demostración un tanto diferente de algunos resultados centrales. Incluyo una breve bibliografía al final para beneficio de aquellos lectores que deseen profundizar sobre el tema. Una exhaustiva bibliografía se encuentra en Debreu (1982)

1 CORRESPONDENCIAS

Una *correspondencia* $\varphi: S \to T$ de un conjunto S en un conjunto T es una función de S en el conjunto potencia de T, $P(T)$, que asigna a cada elemento x de S un subconjunto no vacío $\varphi(x)$ en $P(T)$. El *grafo* de una correspondencia φ es un subconjunto del producto cartesiano $S \times T$ definido por

$$G(\varphi) = \{(x, y) \in S \times T \mid y \in \varphi(x)\}.$$

Una correspondencia $\varphi: S \to T$ *asume valores convexos* si T es un espacio vectorial real y $\varphi(x)$ es convexo para todo $x \in S$.

DEFINICIÓN 1.1: Una correspondencia $\varphi: S \to T$ de un subconjunto de un espacio euclideano S en un subconjunto de un espacio euclideano T es *semicontinua superiormente en el punto* x_0 (scs) syss hay una vecindad de x_0 en la que φ es acotada y se cumple la siguiente condición: si (x_k) es una secuencia en S que converge a x_0, (y_k) es una secuencia en T que converge a un punto y_0, y $y_k \in \varphi(x_k)$ para todo k, entonces $y_0 \in \varphi(x_0)$. φ es scs *sobre* S si lo es en cada punto de S. De manera concisa:

$$[(x_k) \to x_0, \quad (y_k) \to y_0, \quad y_k \in \varphi(x_k)] \Rightarrow [y_0 \in \varphi(x_0)].$$

LEMA 1.2: *Si $\varphi: S \to T$ es una correspondencia scs en $x \in S$ entonces $\varphi(x)$ es compacto.*

Demostración: Se tiene que mostrar que $\varphi(x)$ es acotado y cerrado. Por definición de correspondencia scs, hay una vecindad V de x, en el espacio euclideano en que S está contenido, tal que $\varphi(V \cap S) = \bigcup_{z \in V \cap S} \varphi(z)$ está acotado. Pero $\varphi(x) \subseteq \varphi(V \cap S)$, por lo que $\varphi(x)$ también es acotado. Por lo demás, sea (y_k) una secuencia arbitraria en $\varphi(x)$ que converge al límite y_0, y considérese la secuencia que consta de x misma repetida (la cual converge trivialmente a x). Es inmediato que $y_0 \in \varphi(x)$, con lo que se ve que $\varphi(x)$ es cerrado también. □

LEMA 1.3: *Si $\varphi_i: S \to T_i$ es una correspondencia scs para cada $i = 1, \ldots, n$, entonces la correspondencia $\varphi: S \to T$, definida por la condición $\varphi(x) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_i(x)$, donde $T = \prod_{i=1}^{n} T_i$, también es scs.*

Demostración: Sea x_0 un punto de S y (x_k) una secuencia en S que converge a x_0 y $(y_k) = (y_{k1}, \ldots, y_{kn})$ ($y_{ki} \in T_i$ para $i = 1, \ldots, n$) una secuencia en T, que converge a un punto y_0 en T, tal que $y_k \in \varphi(x_k)$. Notamos que por hipótesis hay una vecindad V_i de x_0 en la que φ_i es acotada. Claramente la intersección $V = V_1 \cap \cdots \cap V_n$ es asimismo una vecindad de x_0 y es fácil ver que φ es acotada en V. Así, sólo falta demostrar que $y_0 \in \varphi(x_0)$. Notamos, en primer lugar, que cada una de las secuencias coordenadas también es convergente, convergiendo la secuencia (y_{ki}) al punto y_{0i} de T_i. Por lo demás, $y_k \in \varphi(x_k)$ significa que $y_{ki} \in \varphi_i(x_k)$ lo cual implica —puesto que φ_i es scs— que $y_{0i} \in \varphi_i(x_0)$. Se concluye que $y_0 = (y_{01}, \ldots, y_{0n}) \in \prod_{i=1}^n \varphi_i(x_0) = \varphi(x_0)$. □

DEFINICIÓN 1.4: Una correspondencia $\varphi: S \to T$ es *semicontinua inferiormente en el punto* x_0 (sci) syss, para toda secuencia (x_k) que converge al punto x_0 en S y $y_0 \in \varphi(x_0)$, existe una secuencia (y_k) que converge a y_0 en T tal que $y_k \in \varphi(x_k)$ para todo k. φ es sci *sobre* S si lo es en cada punto de S. Más concisamente:

$$[(x_k) \to x_0, \quad y_0 \in \varphi(x_0)] \Rightarrow [\text{existe } (y_k) \text{ tal que } ((y_k) \to y_0 \text{ y } y_k \in \varphi(x_k)].$$

DEFINICIÓN 1.5: Una correspondencia $\varphi: S \to T$ es *continua en el punto* x_0 si φ es a la vez scs y sci en x_0. La correspondencia es continua *sobre* S si lo es en cada punto de S.

DEFINICIÓN 1.6: Un punto fijo de una correspondencia $\varphi: S \to S$ es un elemento $x_0 \in S$ tal que $x_0 \in \varphi(x_0)$.

TEOREMA 1.7: (Kakutani). *Si S es un subconjunto no vacío, convexo y compacto de un espacio euclideano, y $\varphi: S \to S$ es una correspondencia semicontinua superiormente que asume valores convexos, entonces φ tiene un punto fijo.*

Se omite la demostración de este teorema debido a su complejidad.

COROLARIO 1.8: (Brouwer). *Si S es un subconjunto no vacío, convexo y compacto de un espacio euclideano, y $f: S \to S$ es una función continua, entonces f tiene un punto fijo.*

Demostración: Notamos, en primer lugar, que si f es continua entonces la correspondencia $\varphi: S \to S$ definida por $\varphi(x) = \{f(x)\}$ es scs, de modo que tiene un punto fijo x_0. Es fácil ver que x_0 es un punto fijo de f también. □

2 JUEGOS

De aquí en adelante, sean $N = \{1, \ldots, n\}$ y $S = \prod_{i=1}^n S_i$.

DEFINICIÓN 2.1: Un *juego en forma estratégica* es una estructura

$$\langle S_1, \ldots, S_n, f_1, \ldots f_n \rangle$$

tal que

(1) $\forall i \in N$, S_i es un conjunto no vacío;

(2) $\forall i \in N$, $f_i : S \to \mathbb{R}$ es continua en S y lineal en s_i.

DEFINICIÓN 2.2: Un *equilibrio de Cournot-Nash* es un punto $s^* \in S$ tal que, $\forall i \in N$, s_i^* maximiza $f_i(x_i, s^*_{N \setminus i})$.

LEMA 2.3: (Weierstrass). *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función donde A es un subconjunto de $\mathbb{R}^m$. Si A es compacto y f es continua en A entonces f tiene tanto un mínimo como un máximo.*

Demostración: Es suficiente que el rango de f, ran f, sea compacto para que la función tenga tanto mínimo como máximo. En efecto, si ran f es acotado entonces tiene tanto un supremo como un ínfimo; pero si ran f es cerrado entonces tales extremos pertenecen a ran f y son el máximo y el mínimo de la función.

Si ran f no fuera acotado, habría una secuencia estrictamente creciente (o decreciente) $(f(x_k))$ de puntos de ran f tal que, para todo $r > 0$, existe un entero positivo N tal que, para todo $k > N$, $|f(x_k)| > r$. Sin embargo, como A es compacto, la secuencia (x_k) tiene una subsecuencia convergente (x_j) tal que, por la continuidad de f, la secuencia $(f(x_j))$ converge a un punto $y_0 = f(x_0)$ de A. Esto quiere decir que para todo $\epsilon > 0$ existe un entero positivo N tal que, para todo $j > N$, $|f(x_0) - f(x_j)| < \epsilon$. Esto implica que la secuencia no se aleja más allá de una distancia ϵ de $f(x_0)$, por lo que no puede haber términos de la misma mayores en valor absoluto que algún r especificado. Esto claramente contradice que para todo $k > N$, $|f(x_k)| > r$.

Más aun, si (y_k) es una secuencia convergente con límite y_0 en ran f, sea —como antes— (x_k) una secuencia en A tal que $y_k = f(x_k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Nuevamente, hay una subsecuencia (x_j) de (x_k) en A, que converge a un punto x_0 de A, tal que $y_j = f(x_j)$. Como toda subsecuencia de una secuencia convergente converge al mismo límite, por la continuidad de f el límite de (y_k) es precisamente $y_0 = f(x_0)$ que claramente pertenece a ran f. Esto establece que ran f es cerrado. □

LEMA 2.4: *Si $S_1, \ldots S_n$ es una familia de subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^m$, entonces $S = \prod_{i=1}^n S_i$ es compacto.*

Demostración: Como $S_1, \ldots, S_n$ son acotados, existen puntos $x_1, \ldots, x_n$ ($x_i \in S_i$ para $i = 1, \ldots, n$) y bolas cerradas $B(x_1, r_1), \ldots, B(x_n, r_n)$ centradas en $x_1, \ldots, x_n$ y con radios $r_1, \ldots, r_n$ respectivamente, tales que $S_i \subseteq B(x_i, r_i)$. Sea $r = [\sum_{i=1}^n r_i^2]^{1/2}$ y $x = (x_1, \ldots x_n)$. Entonces es fácil ver que $S \subseteq B(x, r)$. En efecto, si $y = (y_1, \ldots, y_n) \in S$, entonces $d(x_i, y_i) < r_i \leq r$ y, por ende, $d(x, y) = ([d(x_1, y_1)]^2 + \cdots + [d(x_n, y_n)]^2)^{1/2} \leq [\sum_{i=1}^n r_i^2]^{1/2} = r$.

Sea ahora $(x_k) = (x_{k1}, \cdots, x_{kn})$ una secuencia convergente de puntos de S. Entonces la secuencia (x_{ki}) $(i = 1, \ldots, n)$ converge a un punto x_{0i} que está en S_i porque S_i es cerrado. Luego, el punto $x_0 = (x_{01}, \cdots, x_{0n})$, que es el límite de la secuencia $(x_k) = (x_{k1}, \cdots, x_{kn})$, pertenece a S, lo cual establece que S es cerrado. □

LEMA 2.5: *Si $S = S_1, \cdots S_n$ es una familia de subconjuntos convexos no vacíos de $\mathbb{R}^m$, entonces $\prod_{i=1}^n S_i$ es convexo y no vacío.*

Demostración: Sean $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $y = (y_1, \ldots, y_n)$ elementos arbitrarios de S. Si $\alpha \in [0, 1]$, está claro que $\alpha x_i + (1 - \alpha) y_i \in S_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Por ende, $\alpha x + (1 - \alpha) y = (\alpha x_1 + (1 - \alpha) y_1, \ldots, \alpha x_n + (1 - \alpha) y_n) \in S$. □

¿Qué tiene que ver toda la discusión anterior acerca de correspondencias y puntos fijos con la existencia de equilibrios de juegos? La respuesta es que la existencia de tales equilibrios puede ser vista como la existencia de puntos fijos de ciertas correspondencias. En la demostración del siguiente teorema veremos como se establece dicha existencia; por lo pronto es importante aprender a conceptualizar los equilibrios en términos de puntos fijos. Fijémonos en las correspondencias $\mu_i: S \to S_i$ definidas por las condiciones

$$\mu_i(s) = \{x \in S_i \mid f(x, s_{N\setminus i}) = \text{máx}\, f(y, s_{N\setminus i})\}$$

Claramente, para cada $i \in N$, μ_i asigna a cada estrategia conjunta s el conjunto de todas las estrategias del *iésimo* jugador que maximizan su función de pagos o utilidad f_i, dado que los otros jugadores escogieron las estrategias $s_{N\setminus i}$. Claramente, si definimos la correspondencia $\mu: S \to S$ mediante la condición

$$\mu(s) = \mu_1(s) \times \cdots \times \mu_n(s),$$

entonces una estrategia conjunta $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ es un equilibrio de Cournot-Nash para el juego si $f(s_i^*, s_{N\setminus i}^*) = \text{máx}\, f(y, s_{N\setminus i}^*)$ para todo $i \in N$; *i.e.* si $s_i^* \in \mu_i(s^*)$ para todo $i \in N$. Esto es equivalente a decir que $s^* \in \mu(s^*)$ o —lo que es lo mismo— que s^* es un punto fijo de μ. En resumen, *un equilibrio de Cournot-Nash para el juego* $\langle S_i, f_i\rangle_{i\in N}$ *es un punto fijo de la correspondencia* μ *como se definió arriba.*

TEOREMA 2.6: (Nash). *Si, para todo* $i \in N$, *el conjunto* S_i *es un subconjunto no vacío, compacto y convexo de un espacio euclídeo, y* f_i *es una función continua con valores reales sobre* S *que es lineal en su iésima variable, entonces el juego* $\langle S_i, f_i\rangle$ *tiene un equilibrio.*

Demostración: Para cada $i \in N$, sea

$$\mu_i(s) = \{x \in S_i \mid f(x, s_{N\setminus i}) = \text{máx}\, f(y, s_{N\setminus i})\}$$

y defínase la correspondencia $\mu: S \to S$ mediante la condición

$$\mu(s) = \mu_1(s) \times \cdots \times \mu_n(s),$$

Sólo hay que demostrar que μ tiene un punto fijo, para lo cual necesitamos usar el teorema de Kakutani. Por ende, es suficiente establecer lo siguiente:

(1) S es un subconjunto no vacío y convexo de un espacio euclideano;

(2) S es compacto;

(3) μ_i, y por ende μ es una correspondencia scs para todo $i \in N$;

(4) $\mu(s)$ es convexo para todo $s \in S$.

Como $S_1, \ldots, S_n$ son conjuntos convexos no vacíos, por el Lema 2.13 S es convexo y no vacío. Se sigue asimismo por el Lema 2.12 que S es compacto.

Para mostrar (3), sabemos por el Lema 1.3 que el producto cartesiano de correspondencias scs es una correspondencia scs, por lo que sólo tenemos que demostrar que μ_i es una correspondencia y que es scs para i arbitrario. Antes que nada, notamos que $\mu_i(s)$ es un subconjunto no vacío de S_i, pues S es compacto y f_i es continua en S. Sea pues x_0 un punto arbitrario de S, (x_k) una secuencia en S que converge al límite x_0, (y_k) una secuencia en S_i que converge a y_0, y supóngase que $y_k \in \mu_i(x_k)$ para todo k. Tenemos que mostrar que hay una vecindad de x_0 en la que μ_i es acotada y —además— que $y_0 \in \mu_i(x_0)$. Pero es obvio que μ_i es acotada en cualquier vecindad de cualquier punto de S, pues el codominio de μ_i, S_i es compacto. Por lo demás, el hecho de que y_k está en $\mu_i(x_k)$ implica que $f_i(y_k, x_{kN\setminus i}) \geq f_i(z, x_{kN\setminus i})$ para todo $z \in S_i$. En el límite, $f_i(y_0, x_{0N\setminus i}) \geq f_i(z, x_{0N\setminus i})$, de modo que $y_0 \in \mu_i(x_k)$.

Finalmente, mostraremos que $\mu_i(s)$ es convexo para $s \in S$ arbitrario. Sean α y β números no negativos tales que $\alpha + \beta = 1$, y sean $x, y \in \mu_i(s)$. Entonces $f_i(x, s_{N\setminus i}) = f_i(y, s_{N\setminus i}) = \text{máx}\, f_i(s_i, s_{N\setminus i})$ y tenemos —puesto que f_i es lineal en el iésimo componente, $f_i(\alpha x + \beta y, s_{N\setminus i}) = \alpha f_i(x, s_{N\setminus i}) + \beta f_i(y, s_{N\setminus i}) = \text{máx}\, f_i(s_i, s_{N\setminus i})$ y se tiene que $\alpha x + \beta y \in \mu_i(s)$. □

LEMA 2.7: (Berge) *Sean X, Y subconjuntos de un espacio euclídeo, $f: X \times Y \to \mathbb{R}$ una función continua y $\varphi: X \to Y$ una correspondencia también continua. Entonces la correspondencia μ definida por la condición*

$$\mu(x) = \{y \in \varphi(x) \mid f(x, y) = \text{máx}_{\,z \in \varphi(x)} f(x, z)\}$$

es semicontinua superiormente.

Demostración: Notamos primero que por el Lema 1.2 $\varphi(x)$ es compacto para todo $x \in X$ y por ende —gracias a su continuidad— $f(x, y)$ asume un máximo con respecto a y sobre $\varphi(x)$. Dado $x \in X$, sea V una vecindad de x en la que φ es acotada, *i.e.* $\varphi(V \cap X) = \bigcup_{z \in V \cap X} \varphi(z)$ es acotada. Como $\mu(x) \subseteq \varphi(x)$ para todo $x \in X$, es inmediato que $\mu(V \cap X) = \bigcup_{z \in V \cap X} \mu(z) \subseteq \varphi(V \cap X)$ y por ende μ es acotada en la vecindad V de x. Sea ahora (x_k) una secuencia que converge al punto x_0 de X, (y_k) una secuencia en Y que converge a y_0 tal que $y_k \in \mu(x_k)$ para todo k. Puesto que φ es scs, es inmediato que $y_0 \in \varphi(x_0)$, así que sólo falta probar que $f(x_0, y)$ asume un máximo en y_0. Sea z_0 un elemento de $\varphi(x_0)$ tal que $f(x_0, z_0) = \text{máx}_{\,z \in \varphi(x_0)} f(x_0, z)$ Dado que φ es sci, existe una secuencia (z_k) en Y que converge a z_0 tal que $z_k \in \varphi(x_k)$ para todo k.

Puesto que, para todo k, $y_k \in \mu(x_k)$ y $z_k \in \varphi(x_k)$, se tiene que $f(x_k, y_k) \geq f(x_k, z_k)$. Por ende, en el límite, $f(x_0, y_0) \geq f(x_0, z_0) = \text{máx}_{\,z \in \varphi(x_0)} f(x_0, z)$ dada la continuidad de f. Se concluye que $y_0 \in \mu(x_0)$. □

Recuérdese que una función cuasicóncava $f: S \to \mathbb{R}$ sobre un conjunto convexo S es una función tal que $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \text{mín}\,(f(x), f(y))$. Sea $A = \prod_{i \in N} A_i$.

DEFINICIÓN 2.8: Un *sistema social* es una estructura

$$\mathfrak{A} = \langle A_1, \ldots, A_n, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, f_1, \ldots, f_n \rangle$$

tal que, para todo $i \in N$,

(1) A_i es un subconjunto no vacío, compacto y convexo de un espacio euclídeo;

(2) $\varphi_i: A \to A_i$ es continua, asume valores convexos y no depende de la iésima variable, de modo que $\varphi_i(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n) = \varphi_i(a_1, \ldots, a_i', \ldots, a_n)$ para todo $a_i, a_i' \in A_i$;

(3) $f_i\colon A \to \mathbb{R}$ es continua en A y cuasicóncava con respecto a a_i;
(4) Dado cualquier $a \in A$, i escoge un elemento de

$$\mu_i(a) = \{y \in \varphi_i(a) \,|\, f_i(a_{N\setminus i}, y) = \text{máx}_{\,z\in\varphi_i(a)} f_i(a_{N\setminus i}, z)\}.$$

DEFINICIÓN 2.9: a^* es un *equilibrio del sistema social* $\mathfrak{A}$ si, para todo $i \in N$, $a_i^* \in \mu_i(a^*)$; *i.e.* $a^* \in \mu(a^*) = \mu_1(a^*) \times \cdots \times \mu_n(a^*)$.

TEOREMA 2.10: *Si, para todo $i \in N$, el conjunto A_i es un subconjunto no vacío, compacto y convexo de un espacio euclídeo, f_i es una función continua con valores reales sobre A que es cuasicóncava en su iésima variable, y φ_i es una correspondencia continua de A en A_i que asume valores convexos, entonces el sistema social $(A_i, \varphi_i, f_i)_{i\in N}$ tiene un equilibrio.*

Demostración: Hay que demostrar que la correspondencia $\mu\colon A \to A$, definida por la condición

$$\mu(a) = \mu_1(a) \times \cdots \times \mu_n(a)$$

tiene un punto fijo a^*. Para aplicar el teorema de Kakutani, tenemos que establecer lo siguiente:

(1) $A = A_1 \times \cdots \times A_n$ es un subconjunto no vacío y convexo de un espacio euclideano;
(2) A es compacto;
(3) μ_i, y por ende μ, es una correspondencia scs para todo $i \in N$;
(4) $\mu(a)$ es convexo para todo $a \in A$.

Los incisos (1) y (2) se establecen de manera semejante a como se establecieron sus correspondientes en la demostración del teorema de Nash. Las novedades son que para probar (3) necesitamos hacer uso del lema de Berge y que las f_i son cuasicóncavas pero no necesariamente lineales en la *i*ésima variable.

Para probar (3), necesitamos notar lo siguiente:

(3.1) Para cada $i \in N$, f_i puede ser vista (quizá con algunas permutaciones) como una función $f_i\colon A_{N\setminus i} \times A_i \to \mathbb{R}$;
(3.2) para cada i, como $\varphi_i(a)$ es independiente de la *i*ésima variable, podemos definir $\psi_i\colon A_{N\setminus i} \to A_i$ mediante la condición

$$\psi_i(a_{N\setminus i}) = \varphi_i(a_{N\setminus i}, a_i)$$

para cualquier $(a_{N\setminus i}, a_i) \in A$. Es fácil ver que ψ_i es una correspondencia continua;
(3.3) finalmente, como $\varphi_i(a) = \psi_i(a_{N\setminus i})$, se sigue que

$$\mu_i(a) = \{y \in \psi_i(a_{N\setminus i}) \,|\, f_i(a_{N\setminus i}, y) = \text{máx}_{\,z\in\psi_i(a_{N\setminus i})} f_i(a_{N\setminus i}, z)\}$$

Los incisos (3.1)-(3.3) conjuntamente con el lema de Berge implican que μ_i es scs.

Finalmente, mostraremos que $\mu_i(a)$ es convexo para $a \in A$ arbitrario. Sean α y β números no negativos tales que $\alpha + \beta = 1$, y sean $a_i, b_i \in \mu_i(a)$. Entonces $f_i(a_{N\setminus i}, a_i) =$

$f_i(a_{N\setminus i}, b_i) = \text{máx}_{\, c_i \in \psi_i(a_{N\setminus i})} f_i(a_{N\setminus i}, c_i)$ y tenemos –puesto que f_i es cuasicóncava en el *i*ésimo componente, $f_i(a_{N\setminus i}, \alpha a_i + \beta b_i) \geq \text{mín}\, (f_i(a_{N\setminus i}, a_i), f_i(a_{N\setminus i}, b_i)) = \text{máx}_{\, c_i \in \psi_i(a_{N\setminus i})} f_i(a_{N\setminus i}, c_i)$, lo cual implica que $\alpha a_i + \beta b_i$ es un maximizador y por ende está en $\mu_i(a)$. □

3 UTILIDAD

Decimos que un subconjunto S de un espacio euclideano es *conexo* si no existen conjuntos cerrados S_1, S_2 tales que $S = S_1 \cup S_2$. Dados subconjuntos S, T de un espacio euclideano, decimos que S es *denso* en T si la clausura de S, $\overline{S}$, es igual a T.

DEFINICIÓN 3.1: Una *estructura de preferencias* es un par $\langle A, \succsim \rangle$ tal que A es un subconjunto no vacío de un espacio euclideano, que satisface los siguientes axiomas para todo $x, y, z \in A$:

(1) $x \succsim y$ o $y \succsim x$
(completud o conexidad de $\succsim$)

(2) $x \succsim y$ y $y \succsim z$ entonces $x \succsim z$
(transitividad de $\succsim$).

La relación de preferencia estricta $\succ$ se define por la condición '$x \succ y$ syss $x \succsim y$ pero no $y \succsim x$'. La relación de indiferencia se define mediante la condición '$x \sim y$ syss $x \succsim y$ y $y \succsim x$'.

DEFINICIÓN 3.2: Un subconjunto D de un espacio $\langle A, \succsim \rangle$ es un *orden denso* en A syss, para cada par de elementos $x, z \in A$ tales que $x \succ z$, existe un elemento $y \in D$ tal que $x \succ y \succ z$. Decimos que la relación es *continua* si, para todo $x \in A$, los conjuntos $\{y \in A \mid y \succsim x\}$ y $\{y \in A \mid x \succsim y\}$ son cerrados.

LEMA 3.3: *Si D es un subconjunto de una estructura de preferencias $\langle A, \succsim \rangle$ que es denso en A, donde A es un subconjunto conexo de un espacio euclideano, y $\succsim$ es continua, entonces D es un orden denso en A.*

Demostración: Sean x, z elementos de A tales que $x \succ z$ y considérese los conjuntos $X = \{u \in A \mid u \succsim x\}$, $Z = \{u \in A \mid z \succsim u\}$. X y Z son cerrados, de modo que su unión también lo es y, además, $X \cup Z \neq A$ porque A es conexo.

Por otra parte, si no existiese $y \in D$ tal que $x \succ y \succ z$, entonces D sería un subconjunto de $X \cup Z$. Pero esto es imposible, pues en ese caso la clausura $\overline{D}$ de D, que es igual a todo el espacio A, estaría contenida en la clausura de $X \cup Z$, la cual es igual a $X \cup Z$ mismo, contradiciendo lo dicho anteriormente, pues tanto X como Z son cerrados. □

DEFINICIÓN 3.4: Sea $\langle A, \succsim \rangle$ una estructura de preferencias. Una *función de utilidad* para $\langle A, \succsim \rangle$ es una función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ que preserva la relación $\succsim$, es decir, tal que, para todo $x, y \in A$,

$$f(x) \geq f(y) \quad \Leftrightarrow \quad x \succsim y.$$

En adelante, escribiremos $(\leftarrow, x) = \{y \in A \mid y \prec y\}$, $(x, \rightarrow) = \{y \in A \mid x \prec y\}$, $(x, z) = \{y \in A \mid x \prec y \prec z\}$. Si $(s_1, s_2, \ldots, s_p, \ldots)$ es una secuencia, el rango del elemento s_p es el número p, *i.e.* la "posición" que ocupa en la secuencia.

LEMA 3.5: *Sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una función, donde A es un subconjunto de un espacio euclideano. Si la imagen inversa $f^{-1}((-\infty, r])$ es un conjunto cerrado para cada $r \in \mathbb{R}$, entonces f es continua.*

Demostración: Mostraré, consecutivamente, que (i) la hipótesis del lema implica que $f^{-1}(B)$ es cerrado para todo conjunto cerrado $B \subseteq \mathbb{R}$; (ii) $f^{-1}(B)$ es abierto para todo conjunto abierto $B \subseteq \mathbb{R}$; (iii) f es continua.

(i) Sea $B \subsetneq \mathbb{R}$ un conjunto cerrado. Entonces $\mathbb{R} \setminus B$ es abierto y por ende puede ser expresado como una unión de intervalos abiertos (a, b) en un conjunto I:

$$\mathbb{R} \setminus B = \bigcup_{(a,b)\in I} (a, b).$$

Luego, $B = \bigcap_{(a,b)\in I} \mathbb{R} \setminus (a, b)$ y cada $\mathbb{R} \setminus (a, b)$ es de la forma $(-\infty, a] \cup [b, \infty)$ con $(a, b) \in I$. Pero

$$[b, \infty) = \bigcap_{r \leq b} (r, \infty],$$

de modo que

$$\mathbb{R} \setminus (a, b) = (-\infty, a] \cup (\bigcap_{r \leq b} (r, \infty])$$

y, así,

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= f^{-1}(\bigcap_{(a,b)\in I} \mathbb{R} \setminus (a, b)) \\ &= \bigcap_{(a,b)\in I} (f^{-1}((-\infty, a]) \cup \bigcap_{r \leq b} f^{-1}((r, \infty])) \end{aligned}$$

que es claramente cerrado.

(ii) Si B es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus B$ es cerrado y por (i) tenemos que $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus B) = A \setminus f^{-1}(B)$ es abierto por ser $f^{-1}(B)$ cerrado.

(iii) Finalmente, sea (a_k) una secuencia en A que converge a $a_0 \in A$. Para $\epsilon > 0$ tan pequeño como se quiera, considere el intervalo abierto $B(f(a_0), \epsilon)$ centrado en $f(a_0)$. Entonces, por (ii), $V = f^{-1}(B(f(a_0), \epsilon))$ es abierto en A y luego a_0 es un punto interior de V. Por ende, existe un $\delta > 0$ tal que $B(a_0, \delta) \subset V$. Se sigue que, para algún entero positivo K, $k > K$ implica $a_k \in B(a_0, \delta)$ y, por consiguiente, $f(a_k) \in B(f(a_0), \epsilon)$. Se concluye que $(f(a_k)) \rightarrow f(a_0)$ y f es continua.

TEOREMA 3.6: (Debreu). *Si $\langle A, \succsim \rangle$ es una estructura de preferencias numerable y A es un orden denso en A, entonces existe una función de utilidad sobre el conjunto de los números racionales en un intervalo acotado de números reales.*

Demostración: Sea E la familia de las clases de indiferencia de elementos de A y sea $[a, b]$ un intervalo de números reales con $a < b$, donde a y b son racionales. Vamos a construir una función v de E en el conjunto Q de todos los racionales en $[a, b]$. Si E tiene una clase de elementos menos preferidos x_a, sea $v([x_a]) = a$. Si E tiene una clase de elementos más preferidos x_β, sea $v([x_\beta]) = b$. Extrayendo de E estas dos clases x_α y x_β, obtenemos el conjunto E' el cual, puesto que A es un orden denso, no tiene una clase de elementos máxima o mínimamente preferidos. Esto implica también que E' es infinito numerable también. Por ende, podemos escribir los elementos de E' como una lista $([x_1], [x_2], \ldots, [x_p], \ldots)$, donde $[x_p]$ denota la clase de equivalencia de x_p.

Sea Q' el conjunto de los racionales en $[a, b]$ excluyendo a y b mismos. Como Q' es numerable, sus elementos pueden ser puestos en una lista $(r_1, r_2, \ldots, r_q, \ldots)$. Seguimos construyendo v, asignándole a cada x_p en E' un elemento r_{q_p} de Q'. A la clase $[x_1]$ le asignamos el elemento r_1. Consideramos ahora la siguiente partición de A':

$$A' = (\leftarrow, x_1) \cup [x_1] \cup (x_1, \rightarrow).$$

Correlativamente, consideramos también la siguiente partición de Q':

$$Q' = (a, r_1) \cup \{r_1\} \cup (r_1, b).$$

Claramente, como $[x_2] \neq [x_1]$, $x_2 \in (\leftarrow, x_1)$ o $x_2 \in (x_1, \rightarrow)$. Si $x_2 \in (\leftarrow, x_1)$, tomamos el racional de menor rango r_{q_2} en (a, r_1) y hacemos $v([x_2]) = r_{q_2}$. Claramente, $v([x_2]) = r_{q_2} < r_1 = v([x_1])$. Si $x_2 \in (x_1, \rightarrow)$, se procede análogamente.

Supóngase ahora que a las clases $[x_1], \ldots, [x_p]$ se les han asignado los números $r_1, \ldots, r_{q_p}$, y reordénense estas mismas clases en la secuencia $[y_1], \ldots, [y_p]$, de modo que $y_j \prec y_k$ si $j < k$ $(j, k = 1, \ldots, p)$. Sean $s_1, \ldots, s_p$ los números racionales tales que $v([x_k]) = s_k$ $(k = 1, \ldots, p)$. Consideramos ahora la partición de A' siguiente:

$$A' = (\leftarrow, y_1) \cup [y_1] \cup (y_1, y_2) \cup [y_2] \cup \cdots \cup [y_{p-1}] \cup (y_{p-1}, y_p) \cup [y_p] \cup (y_p, \rightarrow).$$

Consideramos asimismo la partición

$$Q' = (a, s_1) \cup \{s_1\} \cup (s_1, s_2) \cup \{s_2\} \cup \cdots \cup \{s_{p-1}\} \cup (s_{p-1}, s_p) \cup \{s_p\} \cup (s_p, b).$$

Si la clase $[x_{p+1}]$ es tal que $x_{p+1} \in (\leftarrow, y_1)$, escogemos el racional de menor rango $r_{q_{p+1}}$ en el intervalo (a, s_1) y hacemos $v([x_{p+1}]) = r_{q_{p+1}}$. Si $x_{p+1} \in (y_p, \rightarrow)$, escogemos el racional de menor rango $r_{q_{p+1}}$ en el intervalo (s_p, b) y hacemos $v([x_{p+1}]) = r_{q_{p+1}}$. Finalmente, si $x_{p+1} \in (y_j, y_k)$ $(j, k = 1, \ldots, p)$, escogemos el racional de menor rango $r_{q_{p+1}}$ en el intervalo (s_j, s_k) y hacemos —otra vez— $v([x_{p+1}]) = r_{q_{p+1}}$. Se ve que así definida v preserva la relación de preferencia entre las clases de equivalencia y además, puesto que E' es un orden denso sin elementos máximos ni mínimos, que eventualmente cualquier racional en la lista $(r_1, r_2, \ldots, r_q, \ldots)$ es asignado a una clase de indiferencia en E'. Se concluye entonces que v es una biyección entre los elementos de E y los de Q o, lo que es lo mismo, que la función $u: A \rightarrow Q$ tal que $u(x_p) = v([x_p])$ es una función de utilidad suprayectiva de A sobre el conjunto de los racionales en el intervalo $[a, b]$. □

Decimos que una relación de preferencia $\succsim$ es *débilmente convexa* en A syss dados $\alpha, \beta \in [0, 1]$ tales que $\alpha + \beta = 1$, y elementos x, y de A tales que $x \succsim y$, se tiene que $\alpha x + \beta y \succsim y$.

TEOREMA 3.7: *Sea $\langle A, \succsim \rangle$ una estructura de preferencias. Si A es un subconjunto conexo de un espacio euclideano y $\succsim$ es continua, entonces existe una función de utilidad continua u para $\langle A, \succsim \rangle$. Más aun, si A es convexo y $\succsim$ es débilmente convexa, entonces u es cuasicóncava.*

Demostración: Sea D el subconjunto de todos los puntos de A con coordenadas racionales. Este conjunto es denso en A y, por ende, es un orden denso en A. Por el teorema anterior, esto significa que existe una función de utilidad $v: D \to Q$ para la estructura $\langle D, \succsim \rangle$ sobre el conjunto Q de los números racionales pertenecientes al intervalo $[a, b]$. Definiremos una utilidad u para toda la estructura A, como una extensión de v.

Si $x \in A$, escribiremos $X_x = \{y \in D \mid y \precsim x\}$ y $X^x = \{y \in D \mid x \precsim y\}$. Si x es un elemento mínimo de A, tomamos $u(x) = a$; si es un elemento máximo, hacemos $u(x) = b$. Para toda otra $x \in A$, mostraremos que $\sup v(X_x) = \inf v(X^x)$ y escogeremos $u(x)$ como el valor común de este sup e inf.

Por definición de $\sup v(X_x)$ e $\inf v(X^x)$, es inmediato que $\sup v(X_x) \leq \inf v(X^x)$. Si $\sup v(X_x) < \inf v(X^x)$ fuera el caso, habría un número racional r en el intervalo (a, b) tal que $\sup v(X_x) < r < \inf v(X^x)$ y, como v es sobre el conjunto Q de los racionales en dicho intervalo, también habría un $z \in D$ tal que $v(z) = r$. Esto implicaría que $z \notin X_x$ y $z \notin X^x$, lo cual significaría que $z \succ x$ y $x \succ z$, lo cual implicaría a su vez que $z \succ z$. Esta contradicción muestra que $\sup v(X_x) = \inf v(X^x)$. La construcción exhibe claramente que $u(x) = v(x)$ si $x \in D$ y que u preserva la relación $\succsim$.

Para demostrar que u es continua, basta probar que $u^{-1}((-\infty, c])$ es cerrado para cada número real c, aunque en este caso bastará mostrar que ello es el caso para c en (a, b). Notamos que $(-\infty, c]$ es la intersección de todos los intervalos de la forma $[-\infty, r)$, donde $r \geq c$ y r es un número racional en Q', que es $u(D)$ sin sus extremos, en caso de que los tuviere. Notamos también que la imagen inversa de una intersección de conjuntos es igual a la intersección de las imágenes. Así, si $X_r = \{x \in A \mid u(x) \leq r\}$, tenemos

$$\begin{aligned} u^{-1}((-\infty, c]) &= u^{-1}\Big(\bigcap_{\substack{r \geq c \\ r \in Q'}} [-\infty, r)\Big) \\ &= \bigcap_{\substack{r \geq c \\ r \in Q'}} u^{-1}([-\infty, r)) \\ &= \bigcap_{\substack{r \geq c \\ r \in Q'}} X_r \end{aligned}$$

Ahora bien, para cada $r \in Q'$, $r \geq c$, tómese un punto x de A tal que $u(x) = r$. Entonces

$$\begin{aligned} X_r &= \{y \in A \mid u(y) \leq u(x)\} \\ &= \{y \in A \mid x \succsim y\} \end{aligned}$$

Claramente, X_r es cerrado, y por ende también lo es la intersección $\bigcap_{\substack{r \geq c \\ r \in Q'}} X_r$.

Por el teorema de Bolzano, como A es conexo $u(A)$ es un intervalo con extremos a, b. Estos extremos pertenecen a $u(A)$ sólo si A tiene elementos mínimos y máximos.

Finalmente, para mostrar que u es cuasicóncava, sean x, y elementos arbitrarios de A y α, β números no negativos tales que $\alpha + \beta = 1$; sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x \succsim y$. Claramente, $u(y) = \text{mín}\,(u(x), u(y))$, y además, como $\succsim$ es débilmente convexa, tenemos $\alpha x + \beta y \succsim y$ o $u(\alpha x + \beta y) \geq u(y) = \text{mín}\,(u(x), u(y))$.

4 ECONOMÍAS DE INTERCAMBIO PURO

Una economía de intercambio puro es una situación en la que hay un número de compradores y vendedores potenciales, cada uno dotado inicialmente con una cierta cesta de bienes y cierta función de utilidad. Un equilibrio para este tipo de economías es un sistema de precios bajo los cuales el resultado de los intercambios es una asignación que maximiza la utilidad de los agentes y que es factible, en el sentido de que la suma total de bienes poseídos por los agentes no es mayor que la suma de las dotaciones iniciales. Estas economías se pueden representar como sistemas sociales de cierto tipo y sus equilibrios como equilibrios de tales sistemas sociales.

DEFINICIÓN 4.1: Una *cuasieconomía de intercambio puro* es una estructura

$$\langle (X_i, \succsim_i)_{i\in N\setminus n}, (w_i)_{i\in N\setminus n}, P, d\rangle$$

tal que

(1) Para todo $i \in N \setminus n$, X_i es un subconjunto no vacío, compacto y convexo del ortante no negativo Ω^m de $\mathbb{R}^m$, tal que $0 \in X_i$.

(2) Para todo $i \in N \setminus n$: $(X_i, \succsim_i)$ es una estructura de preferencias tal que $\succsim_i$ es cuasiconvexa y continua.

(3) Para todo $i \in N \setminus n$ $j = 1, \ldots, m$: $w_i \in X_i$ y existe $x \in X_i$ con tan solo el *j*ésimo componente positivo $(1 \leq j \leq m)$ tal que $w_i + x \geq w_i$.

(4) P es el simplex unitario $\{(p_1, \ldots, p_m) \in \Omega^m \mid \sum_{j=1}^{m} p_j = 1\}$.

(5) d, la función de decisión, es una función de $N \times \prod_{i\in N} X_i$ en $\sum_{i\in N} X_i$.

LEMA 4.2: *Sea* $\langle (X_i, \succsim_i)_{i\in N\setminus n}, (w_i)_{i\in N\setminus n}, P, d\rangle$ *una cuasieconomía de intercambio puro. Cada estructura de preferencia* $(X_i, \succsim_i)$ $(i \in N \setminus n)$ *es representable mediante una función de utilidad* u_i *que es cuasicóncava y continua.*

Demostración: Como X_i es convexo, se sigue que es también conexo. Además, por el axioma (2), $\succsim_i$ es débilmente convexa y continua. Por el teorema 3.7 se desprende que existe una función de utilidad continua y cuasicóncava para $(X_i, \succsim_i)$. □

DEFINICIÓN 4.3: Sea $\langle (X_i, \succsim_i)_{i\in N\setminus n}, (w_i)_{i\in N\setminus n}, P, d\rangle$ una cuasieconomía de intercambio puro. Para cada $i \in N$, w_i es llamada la *dotación inicial* del agente i. La *dotación inicial global* es $\sum_{i=1}^{n-1} w_i$ y es denotada por w. Definimos el conjunto X de las *asignaciones posibles* como el producto cartesiano $X_1 \times \cdots \times X_{n-1} \times P$. Para cada $i \in N \setminus n$ definimos la *función de utilidad ampliada* como la función $f_i: X \to \mathbb{R}$, mediante la condición $f_i(x_1, \ldots x_{n-1}, p) = u_i(x_i)$ para todo $x \in X$. $f_n(x_1, \ldots x_{n-1}, p) = p\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i - w\right)$. Para cada $i \in N \setminus n$, el *conjunto de factibilidad* para el agente i, dado $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, p)$, es definido como el conjunto de todos los bienes que puede comprar con su dotación inicial w_i, dados los precios p, *i.e.*

$$\varphi_i(x) = \{y \in X_i \mid py \leq pw_i\}.$$

Para el *n*ésimo agente $\varphi_n(x)$ es simplemente P. Esto define una correspondencia $\varphi_i: X \to X_i$ para cada agente i. Para cada agente i y asignación $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, p)$, definimos asimismo el conjunto $\mu_i(x)$ de todos los menús en X_i, que pueden ser adquiridos con el presupuesto pw_i, y que a la vez maximizan la función de utilidad del agente i, a saber,

$$\mu_i(x) = \{y \in \varphi_i(x) \mid f_i(x_{N \setminus i}, y) = \text{máx}_{z \in \varphi_i(x)} f_i(x_{N \setminus i}, z)\}.$$

Finalmente, definimos

$$\mu_n(x) = \{p \in P \mid f_n(x_{N \setminus n}, p) = \text{máx}_{q \in P} f_n((x_{N \setminus n}, q)\}.$$

DEFINICIÓN 4.4: Puesto que el conjunto de factibilidad $\varphi_i(x)$ solo depende del precio que ocupe la última coordenada de x, *i.e.* $\varphi_i(x_1, \ldots, x_{n-1}, p) = \varphi_i(x_1', \ldots, x_{n-1}', p)$, podemos definir para cada sistema de precios $p \in P$ el conjunto

$$\zeta(p) = \Big(\sum_{i=1}^{n-1} \varphi_i(x_1, \ldots, x_{n-1}, p)\Big) - \{w\}$$

de todas las demandas agregadas excedentes dado p.

LEMA 4.5: *Para todo $p \in P$, $\zeta(p)$ es no vacío, convexo y compacto.*

Demostración: $w_i \in \varphi_i(x)$ para cada $x \in X$ porque al menos $pw_i \leq pw_i$ para todo $p \in P$. Sean $x, y \in \zeta(p)$, $\alpha, \beta \in (0,1)$ tales que $\alpha + \beta = 1$. Entonces $x = (x_1 + \cdots x_{n-1}) - w$, $y = y_1 + \cdots + y_{n-1} - w$, con $x_i, y_i \in \varphi_i(y_i, p)$. Como $\varphi_i(y_i, p)$ es convexo para todo $i \in N \setminus i$, tenemos que $\alpha x_i + \beta y_i \in \varphi_i(y_i, p)$ y por ende $\alpha x + \beta y \in \zeta(p)$. $\zeta(p)$ es compacto porque $\varphi_i(y, p)$ es compacto y la suma de conjuntos compactos es un conjunto compacto. □

DEFINICIÓN 4.6: Una *economía de intercambio puro* es una cuasieconomía de intercambio puro tal que $d(i, x) \in \mu_i(x)$ para todo $(i, x) \in N \times X$.

Decimos que una relación de preferencia $\succsim$ definida sobre un subconjunto de un espacio euclideano X es *monótona* si $x \succsim y$ siempre que $x \geqq y$. Es *fuertemente monótona* si $x \succ y$ siempre que $x \geq y$.

TEOREMA 4.7: (Ley de Walras). *Si las preferencias son monótonas, el valor del exceso de demanda es igual a cero bajo cualquier sistema de precios; i.e. para todo $p \in P$, $p\zeta(p) = 0$.*

Demostración: Si las preferencias son monótonas, cualquier agente preferirá las cestas más generosas, lo cual lo lleva a gastar todo su presupuesto pw_i. Así, sea $z = x_1 + \ldots + x_{n-1} - w \in \zeta(p)$, con $x_i \in \varphi_i(y_i, p)$. Entonces $px_i = pw_i$ y, por ende, $pz = p\left[\sum_{i=1}^{n-1} x_i - \sum_{i=1}^{n-1} w_i\right] = 0$. □

COROLARIO 4.8: *Si las preferencias son monótonas, la oferta es igual a la demanda para $m - 1$ bienes, y $p_m > 0$, debe ser también igual para el* mésimo *bien.*

La demostración se deja como ejercicio al lector.

DEFINICIÓN 4.9: Decimos que el bien j es *atractivo* si $p_j = 0$ implica que $z_j(p) > 0$ $(j = 1, \ldots, m)$.

DEFINICIÓN 4.10: Un *equilibrio walrasiano* o *equilibrio competitivo* para una economía de intercambio puro es una asignación $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, p)$ tal que $x \in \mu_i(x)$.

COROLARIO 4.11: *Si hay un exceso de oferta de algún bien en un equilibrio walrasiano, ese bien debe ser gratuito; i.e. si p es un equilibrio walrasiano y $z_j(p) < 0$, entonces $p_j = 0$.*

La demostración se deja como ejercicio al lector.

COROLARIO 4.12: *Si todos los bienes son atractivos y p es un equilibrio walrasiano entonces $\zeta(p) = \{0\}$.*

La demostración se deja como ejercicio al lector.

TEOREMA 4.13: *Si $\langle (X_i, \succsim_i)_{i\in N\setminus n}, (w_i)_{i\in N\setminus n}, P, d\rangle$ es una economía de intercambio puro entonces $\langle X_1, \ldots, X_n, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, f_1, \ldots, f_n\rangle$ es un sistema social.*

Demostración: Supóngase que $\langle (X_i, \succsim_i)_{i\in N}, (w_i)_{i\in N\setminus n}, d\rangle$ es una economía de intercambio puro. Tenemos que demostrar que las correspondencias y funciones φ_i y f_i satisfacen las condiciones definitorias de un sistema social (los conjuntos X_i obviamente las satisfacen). Por el lema 4.2, las funciones de utilidad ampliada están bien definidas, son continuas y cuasicóncavas en la *i*ésima variable. Es fácil ver que también u_n es continua y cuasicóncava.

Está claro que φ_i ($i \in N$) asume valores convexos para todo $x \in X_i$. Es fácil ver que no depende de la *i*ésima variable, pues para $i \in N \setminus n$ depende sólo del precio, mientras que para n (el mercado) es constantemente igual a P. Para mostrar que es scs, notamos que $\varphi_i(x_0, p_0)$ es compacto para todo $(x_0, p_0) \in X$, y por ende hay una vecindad de x_0 en la que es acotado. Sea $(x_k, p_k) \to (x_0, p_0)$ una secuencia en X y $(y_k) \to y_0$ una secuencia en X_i tal que $y_k \in \varphi_i(x_k, p_k)$. Esto significa que $p_k y_k \leq p_k w_i$ para todo k y por lo tanto, en el límite, $p_0 y_0 \leq p_0 w_i$, de modo que $y_0 \in \varphi_i(x_0, p_0)$.

Para mostrar que es sci, supóngase ahora que hay una secuencia $(x_k, p_k) \to (x_0, p_0)$ tal que el punto y_0 está en $\varphi_i(x_0, p_0)$. Esto significa, desde luego, que $p_0 y_0 \leq p_0 w_i$. Si $p_0 y_0 = 0$, sea (λ_k) una secuencia de números que converge a 1, y sea $y_k = \lambda_k y_0$. Entonces se tiene $(y_k) \to y_0$ y, para k suficientemente grande, $p_k y_k \leq p_k w_i$. Tómense los y_k para los que se cumple esta desigualdad y elementos arbitrarios de $\varphi_i(x_k, p_k)$ para los otros ks, para construir una secuencia con las propiedades deseadas. Si $p_0 y_0 > 0$, defínase una secuencia de números (λ_k) como sigue:

$$\lambda_k = \begin{cases} 0 & \text{si } p_k y_0 = 0 \\ p_k w_i / p_k y_0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sea asimismo (y_k) la secuencia tal que $y_k = \lambda_k y_0$. Entonces $(\lambda_k) \to 1$, $(y_k) \to y_0$ y además $y_k \in \varphi_i(x_k, p_k)$ para todo k. Se concluye que φ_i es una correspondencia continua.

Claramente, $d(i, x) \in \mu_i(x)$ de modo que también se cumple la ley de comportamiento social. □

COROLARIO 4.14: *Existe un equilibrio walrasiano para cualquier economía de intercambio puro.*

Demostración: Sea $\mathfrak{E} = \langle (X_i, \succsim_i)_{i\in N\setminus n}, (w_i)_{i\in N\setminus n}, P, d\rangle$ una economía de intercambio puro. Por el teorema anterior $\langle X_1, \ldots, X_n, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, f_1, \ldots, f_n\rangle$ es un sistema social, el cual tiene un equilibrio x^*. Este equilibrio es un equilibrio walrasiano para la economía $\mathfrak{E}$. □

Por una *asignación viable* entendemos una asignación $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, p)$ tal que $\sum_{i=1}^{n-1} x_i = w$.

DEFINICIÓN 4.15: La asignación viable $x = (x_1, \ldots, x_n)$ es *eficiente en el sentido de Pareto* si no existe otra asignación viable $y = (y_1, \ldots, y_n)$ tal que $y_i \succ_i x_i$ para todo $i \in N\setminus n$. x es *fuertemente eficiente en el sentido de Pareto* si no existe otra asignación viable $y = (y_1, \ldots, y_n)$ tal que $y_i \succsim_i x_i$ para todo $i \in N \setminus n$ y $y_j \succ_j x_j$ para algún $j \in N \setminus n$.

TEOREMA 4.16: *Si las preferencias son continuas y monótonas en una economía de intercambio puro, entonces una asignación viable es fuertemente eficiente en el sentido de Pareto syss es eficiente en el sentido de Pareto.*

Demostración: Supóngase que $\succsim_i$ es continua y monótona y sea $(y_1, \ldots, y_{n-1}, p)$ cualquier asignación viable. Si $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, p)$ es fuertemente eficiente en el sentido de Pareto (FESP) y $y_i \succsim x_i$, entonces debe ser que $y_i \sim x_i$; por lo tanto, no es el caso que $y_i \succ x_i$ para todo i; es decir, x es eficiente en el sentido de Pareto (ESP).

Supóngase ahora que x es ESP pero no FESP. Entonces existe una asignación viable y tal que $y_i \succsim_i x_i$ para todo i y $y_j \succ_j x_j$ para algún j. Sea λ un número infinitamente cerca de 1. Entonces tenemos $0 < \lambda y_j < y_j$ y $\lambda y_j \in X_j$; además, $y_j \succ_j \lambda y_j \succ_j x_j$ porque λy_j está infinitamente cerca de y_j y $\succsim_j$ es continua. Considérese ahora la asignación v tal que $v_j = \lambda y_j$ y

$$v_i = y_i + \frac{1-\lambda}{n-2} y_j$$

para $i \neq j$. Es fácil ver que v es viable y además que $v_i \succ_i x_i$ para todo $i \in N \setminus n$. Esto contradice que x es ESP y por ende x también es FESP. □

TEOREMA 4.17: (I Teorema del Bienestar). *Todo equilibrio walrasiano en el que todos los bienes son atractivos es eficiente en el sentido de Pareto.*

Demostración: Sea $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, p)$ un equilibrio walrasiano tal. Entonces $\zeta(p) = \{0\}$ y por ende x es viable. Supóngase que $y = (y_1, \ldots, y_{n-1}, p)$ es también viable y que $y_i \succ_i x_i$ para algún $i \in N \setminus n$. Entonces y_i debe estar fuera del alcance presupuestal de i pues, al ser un equilibrio walrasiano, x maximiza la utilidad de cada agente; luego,

$$p\Big(\sum_{i\in N\setminus n} y_i\Big) > p\Big(\sum_{i\in N\setminus n} w_i\Big).$$

Pero la viablidad de y implica que

$$p\Big(\sum_{i\in N\setminus n} y_i\Big) = p\Big(\sum_{i\in N\setminus n} w_i\Big).$$

Esta contradicción muestra que no existe i tal que $y_i \succ_i x_i$, esto es, que x es eficiente en el sentido de Pareto. □

LEMA 4.18: (Teorema del hiperplano separador) *Sean A y B dos subconjuntos convexos no vacíos de un espacio euclideano que no tienen puntos en común. Entonces existe un vector p tal que $px \geq py$ para todo $x \in A$ y $y \in B$.*

Se omite la demostración de este lema debido a su complejidad.

TEOREMA 4.19: (II Teorema del Bienestar). *Sea $(x_1^*, \ldots, x_{n-1}^*, p)$ una asignación positiva eficiente en el sentido de Pareto y sea $w_i = x_i^*$ para todo $i \in N \setminus n$. Si las preferencias son monótonas entonces existe un precio $p^* \in P$ tal que $x^* = (x_1^*, \ldots, x_{n-1}^*, p^*)$ es un equilibrio walrasiano.*

Demostración: Mostraremos que existe un vector de precios p^* tal que $x^* = (x_1^*, \ldots, x_{n-1}^*, p^*)$ es un equilibrio walrasiano. Para ello, consideramos para cada $i \in N \setminus n$ el conjunto E_i de todas las cestas que son estrictamente preferidas por i a x_i^*:

$$E_i = \{x \in X_i \mid x \succ_i x_i^*\}.$$

Sea E la suma de todos estos conjuntos:

$$E = \sum_{i \in N \setminus n} E_i.$$

E es convexo y no vacío porque la suma de conjuntos convexos es convexa y ningún E_i es vacío dado que existe al menos un vector $y_i \in X_i$ tal que $y_i > w_i$. Por lo demás, puesto que x^* es eficiente en el sentido de Pareto, si $w = \sum_{i \in N \setminus n} x_i^*$, entonces ninguna redistribución de w puede mejorar a algún agente, de modo que $w \notin E$. Por el teorema del hiperplano separador, existe un vector $p \neq 0$ tal que, para todo $y \in E$,

$$py \geq p \sum_{i \in N \setminus n} x_i^*.$$

La estrategia de la demostración consiste en mostrar, consecutivamente, los siguientes tres puntos: (i) $p \geq 0$; (ii) para cualquier $i \in N \setminus n$, si $x_i \succ_i x_i^*$ entonces $px_i \geq px_i^*$; (iii) de hecho, tenemos la desigualdad estricta $px_i > px_i^*$; siempre que $x_i \succ_i x_i^*$.

(i) Sea y un vector cuyas componentes son cero con excepción de la $j$ésima, p_j $(j = 1, \ldots, m)$. Entonces $w + y \in E$ por la monotonía de $\succsim_i$. Por ende, $p(w + y) \geq pw$, de donde $py = p_j y_j \geq 0$. Esto implica que $p_j \geq 0$.

(ii) Supóngase que $x_j \succ x_j^*$ para cualquier $j \in N \setminus N$. Tomando un número λ lo suficientemente cerca de 1, vamos a redistribuir una parte de x_j de modo que obtengamos una asignación que es preferible a x^* por todos los agentes. Sea $y_j = \lambda x_j$ y, para cada $i \neq j$,

$$y_i = x_i^* + \frac{1 - \lambda}{n - 2} y_j.$$

Por la monotonicidad de las preferencias, $y_i \succ x_i^*$ para todo $i \in N \setminus n$, de modo que $y \in E$. Luego,

$$\begin{aligned} p\left[\lambda x_j + (1-\lambda)x_j + \sum_{i \neq j} x_i^*\right] &= p \sum_{i \in N \setminus n} y_i \\ &\geq p \sum_{i \in N \setminus n} x_i^* \\ &= p\left[x_j^* + \sum_{i \neq j} x_i^*\right]. \end{aligned}$$

Sustrayendo $p\sum_{i \neq j} x_i^*$ a ambos lados de la desigualdad, se sigue que $px_j \geq px_i^*$.

(iii) Supóngase nuevamente que $x_j \succ x_j^*$ para cualquier $j \in N \setminus n$. Mostraremos que de hecho la anterior desigualdad es estricta. Por la argumentación anterior, sabemos que existe un λ cercano a uno tal que $\lambda x_j \succ x_j^*$ y tal que

$$p(\lambda x_j) = \lambda p x_j \geq p x_j^*.$$

Si px_j fuera igual a px_j^*, como $p \neq 0$ y x_j^* es positivo, $px_j^* > 0$. Luego, si px_j fuera igual a px_j^*, tendríamos que $px_j - px_j^* = 0$, lo cual es imposible, pues en tal caso se seguiría que $p(\lambda x_j) < px_j^*$. Esta contradicción muestra que $px_i > px_i^*$. Claramente, si normalizamos p para obtener $p^* \in P$, la desigualdad se preserva. □

5 ECONOMÍAS PRIVADAS CON PRODUCCIÓN

Supondremos que hay m consumidores en la economía, denotados por el índice i y representados por los primeros m números enteros positivos. Supondremos también que hay n productores, denotados por el índice j y representados por los enteros positivos $m+1, \ldots, m+n$. El "mercado" será considerado asimismo como un agente, representado por el entero positivo $m+n+1$. Tanto los consumidores, como los productores y el mercado, serán llamados *agentes*, de manera que hay en total $m+n+1$ agentes en la economía. El conjunto de los consumidores será denotado por M, el de los productores por N, y el de todos los agentes por I.

Suponemos que hay l (tipos de) mercancías en la economía, denotados por el índice h. Cada tipo de mercancía es un bien o un servicio (incluyendo por lo tanto los gastos de trabajo), ubicado en un lugar y en un tiempo determinados. Cada consumidor i tiene que escoger un menú o cesta de consumo en un conjunto de posibles cestas X_i, el cual es naturalmente un subconjunto del espacio $\mathbb{R}^l$ de mercancías. Asimismo, cada productor j debe escoger su proceso productivo en un conjunto Y_j, el cual también es un subconjunto del espacio de mercancías $\mathbb{R}^l$. Si $x_i \in X_i$, las coordenadas positivas de x_i representan las cantidades de mercancías que el agente i consumiría si adoptase la decisión de tomar x_i como su menú de consumo; las coordenadas negativas representan el número de horas de trabajo que el agente i tendría que laborar en ciertos oficios si adoptara tal menú. Si $y_j \in Y_j$, las coordenadas positivas de y_j representan las cantidades de productos o outputs netos que el productor j tendría que producir si decidiera adoptar el plan de producción y_j; las coordenadas negativas representan las cantidades de insumos o inputs netos, incluyendo el trabajo.

Recordemos que la adición de dos conjuntos de vectores V, W (de la misma dimensión), denotada por $V + W$, es la familia de todas las sumas de sus elementos, definida por la ecuación:

$$V + W = \{v + w \mid v \in V \text{ y } w \in W\}.$$

La resta de $V - W$ se define como la suma $V + (-W)$, donde

$$-W = \{-w \mid w \in W\}.$$

Se define inductivamente la adición $\sum_{\iota=1}^{\kappa} V_\iota$ de κ conjuntos de vectores (de la misma dimensión), a saber: si $\kappa = 1$, entonces $\sum_{\iota=1}^{\kappa} V_\iota$ es igual a V_1; si $\kappa > 1$ entonces $\sum_{\iota=1}^{\kappa} V_\iota$ es igual a $(\sum_{\iota=1}^{\kappa-1} V_\iota) + V_\kappa$.

De aquí en adelante, X denotará la suma $\sum_{i\in M} X_i$ y Y denotará la suma $\sum_{j\in N} Y_j$. Con estos elementos conceptuales podemos proceder ahora a introducir nuestra primera definición.

DEFINICIÓN 5.1: Una *economía potencial de propiedad privada* es una estructura

$$\langle (X_i, \succsim_i)_{i\in M}, (w_i)_{i\in M}, (\theta_{ij})_{(i,j)\in M\times N}, (Y_j)_{j\in N}, P, d\rangle$$

tal que

(1) Para todo $i \in M$, X_i es un subconjunto cerrado y convexo de $\mathbb{R}^\ell$ que está inferiormente acotado; es decir, existe un vector v_i tal que $v_i \leqq x_i$ para todo $x_i \in X_i$.

(2) Para todo $i \in M$, $(X_i, \succsim_i)$ es una estructura de preferencias tal que $\succsim_i$ es cuasiconvexa, continua, y carece de punto de saturación; es decir, no hay un vector $x_i \in X_i$ tal que $x_i \succ x_i'$ para todo $x_i' \in X_i$.

(3) Para todo $i \in M$, $w_i \in X_i$ y, para algún $x_i \in X_i$, $x_i < w_i$.

(4) Para todo $i \in M$ y $j \in N$, θ_{ij} es un número real no negativo; más aun, para cada $j \in N$, $\sum_{i\in M} \theta_{ij} = 1$.

(5) Para todo $j \in N$, Y_j es un subconjunto compacto y convexo de $\mathbb{R}^\ell$ que contiene al vector 0.

(6) $Y \cap \Omega^\ell = \{0\}$; es decir, no puede haber ningún output neto en la producción agregada sin que haya al menos algún input neto de trabajo.

(7) $Y \cap (-Y) = \{0\}$; es decir, la producción es irreversible.

(8) P es el simplex unitario $\{(p_1, \ldots, p_\ell) \in \Omega^\ell \mid \sum_{h=1}^{\ell} p_h = 1\}$.

(9) d, la función de decisión, es una función de $I \times \left(\prod_{i\in M} X_i\right) \times \left(\prod_{j\in M} Y_j\right) \times P)$ en $\left(\bigcup_{i\in M} X_i\right) \cup \left(\bigcup_{j\in N} Y_j\right) \cup P$.

Un *estado* de la economía es un $(m+n)$-tuplo ordenado $((x_i),(y_j),p)$ de elementos de $\mathbb{R}^l$, el cual es una asignación posible de menús de consumo (x_i) a los consumidores, de producciones (y_j) a los productores y de un precio p por el mercado. Esta posibilidad se debe entender en un sentido muy abstracto, como una asignación imaginable pero quizá irrealizable. Dado un estado $((x_i),(y_j),p)$, la *demanda neta* determinada por el mismo es la diferencia $x-y$, donde $x=\sum_{i\in M}x_i$ y $y=\sum_{j\in N}y_j$. La *demanda excedente* es $z=x-y-w$, de modo que el conjunto de todas las demandas excedentes es $Z=X-Y-\{w\}$, donde $w=\sum_{i\in M}w_i$. Un *equilibrio de mercado* es un estado de la economía cuya demanda excedente es igual o menor que 0. Denotamos con $\mathcal{M}$ el conjunto de todos los equilibrios de mercado.

A diferencia de los estados, que permiten asignaciones realmente imposibles para los agentes, un *estado realizable* es uno que es realmente posible, en el sentido de que $x_i\in X_i$ para todo i, $y_j\in Y_j$ para todo j, y $x-y\leq w$. Es decir, x_i es un consumo factible para el agente i, y_j es una producción factible para j, y $((x_i),(y_j),p)$ es un equilibrio de mercado. El conjunto de todos los estados realizables es denotado por A. Es fácil ver que

$$A=\Big(\Big(\prod_{i\in M}X_i\Big)\times\Big(\prod_{j\in N}Y_j\Big)\Big)\cap\mathcal{M}.$$

Decimos que un menú de consumo x_i para el iésimo consumidor es *realizable* si existe un estado realizable cuyo componente correspondiente a ese consumidor es x_i. El conjunto de todos los consumos realizables del agente i es llamado su *conjunto de consumo realizable* y es denotado por $\widehat{X}_i$.

LEMA 5.2: *Sea* $\langle (X_i,\succsim_i)_{i\in M},(w_i)_{i\in M},(\theta_{ij})_{(i,j)\in M\times N},(Y_j)_{j\in N},P,d\rangle$ *una economía potencial de propiedad privada. Cada estructura de preferencia* $(X_i,\succsim_i)$ $(i\in M)$ *es representable mediante una función de utilidad* u_i *que es cuasicóncava y continua.*

Demostración: Como X_i es convexo, se sigue que es también conexo. Además, por el axioma (2), $\succsim_i$ es débilmente convexa y continua. Por el teorema 3.7 se desprende que existe una función de utilidad continua y cuasicóncava para $(X_i,\succsim_i)$. □

DEFINICIÓN 5.3: Se dice que el sistema de vectores $(x_1^*,\ldots,x_m^*,y_1^*,\ldots,y_n^*,p^*)$ es un *equilibrio competitivo* syss satisface las siguientes condiciones para todo $i\in M$ y $j\in N$:

(1) x_i^* maximiza $u_i^*(x_i)$ sobre

$$\Big\{x_i\in X_i\mid p^*x_i\leq p^*w_i+\text{máx}\Big[0,\sum_{j\in N}\theta_{ij}p^*y_j^*\Big]\Big\}.$$

(2) y_j^* maximiza p^*y_j sobre el conjunto Y_j.

(3) $p^*\in P$ y maximiza pz^* sobre Z

(4) $z^*\leqq 0$ y $p^*z^*=0$.

La expresión máx $\Big[0,\sum_{j\in N}\theta_{ij}p^*y_j^*\Big]$ es necesaria para garantizar que el conjunto $\Big\{x_i\in X_i\mid p^*x_i\leq p^*w_i+\text{máx}\Big[0,\sum_{j\in N}\theta_{ij}p^*y_j^*\Big]\Big\}$ está definido para todos los estados posibles.

TEOREMA 5.4: *Sea* $\mathfrak{E} = \langle (X_i, \succsim_i)_{i\in M}, (w_i)_{i\in M}, (\theta_{ij})_{(i,j)\in M\times N}, (Y_j)_{j\in N}, P, d\rangle$ *una economía, y sea* $\widehat{\mathfrak{E}} = \langle (\widehat{X}_i, \succsim_i)_{i\in M}, (w_i)_{i\in M}, (\theta_{ij})_{(i,j)\in M\times N}, (Y_j)_{j\in N}, P, d\rangle$ *la economía que resulta de sustituir los conjuntos* X_i *por los conjuntos de consumos realizables* $\widehat{X}_i$*. Entonces* $(x_1^*, \ldots, x_m^*, y_1^*, \ldots, y_n^*, p^*)$ *es un equilibrio competitivo para* $\mathfrak{E}$ *syss* $(x_1^*, \ldots, x_m^*, y_1^*, \ldots, y_n^*, p^*)$ *es un equilibrio competitivo para* $\widehat{\mathfrak{E}}$.

Demostración: Supóngase, primero, que $((x_i^*), (y_j^*), p^*)$ es un equilibrio competitivo para $\mathfrak{E}$. Es inmediato, por 5.3(1)(2)(4), que $((x_i^*), (y_j^*), p^*)$ es un estado realizable y, por ende, que $x_i^* \in \widehat{X}_i$. Pero si x_i^* satisface la condición 5.3(1), como X_i contiene a $\widehat{X}_i$, *a fortiori* la sigue satisfaciendo si en ella sustituimos $\widehat{X}_i$ por $\widehat{X}_i$.

Supóngase ahora que $((x_i^*), (y_j^*), p^*)$ es un equilibrio competitivo para $\widehat{\mathfrak{E}}$, pero que x_i^* no satisface 5.3(1) para cualquier i. Entonces existe un vector $\widehat{x}_i \in X_i$ que sí lo hace. En tal caso, por virtud del argumento anterior, $((\widehat{x}_i), (y_j^*), p^*)$ es un equilibrio competitivo para $\widehat{X}_i$, con $\widehat{x}_i \succ x_i^*$, lo cual contradice que $((x_i^*), (y_j^*), p^*)$ es un equilibrio competitivo para $\widehat{\mathfrak{E}}$. Se sigue que x_i^* satisface 5.3(1) y, por ende, $((x_i^*), (y_j^*), p^*)$ es un equilibrio competitivo para $\mathfrak{E}$. □

DEFINICIÓN 5.5: Sea $\mathfrak{E} = \langle (X_i, \succsim_i)_{i\in M}, (w_i)_{i\in M}, (\theta_{ij})_{(i,j)\in M\times N}, (Y_j)_{j\in N}, P, d\rangle$ una economía potencial de propiedad privada. El *sistema social potencial asociado a* $\mathfrak{E}$ es la estructura

$$\mathfrak{S} = \langle X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n, P, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m+n+1}, f_1, \ldots, f_{m+n+1}\rangle$$

definida como sigue, donde $S = X_1 \times \cdots \times X_m \times Y_1 \times \cdots \times Y_n \times P$:

(1) Para $i \in M$ y $s = (x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n, p) \in S$,

$$\varphi_i(s) = \left\{x_i \in X_i \mid px_i \leq pw_i + \text{máx}\left[0, \sum_{j\in N} \theta_{ij} py_j\right]\right\}.$$

(2) Para $j \in N$ y $s = (x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n, p) \in S$,

$$\varphi_j(s) = Y_j.$$

(3) Para $s \in S$, $\varphi_{m+n+1}(s) = P$.

(4) Para $i \in M$ y $s = (x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n, p) \in S$,

$$f_i(s) = u_i(x_i).$$

(5) Para $j \in N$ y $s = (x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n, p) \in S$,

$$f_j(s) = py_j.$$

(6) Para $s \in S$, $f_{m+n+1}(s) = pz$.

Definimos la función de beneficios máximos $\pi_j : P \to \mathbb{R}$, como la función que asigna a cada $p \in P$, el máximo beneficio posible para el productor j dado el sistema de precios p; *i.e.* $\pi_j = \text{máx}_{y_j \in Y_j} py_j$.

DEFINICIÓN 5.6: Sea $\mathfrak{E}$ una economía potencial de propiedad privada y $\mathfrak{S} = \langle X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n, P, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m+n+1}, f_1, \ldots, f_{m+n+1}\rangle$ el sistema social potencial asociado a ella. Para cada agente $\iota \in I$ de la economía potencial y estado s de la misma definimos su *conjunto de acciones óptimas*, $\mu_\iota(s)$, del siguiente modo:

(1) Para $i \in M$ y $s \in S$ sea $\mu_i(s)$ el conjunto

$$\{x_i \in \varphi_i(s) \mid u_i(x_i) = \text{máx}_{x_i' \in \varphi_i(s)} u_i(x_i')\}$$

(2) Para $j \in N$ y $s = (x, y, p) \in S$, sea $\mu_j(s)$ el conjunto

$$\{y_j \in Y_j \mid py_j = \pi_j(p)\}.$$

(3) Para el mercado, dado $s = (x, y, p) \in S$, sea $\mu_{m+n+1}(s)$ el conjunto

$$\{p' \in P \mid p'z = \text{máx}_{q \in P} qz\}.$$

El *conjunto global de acciones óptimas* dado $s \in S$ es

$$\mu(s) = \prod_{\iota \in I} \mu_\iota(s).$$

DEFINICIÓN 5.7: Una *economía de propiedad privada* es una economía potencial de propiedad privada tal que $d(\iota, s) \in \mu_\iota(s)$ para todo $(\iota, s) \in I \times S$.

LEMA 5.8: *Para todo $p \in P$, $pw_i > \text{mín}_{x_i \in \widehat{X}_i} px_i$.*

Demostración: Por el axioma 3, existen menús de consumo $\tilde{x}_i \in X_i$ tales que $\tilde{x}_i < w_\iota$. Dado que $0 \in Y_j$ y Y_j es convexo para todo j, podemos encontrar $\tilde{y}_j \in Y_j$ tales que $\sum_{i \in M} \tilde{x}_i + \sum_{j \in N} \tilde{y}_j \leq w$. Esto implica que $((\tilde{x}_i), (\tilde{y}_j))$ es factible y, por ende, $\tilde{x}_i \in \widehat{X}_\iota$. Claramente, $pw_\iota > p\tilde{x}_i \geq \text{mín}_{x_i \in \widehat{X}_i} px_i$. □

TEOREMA 5.9: *Sea $\mathfrak{E}$ una economía potencial de propiedad privada y $\mathfrak{S}$ su sistema social potencial asociado. Si $\mathfrak{E}$ es en efecto una economía de propiedad privada, entonces $\widehat{\mathfrak{S}} = \langle \widehat{X}_1, \ldots, \widehat{X}_m, Y_1, \ldots, Y_n, P, \varphi_\iota, f_\iota\rangle$ es un sistema social.*

Demostración: Tenemos que probar que $\widehat{\mathfrak{S}} = \langle \widehat{X}_1, \ldots, \widehat{X}_m, Y_1, \ldots, Y_n, P, \varphi_\iota, f_\iota\rangle$ es un sistema social.

Por hipótesis, los conjuntos Y_j y P son no vacíos, compactos y convexos. Para cualquier $x_i \in \widehat{X}_i$ tenemos, por la definición de $\widehat{X}_i$, que para todo $i' \neq i$ y $j \in N$ existen consumos x_i y producciones y_j tales que

$$v_i \leqq x_i \leqq y - \sum_{i' \neq i} x_{i'} + w.$$

Puesto que $x_{i'} \geqq v_{i'}$, se sigue que

$$v_i \leqq x_i \leqq y - \sum_{i' \neq i} v_{i'} + w.$$

Ahora bien, como el conjunto de todos los vectores de la forma $y - \sum_{i' \neq i} v_{i'} + w$ es acotado, pues los conjuntos Y_j son acotados, se sigue que $\widehat{X}_i$ es acotado para todo $i \in M$. Es fácil ver que $w_i \in \widehat{X}_i$, de modo que $\widehat{X}_i \neq \emptyset$; también es fácil ver que $\widehat{X}_i$ es cerrado y convexo.

Para probar que φ_ι es continua, mostraremos que es scs y sci. Como φ_ι es constantemente igual a los conjuntos Y_j y P para $\iota \in I \setminus M$, es obvio que es continua en estos casos. Si $\iota = i \in M$ y $s \in \widehat{S}$, es fácil ver que el conjunto de todos los vectores que satisfacen la desigualdad

$$px_i \leq pw_i + \text{máx}\left[0, \sum_{j \in N} \theta_{ij} p y_j\right]$$

es acotado. Considérese ahora una secuencia (s_k) en $\widehat{S}$ que converge a s_0, una secuencia (x_{ki}) en $\widehat{X}_i$ que converge a x_i, y supóngase que $x_{ki} \in \varphi_i(s_k)$ para todo k. Esto significa que

$$p_k x_{ki} \leq p_k w_i + \text{máx}\left[0, \sum_{j \in N} \theta_{ij} p_k y_{kj}\right]$$

para todo k. Así, en el límite,

$$p_0 x_i \leq p_0 w_i + \text{máx}\left[0, \sum_{j \in N} \theta_{ij} p_0 y_{0j}\right],$$

y por ende $x_i \in \varphi_i(s_0)$.

Considérese ahora una secuencia (s_k) en $\widehat{S}$ que converge a s_0 y supóngase que $x_i \in \varphi_i(s_0)$. Sea $r_k = p_k w_i + \text{máx}\left[0, \sum_{j \in N} \theta_{ij} p_k y_{kj}\right]$. Conforme $(s_k) \to s_0$, $(p_k) \to p_0$ y $(r_k) \to r_0$. Como $x_i \in \varphi_i(s_0)$, tenemos $p_0 x_i \leq r_0$.

Si $p_0 x_i < r_0$, entonces $p_k x_i < r_k$ para todo k suficientemente grande. Constrúyase la secuencia (x_{ki}) con elementos de arbitrarios de $\varphi_i(s_k)$ (el cual es no vacío, pues al menos $w_i \in \varphi_i(s_k)$ para todo k), pero a partir de una k lo suficientemente grande sea $x_{ki} = x_i$ para todo k.

Si $p_0 x_i = r_0$, tómese un $x_i' \in \widehat{X}_i$ tal que $p_0 x_i' < p w_i \leq r_0$. Para k suficientemente grande, $p_k x_i' < r_k$. Para $\lambda \in (0, 1)$ suficientemente pequeña,

$$p_k[\lambda x_i + (1 - \lambda) x_i'] \leq r_k,$$

de modo que $\lambda x_i + (1 - \lambda) x_i' \in \varphi_i(s_k)$.

Sea

$$\lambda_k = \text{mín}\,[1, (r_k - p_k x_i')/(p_k x_i - p_k x_i')].$$

Entonces, para k suficientemente grande, $\lambda_k > 0$ y

$$\lambda_k x_i + (1 - \lambda_k) x_i' \in \varphi_i(s_k).$$

Además, como $(\lambda_k) \to 1$,

$$\text{lím}_{\,k \to \infty}[\lambda_k x_i + (1 - \lambda_k) x_i'] = x_i.$$

Esto establece que φ_i es sci para todo $i \in M$.

Finalmente, es fácil ver que las funciones f_ι $(\iota \in I)$ son continuas y cuasicóncavas. La ley fundamental de un sistema social se cumple por virtud de la definición de economía de propiedad privada. □

TEOREMA 5.10: *Sea $\mathfrak{E}$ una economía de propiedad privada y $\mathfrak{S}$ su sistema social asociado. Entonces $s^* = (x_1^*, \ldots, x_m^*, y_1^*, \ldots, y_n^*, p^*)$ es un equilibrio competitivo para $\mathfrak{E}$ syss s^* es un equilibrio del sistema social $\mathfrak{S}$.*

Demostración: Si s^* es un equilibrio competitivo para $\mathfrak{E}$, las propiedades del equilibrio competitivo implican de inmediato que se satisface las condiciones 5.6(1)(2)(3), por lo que $s^* \in \mu(s^*)$. La conversa es igualmente obvia. □

TEOREMA 5.11: *Si $\hat{\mathfrak{S}}$ es el sistema social asociado a una economía de propiedad privada, entonces existe un equilibrio de $\hat{\mathfrak{S}}$.*

Demostración: Se deduce inmediatamente de la existencia de equilibrios para sistemas sociales (2.10). □

TEOREMA 5.12: *Existe un equilibrio competitivo para una economía de propiedad privada.*

Demostración: Sea $\mathfrak{E}$ es una economía de propiedad privada y consideremos la economía $\hat{\mathfrak{E}}$, así como el sistema social $\hat{\mathfrak{S}}$ asociado a esta economía. Por el teorema 5.11, $\hat{\mathfrak{S}}$ tiene un equilibrio s^*. Por el teorema 5.10, s^* es un equilibrio competitivo para $\hat{\mathfrak{E}}$. Por el teorema 5.4 s^* es asimismo un equilibrio competitivo para $\mathfrak{E}$. □

DEFINICIÓN 5.13: Un estado realizable $((x_i), (y_j))$ es eficiente en el sentido de Pareto si no existe otro estado realizable $((x_i'), (y_j'))$ tal que $x_i' \succ x_i$ para todo $i \in M$.

TEOREMA 5.14: (I Teorema del Bienestar). *Si $((x_i), (y_j), p)$ es un equilibrio competitivo, entonces $((x_i), (y_j))$ es eficiente en el sentido de Pareto.*

Demostración: Supóngase que $((x_i), (y_j))$ no es ESP y sea $(x_i'), (y_j'))$ un estado realizable tal que $x_i' \succ x_i$ para todo i. Entonces, puesto que los consumidores están maximizando su utilidad, el estado $(x_i'), (y_j'))$ debe rebasar las capacidades presupuestarias de los agentes; es decir, para cada $i \in M$,

$$px_i' > pw_i + \sum_{j \in N} \theta_{ij} py_j.$$

Sumando las asignaciones de los consumidores y considerando que $\sum_{i \in M} \theta_{ij} = 1$, tenemos

$$p \sum_{i \in M} x_i' > \sum_{i \in M} pw_i + \sum_{i \in M} py_j.$$

ahora bien como $((x_i'), (y_j'))$ es un equilibrio de mercado,

$$\sum_{i \in M} x_i' = \sum_{j \in N} y_j' + \sum_{i \in M} w_i,$$

de modo que sustituyendo en la ecuación anterior tenemos

$$p\Big[\sum_{j\in N} y'_j + \sum_{i\in M} w_i\Big] > \sum_{i\in M} pw_i + \sum_{i\in M} py_j,$$

lo cual implica que la ganancia agregada de los procesos de producción (y'_j) es mayor que la de los procesos (y_j) bajo los precios p:

$$\sum_{i\in M} py'_j > \sum_{i\in M} py_j.$$

Esto contradice la hipótesis de que $((x_i), (y_j), p)$ es un equilibrio competitivo y, por ende, se establece que $((x_i), (y_j))$ es ESP. □

TEOREMA 5.15: (II Teorema del Bienestar). *Sea $((x_i^*), (y_j^*))$ un estado realizable eficiente en el sentido de Pareto y sea $w_i = x_i^*$ para todo $i \in M$. Si las preferencias son monótonas entonces existe un sistema de precios $p^* \in P$ tal que $((x_i^*), (y_j^*), p^*)$ es un equilibrio walrasiano.*

Demostración: Para cada $i \in M$, sea E_i el conjunto de todas las cestas que son estrictamente preferidas por i a x_i^*:

$$E_i = \{x_i \in X_i \,|\, x_i \succ_i x_i^*\},$$

sea $E = \sum_{i\in M} E_i$, y sea V el conjunto de todas las cestas agregadas viables:

$$V = \{w + \sum_{j\in N} y_j \,|\, y_j \in Y_j\}.$$

Es fácil ver que tanto E como V son convexos y, además, puesto que los consumos agregados en E son inviables porque $((x_i^*), (y_j^*))$ es ESP, E y V no tiene elementos en común. Luego, por el teorema del hiperplano separador (lema 4.18), existe un vector p tal que $pz \geq pz'$ para todo $z \in E$ y $z' \in V$. Un argumento análogo al que se provee en la demostración del teorema 4.19 establece el resultado buscado. □

BIBLIOGRAFÍA

Arrow K. J. y G. Debreu, "Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy", en *Econometrica* 22 (1954):265-290.

Debreu, G., *Theory of Value*, Yale University Press, New Haven, 1959. Traducción al castellano: *Teoría del valor*, Antoni Bosch, Barcelona, 1973.

———, "Existence of a Competitive Equilibrium", en *Handbook of Mathematical Economics* II, compilado por Arrow, K. J., y M. D. Intriligator, North Holland, Amsterdam, 1982:697-743.