

Centro de Investigación y Docencia Económicas (CIDE)



División de Economía

**“Modelo de Asignación de Precios de Crédito Bancario
(MAPCB)”**

T E S I S

que para obtener el título de Licenciado en Economía presenta:

Roque Vicente Hernández Montes

Asesor:

Dr. Fausto Hernández Trillo

México, D.F.

Abril de 2006

Dedicada a la memoria de

Mi abuelo, Vicente Montes Muñiz

Mi más sincero agradecimiento

Al Dr. Alejandro Villagómez, por hacerme ver que la vida lleva su propio ritmo,
ritmo que apenas hoy comienzo a entender;

A la Dra. Elizabeth Ojeda por reubicar mis pies en la tierra y ayudarme a vencer
mis más grandes demonios;

Al Dr. Fausto Hernández, por enseñarme que la vida es práctica y aunque a veces
parezca dura, siempre nos regala una sonrisa honesta;

Al Dr. Humberto Pánuco, para quien, simple y sencillamente, no tengo palabras
que no me hagan estallar en llanto;

Al Dr. Miguel Székely, por mostrarme que la investigación es más enriquecedora y
placentera cuando se trabaja por México;

Mi más sincero agradecimiento

Al Dr. Victor Carreón, de quien me esfuerzo por aprender que la autenticidad
y la sencillez no están peleadas;

Al Centro de Investigación y Docencia Económicas (CIDE) por haberme dado
un segundo hogar, grandes amigos, innumerables alegrías y, por si fuera poco,
la mejor educación que haya podido encontrar;

A mis Padres, por tomar la tarea más difícil de todas... educarme;

A todos ustedes por su Cariño, su Amistad, su Confianza y su Apoyo;

Al Dr. Javier Márquez, por enseñarme que la inteligencia es necesaria
mas no suficiente.

Pido sincera y humildemente el perdón

A todos ustedes, a quienes de una u otra forma he dañado con mi inconstancia,
mi miedo y mi soberbia. Actitudes que si bien no han sido eliminadas,
han tenido ya su primera derrota.

“Un destino fracasado, un desarrollo obstaculizado, deseos insatisfechos no son defectos de una época determinada sino de todo individuo, y sería triste si cada uno de nosotros no tuviera alguna vez en su vida una época en la que le pareciera que el *Werther* fue escrito expresamente para él”.

J. W. Goethe

Índice

Introducción	1
Capítulo 1. El Riesgo de Crédito y su Medición	5
Capítulo 2. Teoría de Portafolio en Cartera de Crédito	17
2.1. Problema de Selección de Cartera	17
2.2. <i>Concentration Risk in Bank Loan Portfolio's</i>	18
2.3. Maximización de la Utilidad Esperada	22
2.3.1. La Función de Utilidad en el Esquema Valor en Riesgo-Rendimiento Esperado	25
2.4. La Frontera Eficiente para Cartera de Crédito	26
2.4.1. El Conjunto Factible de Crédito	26
2.4.2. El Conjunto Eficiente de Crédito	29
2.5. Selección de Portafolio Óptimo en el Esquema Valor en Riesgo-Rendimiento Esperado	36

2.6. Teoría de Selección de Cartera bajo la Existencia de una Tasa Libre de Riesgo	39
Capítulo 3. Modelo de Asignación de Precios de Crédito Bancario (MAPCB)	42
3.1. Equilibrio en el Mercado de Crédito	43
3.2. La Línea de Mercado de Crédito Individual (LMCI)	48
3.2.1. Equilibrio en la <i>Línea de Mercado de Crédito Individual</i>	58
3.3. Correspondencia entre Rendimiento y Precio de un Crédito	60
3.4. Un Ejemplo Numérico	62
Conclusiones	67
Bibliografía	71
Apéndices	74
A.2.1. Frontera Eficiente de Crédito Bancario	76
A.2.2. Concavidad de la Frontera Eficiente	81
A.3.1. Línea de Mercado de Crédito Individual (LMCI)	84
A.3.2. Pago Esperado de un Crédito Individual	87
A.3.3. Modelo de Asignación de Precios de Crédito Bancario (MAPCB) en <i>Matlab6</i>	89
A.3.4. Matriz de varianza-covarianza de las probabilidades de incumplimiento del mercado de crédito	91

Introducción

En los últimos quince años se ha venido incrementando el interés por realizar una adecuada administración del riesgo de crédito, fomentada por los cambios profundos que comenzó a sufrir el mercado a principio de la década de los ochentas, entre los que se encuentran las pérdidas sin antecedentes sufridas en los mercados de bonos corporativos en Estados Unidos. Dicho interés ha contribuido, entre otras cosas, al desarrollo de nuevas técnicas de valuación y administración del riesgo, a la compilación de bases de datos completas y confiables, así como al desarrollo de enfoques de portafolio dentro de la teoría de crédito.

A pesar de los avances obtenidos en materia de riesgo crediticio, todavía existen cuestiones muy importantes inherentes a este mercado que han sido poco estudiadas. Los distintos paradigmas de medición del riesgo empleados en la actualidad, cuyo interés se ha enfocado principalmente en encontrar la distribución de pérdidas lo más apegado posible a la realidad, han descuidado involuntariamente algunas de las cuestiones más importantes

que giran en torno al riesgo de crédito, como son el caso de la *concentración* y de la *relación riesgo-rendimiento de crédito*. Esta última de suma importancia para los agentes crediticios, que buscan, como cualquier otro inversionista, *minimizar su riesgo* y ser competitivos en un mundo cada vez más global.

En un intento por estudiar algunos de estos factores poco tratados del riesgo de crédito, Márquez, J. y López, C. (1999) plantearon el paradigma de medición del riesgo de crédito denominado *Concentration Risk in Bank Loan Portfolio's* que, a juzgar por la literatura revisada, parece ser el único en ofrecer una expresión cerrada para la distribución de probabilidad de las pérdidas, propiedad que le permite observar explícita y aisladamente algunos de los componentes del riesgo de crédito.

Partiendo de la distribución de las pérdidas derivada por dichos autores, *el objetivo del presente trabajo es estudiar la relación explícita que existe entre el rendimiento esperado y el riesgo relevante de los créditos. Relación que nos permitirá acceder a un esquema integral riesgo-rendimiento de crédito y así nos ayudará a ahondar en uno de los aspectos más importantes y poco estudiados del riesgo de crédito.*

Como primer paso, se desarrolla un modelo de selección de cartera de crédito para un banco que actúa de manera individual, en el que el banco encuentra el portafolio de crédito que maximiza su utilidad dentro de un conjunto eficiente de alternativas de inversión. El resultado que arroja este modelo es *una ecuación para las proporciones eficientes de inversión de una cartera de crédito, que permite a los bancos determinar la composición de su cartera de crédito y su fondeo de manera simultánea*. En dicha ecuación, las proporciones eficientes de inversión de los bancos dependen del rendimiento esperado de los créditos, de sus probabilidades de incumplimiento y de la matriz de

varianza-covarianza de estas últimas, así como del nivel de confianza elegido por el banco para medir las pérdidas.

Posteriormente, haciendo el supuesto de que *todos los bancos actúan de la misma manera y que todos ellos buscan maximizar su utilidad*, fue posible derivar un *modelo de equilibrio general que permite determinar la medida de riesgo relevante para cualquier cartera de crédito del mercado y la relación que guarda dicho riesgo con el rendimiento esperado y el precio de los créditos*.

Según este último modelo, *el riesgo relevante para determinar el rendimiento de una cartera de crédito resulta no ser el valor en riesgo total de dicha cartera, sino el riesgo conformado por el impago esperado de la misma y por el riesgo sistémico. Este último proveniente de la sensibilidad del impago de la cartera al incumplimiento del mercado*.

Una de las bondades del modelo es que permite observar la relación entre el precio de ambas fuentes de riesgo. Particularmente muestra *que la compensación, en términos de rendimiento esperado, por incurrir en una unidad más de impago esperado debe ser mayor que la compensación por incurrir en una unidad más de riesgo sistémico*.

Empleando la relación encontrada entre el riesgo relevante y el rendimiento esperado de los créditos, posteriormente fue derivada una ecuación para el cálculo del *pago esperado de un crédito, el cual depende de la tasa libre de riesgo, de su impago esperado y de su riesgo sistémico, además del nivel de confianza elegido para medir el valor en riesgo*.

En contraste con la mayoría de los paradigmas empleados para la medición del riesgo de crédito, *el modelo no tiene como limitante los recursos de cómputo disponibles, debido a que su implementación se realiza a través de operaciones matriciales*

relativamente sencillas, como puede corroborarse en el apéndice 3.3. donde se presenta el algoritmo para el cálculo del *MAPCB* en *Matlab6*. Debido a que la información requerida por el modelo se considera *confidencial* en la mayoría de las ocasiones, la corroboración empírica del modelo se ha dejado a los agentes crediticios, así como a los reguladores financieros que se encuentren interesados en *acceder a un esquema integral riesgo-rendimiento de crédito*.

El presente trabajo se encuentra organizado de la siguiente manera. En el primer capítulo se narra brevemente la historia del riesgo de crédito, así como de su medición, desde sus primeros registros que datan de la antigua Babilonia hasta los últimos años. En el capítulo 2 se plantea el *problema individual de selección de cartera, en el esquema rendimiento esperado-valor en riesgo, que enfrenta un banco*. Se comienza haciendo el supuesto de la no existencia de una tasa libre de riesgo a la que un banco puede prestar y pedir prestado. Posteriormente se relaja dicho supuesto y se observan sus implicaciones sobre la teoría de portafolio. En el último capítulo, se deriva el modelo de asignación de precios de crédito bancario, *que permite determinar la medida de riesgo relevante para cualquier cartera de crédito y la relación que guarda dicho riesgo con el rendimiento esperado y el precio de los créditos*.

Capítulo 1. El Riesgo de Crédito y su Medición

El *riesgo de crédito* es la forma de riesgo más antigua que existe en los mercados financieros y tiene su origen en el préstamo mismo, cuyos primeros registros datan del *Código Hammurabi* (1800 a.c.) de la antigua Babilonia. En sus inicios, y prácticamente hasta comienzos del siglo XIX d.c., la decisión de otorgar un crédito se tomaba con base en el conocimiento minucioso del solicitante y sólo una pequeña fracción de ellos tenían acceso al crédito.

Entre 1830 y 1850 d.c., gracias al incremento en las necesidades de crédito comercial provocado por el auge de los ferrocarriles, el aumento del comercio interior y el desarrollo de la industria, el sistema de crédito comenzó a evolucionar. No obstante fue hasta la segunda mitad de ese siglo cuando se observó una explosión en las necesidades de crédito que se vio reflejada en un incremento tanto en el número de créditos como en el número de bancos dentro de Europa (principalmente en Francia).

El crecimiento del mercado de crédito, iniciado a mediados del siglo XIX, experimentó una creciente masificación a lo largo del siglo XX que dejó obsoleto el esquema de otorgamiento de créditos predominante durante más de tres mil quinientos años. A medida que se fue multiplicando el número de clientes de la banca, se fue haciendo cada vez más difícil conocer detalladamente a cada uno de ellos, por lo que era cada vez más necesario buscar nuevas metodologías que permitieran a los bancos controlar su riesgo con un menor costo.

Es a mediados de la década de los ochenta cuando, como resultado de distintas fuerzas del mercado,¹ surgió la preocupación por emplear nuevos esquemas en la medición del riesgo de crédito, que no estuvieran basados en el conocimiento exhaustivo del solicitante y que midieran la exposición al riesgo de crédito de manera más adecuada.

Como resultado, en los últimos quince años se han realizado múltiples intentos por adecuar los avances obtenidos en la medición del riesgo de activos financieros al riesgo de crédito. No obstante, ninguno de los modelos sobre la teoría de activos financieros ha conseguido entrar suavemente al mercado de crédito, debido a la diferencia existente entre las fuentes de riesgo. Mientras que la fuente del riesgo en el mercado de activos financieros son las pérdidas provocadas por cambios en el precio de los activos, la *fente del riesgo de crédito es el incumplimiento de los deudores*.

La teoría de portafolio para activos financieros tuvo su origen en 1952 con el desarrollo de dos modelos cuyo propósito era la construcción de carteras de inversión que ofrecieran un rendimiento esperado con la mayor certeza posible de su realización. En el

¹ Como el incremento en el número de bancarrotas en todo el mundo, la caída en el valor de los colaterales en algunos mercados, la existencia de márgenes más competitivos en los préstamos, la tendencia hacia una diferenciación entre calidad de la deuda y el monto de la misma y el dramático crecimiento de nuevos instrumentos, como los derivados de crédito, con su inherente exposición al riesgo.

primero de ellos, planteado por Harry Markowitz (1952), se presupone el conocimiento de la función de utilidad del inversionista. Según este modelo, una vez que se *asocia el riesgo con la incertidumbre*, el inversionista puede determinar la combinación de riesgo-rendimiento que más le agrade. La idea original de Markowitz consistió en asociar el riesgo -que es función de la incertidumbre- con la varianza (σ^2) del rendimiento de los activos.²

En el segundo modelo, Andrew D. Roy (1952) planteó la definición moderna de riesgo. Roy definió el riesgo como *la probabilidad de que suceda un evento indeseable*. Su modelo supone que todo inversionista es capaz de determinar un nivel mínimo o umbral de rendimiento aceptable por debajo del cual, cualquier rendimiento es considerado como un evento indeseable o desastroso. El modelo de Roy no implica el conocimiento explícito de la función de utilidad del inversionista, razón por la que simplifica el problema de selección de cartera.³

A principio de la década de los sesenta William Sharpe (1964), John Lintner (1965.a y 1965.b) y Jan Mossin (1966) realizaron la siguiente aportación importante al problema de inversión de activos financieros. Ellos derivaron un modelo de asignación de precios para activos financieros, denominado, en la actualidad, *Capital Asset Pricing Model (CAPM)*. Según este modelo, el rendimiento de los activos financieros depende de un solo factor: el

² Posteriormente fueron planteadas algunas modificaciones a la varianza como mejores medidas de riesgo. Una de ellas fue la *desviación estándar* (σ) -raíz cuadrada de la varianza- que muchas veces es preferida a la varianza, debido a que se encuentra expresada en las mismas unidades que el rendimiento esperado (μ). Otra modificación planteada a la varianza es la *semi-varianza*, que sólo toma en cuenta la dispersión de los valores menores que el rendimiento medio, y deja fuera los valores mayores al mismo, con la justificación de que un rendimiento más alto que el esperado no representa riesgo. Véase por ejemplo Markowitz (2000), pp. 188-201. Un enfoque distinto al de media-varianza para medir el riesgo fue planteado por Shalit, H. y Yitzhaki, S. (1984). En dicho enfoque, los autores propusieron el empleo de la *diferencia media de Gini* como medida de riesgo y demostraron que su aplicación es igual de sencilla que la varianza pero permite realizar una mejor valuación de la variabilidad de un activo, gracias a que posee una fisonomía basada en el criterio de dominancia estocástica.

³ Aunque ambos modelos parten de definiciones distintas de riesgo, está demostrado que una cartera óptima en el sentido de Roy es también eficiente en el sentido de Markowitz. Véase Márquez, J. (1982).

mercado. Su mayor aportación a la teoría de finanzas fue relacionar de manera lineal el rendimiento y el riesgo de los activos.

Con el desarrollo de los derivados⁴ -en la década de los setentas- se mitigaron algunos de los factores de riesgo existentes en los mercados financieros. No obstante, este hecho vino acompañado por el surgimiento de nuevos factores de riesgo que hicieron más difícil la valuación del mismo. El rápido crecimiento de estos mercados y la dificultad para medir la exposición al riesgo provocaron que, a principio de los 90's, algunos de los participantes más renombrados del mundo en los mercados financieros⁵ sufrieran pérdidas billonarias. Dichas pérdidas, en conjunto con otros factores,⁶ despertaron un mayor interés en los reguladores financieros por llevar a cabo un seguimiento adecuado de la exposición al riesgo de las entidades financieras. Después de la quiebra de algunas instituciones financieras en las décadas de los ochentas y los noventas fue evidente que se necesitaba una buena medida de riesgo, que tomara en cuenta la probabilidad de ocurrencia de los eventos indeseables, así como la magnitud de las pérdidas asociadas a tales eventos. Esta medida de riesgo fue denominada *Valor en Riesgo (VaR)*,⁷ la cual haría su primera aparición en la década de los noventas.

El término valor en riesgo fue utilizado por primera vez en el reporte "Derivatives: Practices and Principles" publicado por el Grupo de los 30⁸ en 1993. En este reporte se

⁴ Los derivados financieros son instrumentos cuyo precio depende -se deriva- del precio de otro activo. Un excelente tratado sobre derivados financieros es el libro clásico de Hull, J., 1989, *Options, Futures and other Derivatives*, USA, Prentice-Hall.

⁵ *Orange County, Barings y Metallgesellschaft*, entre otros.

⁶ Véase pie de página número 1.

⁷ Por las siglas en inglés de *Value at Risk*.

⁸ El Grupo de los 30, fundado en 1978, es una organización no lucrativa integrada por altos ejecutivos y reguladores financieros, así como por académicos, la cual busca contribuir al entendimiento de la economía internacional y de las finanzas. El lector interesado puede consultar la página de internet <http://www.group30.org>.

sugirió el uso del valor en riesgo por parte de los participantes en el mercado de derivados para medir la exposición al riesgo. Un año después,⁹ el *Comité de Basilea*¹⁰ propuso la adopción de requerimientos mínimos de capital para cubrir el riesgo de mercado en que incurrieran los bancos, así como el uso del *VaR* para identificar, medir y controlar la exposición al riesgo.¹¹

A juzgar por la bibliografía existente, es a mediados de los noventas cuando una parte del equipo de investigadores de *J.P. Morgan* -convertida posteriormente en *RiskMetrics Group*- dio a conocer el primer método de aplicación del *VaR*, llamado *RiskMetrics®*. Con el lanzamiento, en 1994, de este servicio financiero gratuito, compuesto por un documento técnico y una base de datos que contenía información sobre la

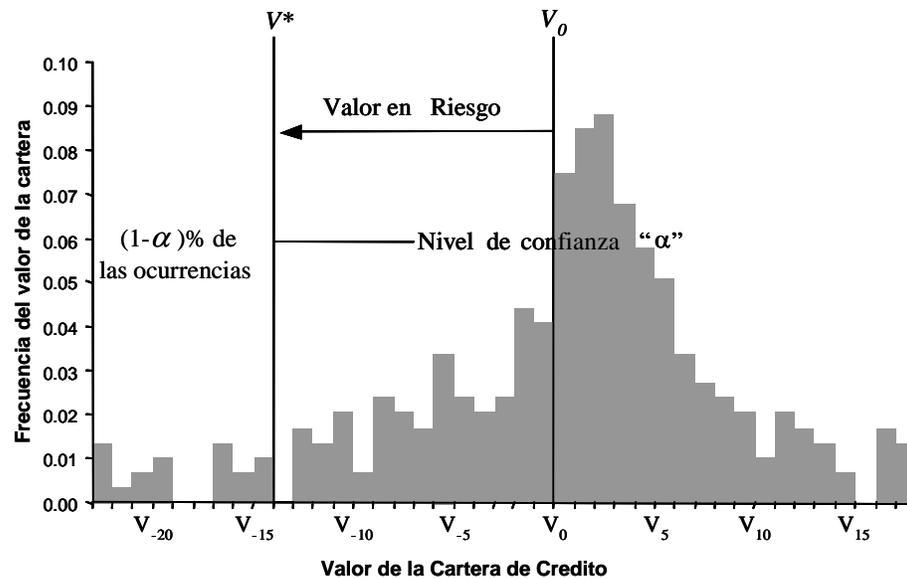
⁹ Basle Committee on Banking Supervision (1994).

¹⁰ En junio de 1974, los reguladores alemanes se vieron obligados a liquidar el Herstatt Bank que se encontraba en apuros. Ese día, un cierto número de bancos tenían que realizar un pago en franco alemán al Herstatt Bank, en Frankfurt, mientras que dicho banco tenía que realizar un depósito en dólares americanos en Nueva York para cubrir la operación. A causa de la diferencia en zonas horarias, el Herstatt Bank cerró operaciones durante la realización de los pagos respectivos y la contraparte no recibió sus pagos en dólares. Para responder a las implicaciones de múltiples jurisdicciones fue formado el *Basle Committee on Banking Supervision* bajo el auspicio del *Bank for International Settlements (BIS)*, en el que se encontraban representantes de los bancos centrales y los reguladores financieros del *Grupo de los 10 (G-10)*. Actualmente el Comité de Basilea se encuentra formado por autoridades de once países: Bélgica, Canadá, Francia, Alemania, Italia, Japón, Holanda, Suiza, Suecia, Reino Unido y Estados Unidos. A lo largo de su existencia, el comité ha presentado iniciativas para (1)definir el papel de los reguladores financieros en situaciones de múltiples jurisdicciones, (2)asegurar que los bancos transnacionales no eludan una adecuada supervisión bancaria mediante la alusión al cumplimiento de los requerimientos por parte de los reguladores nacionales y (3)promover la homologación de los requerimientos de capital bancarios. La página de internet del comité es <http://www.bis.org/bcbs>.

¹¹ En junio de 2004 el Basle Committee on Banking Supervision publicó un nuevo acuerdo de Basilea, conocido como Basilea II, con los objetivos de proveer mayor seguridad al sistema financiero, mantener -por lo menos- el nivel actual de capitalización del mismo, mejorar la competitividad bancaria y promover una mejor medición del riesgo. Para cumplir sus objetivos, Basilea II propone tres pilares: Pilar I.Requerimientos Mínimos de Capital, Pilar II.Supervisión y Pilar III.Disciplina de Mercado. El primero de ellos propone reglas para el cálculo de los requerimientos de capital, motivando a los bancos a mejorar su administración y medición del riesgo de Crédito, de Mercado y Operacional. El segundo de ellos crea un marco regulador con vistas a procurar las mejores prácticas en la administración de riesgos, además de que procura disminuir otro tipo de riesgos como el reputacional y el estratégico. Finalmente, el tercer pilar plantea requerimientos para una mayor transparencia en la estructura de capital, exposición al riesgo y suficiencia de capital. La referencia al documento completo es Basle Committee on Banking Supervisión (2004).

volatilidad y la correlación para alrededor de veinte mercados iniciaba el empleo del VaR como medida alternativa para la administración del riesgo de mercado.

El valor en riesgo (*VaR*) se define como la máxima pérdida esperada “*x*” en un intervalo de tiempo “*t*”, bajo condiciones normales en el mercado, para un nivel de confianza de “ α ”. Dicho de otra forma, el *VaR* dice que la probabilidad de que las pérdidas excedan el nivel “*x*” en un tiempo determinado “*t*” no excede de “ $1-\alpha$ ”. En la gráfica 1.1 se



Gráfica 1.1. Distribución de valores posibles de una cartera de crédito y su Valor en Riesgo

observa el valor en riesgo de un portafolio de crédito. En el eje de las abscisas se tienen los valores de la cartera de crédito y en el eje de las ordenadas su frecuencia relativa. El valor inicial de la cartera de crédito está representado por “ V_0 ” y el mínimo valor esperado de la cartera, dado un nivel de confianza de “ α ”, por “ V^* ”. El valor en riesgo es la diferencia entre el valor inicial de la cartera (V_0) y el mínimo valor esperado (V^*) en un tiempo “*t*”, dado un nivel de confianza de “ α ”, es decir, “ $V_0 - V^*$ ”.¹²

Gracias al éxito obtenido para medir el riesgo de mercado de activos financieros, el deseo de emplear el *VaR* en el mercado de crédito creció rápidamente, logrando así el

¹² Un extenso tratado sobre el valor en riesgo (*VaR*) se presenta en el libro clásico de Jorion, P. (1997).

primer consenso entre los participantes de este mercado sobre la forma de medir el riesgo de crédito. No obstante, a pesar del consenso existente sobre el empleo del *VaR* como medida de riesgo de crédito, su implementación en este mercado no ha sido tan fácil, ya que un banco se enfrenta a dos problemas de consideración: la naturaleza dicotómica del riesgo de crédito y el horizonte temporal de los créditos. El riesgo de crédito está directamente relacionado con el riesgo de impago; es decir, con la existencia de dos posibles escenarios en los que se puede encontrar un deudor: cumplimiento o incumplimiento del pago de la deuda.¹³ El hecho de que el riesgo de crédito sea función del riesgo de impago dificulta la implementación del *VaR*, debido a que fue creado originalmente para valores continuos de los activos financieros. En cuanto al horizonte temporal, las operaciones en el mercado de crédito se caracterizan por tener un horizonte de tiempo largo -meses o años-, en contraste con las operaciones en el mercado de activos financieros, donde los activos pueden cambiar de precio en periodos muy cortos de tiempo -minuto a minuto-. Lo anterior dificulta la estimación de las carteras de crédito.

Actualmente, para realizar el cálculo del valor en riesgo de crédito, los agentes que intervienen en el mercado de crédito se apoyan en *métodos de calificación de cartera*. Los métodos de calificación de cartera son herramientas que ayudan a calcular la probabilidad de incumplimiento y la magnitud de las pérdidas cuando este se presenta.¹⁴ Entre los enfoques desarrollados es posible identificar dos corrientes: los esquemas de calificación que se basan en una *ponderación de los factores* determinantes del incumplimiento de las

¹³ El autor del presente trabajo reconoce la existencia del incumplimiento parcial, no obstante considera que escapa a los fines perseguidos por el presente trabajo aumentando la complejidad del modelo innecesariamente.

¹⁴ En los modelos que toman en cuenta distintos estados de calificación de deuda, -como es el caso de *CreditMetrics™*- los métodos de calificación de cartera también permiten estimar de manera explícita, además de la probabilidad de impago y la magnitud de las pérdidas, los patrones de migración hacia distintos estados de deterioro.

obligaciones y los de tipo *fundamental*, que emplean el impacto de las proyecciones de variables económicas y financieras en los estados financieros de la empresa y con base en esto determinan condiciones bajo las cuales dicha empresa estaría en quiebra desde el punto de vista contable.¹⁵ Dentro de los esquemas de ponderación de factores se distinguen dos corrientes: los que aprovechan la intuición de los expertos y tratan de sistematizarla utilizando la tecnología disponible¹⁶ y los basados en técnicas econométricas o de tipo discriminante.^{17,18}

¹⁵ El principal exponente de esta corriente -empleado por la metodología *KMV* y por *CreditMetricsTM*- es el modelo de valuación de activos corporativos propuesto por Robert Merton (1974), que parte del principio contable de que una empresa está en quiebra cuando el valor de sus pasivos supera el valor de sus activos. La gran aportación de dicho estudio fue mostrar la manera en que la información disponible en el mercado puede ser utilizada para estimar el valor de los activos de una empresa mediante la teoría de opciones financieras. Para un estudio comparativo de los modelos de valuación de bonos corporativos propuestos por Merton, Geske, Leland y Toft, Longstaff y Scwartz y Collin-Dufresne y Goldstein véase Eom, Y. H., Helwege, J. y Huang, J. (2003).

¹⁶ Estos modelos son del dominio de la inteligencia artificial, como es el caso de las redes neuronales y los sistemas expertos. Véase por ejemplo Coats, P y Fant, K., 1993, "Recognizing Financial Distress Patterns Using A Neural Network Tool", *Financial Management*", Vol. 22, No. 3, pp. 142-155 en donde se presenta un modelo que predice la quiebra corporativa para los Estados Unidos y Altman, E., Marco, G. y Varetto, F., 1994, "Corporate Distress Diagnosis: Comparisons Using Linear Discriminant Analysis and Neural Networks", *Journal of Banking and Finance*, Vol 18, No. 3, pp. 505-529 en el que se presenta un modelo de quiebra corporativa para Italia o Trippi, R. y Turban, E., 1996, *Neural Networks in Finance and Investing*. Chicago, Irwin Professional Publishing en donde pueden encontrarse algunas aplicaciones de las redes neuronales al riesgo de crédito.

¹⁷ El principal exponente de esta corriente es el modelo denominado *Z-score* planteado por Edward Altman en 1968, en el que se plantea una función discriminante para distinguir a las empresas sanas de aquellas con alta probabilidad de quiebra. Este primer modelo, incluye el capital de trabajo, las ganancias antes de intereses e impuestos, las ganancias retenidas, el valor de mercado de las acciones y las ventas, expresadas como razón del valor de los activos. Casi una década después, E. Altman desarrolla, en 1977, una segunda generación de su modelo *Z-Score* denominada *ZETA*. En este nuevo modelo, Altman propuso, además de nuevas técnicas discriminantes, 27 variables que capturan cinco aspectos de la empresa: productividad, liquidez, capitalización, variabilidad de las ganancias y ganancias y cumplimiento de obligaciones con relación al apalancamiento. Véase Altman, E., 1968, "Financial Ratios, Discriminant Analysis and the Prediction of Corporate Bankruptcy", *Journal of Finance*, Vol. 23, September, pp. 589-609 y Altman, E., Haldeman, R. y Narayanan, P., 1977, "ZETA Analysis: A new Model to Identify Bankruptcy Risk of Corporations", *Journal of Banking and Finance*, Vol. 1, June, pp. 29-54.

¹⁸ El autor desea aclarar que la clasificación antes descrita no es del todo rigurosa ya que es posible encontrar modelos en los que se combine el uso de la tecnología con un planteamiento teórico de tipo fundamental, como puede observarse en Atiya, A., 2001, "Bankruptcy Prediction for Credit Risk Using Neural Networks: A Survey and New Results". *IEEE Transactions on Neural Networks*, Vol. 12, No. 4, July, pp.929-935.

Entre los paradigmas prácticos más aceptados en la actualidad para medir el riesgo de crédito¹⁹ se pueden distinguir dos enfoques: los *Modelos de Marcar a Mercado (MMM)* como *CreditMetrics*^{TM,20} y los *Modelos de Impago (MI)* cuyo principal exponente es *CreditRisk*⁺.²¹ Las mayores diferencias entre ambos esquemas radican en la forma de conjugar los diferentes elementos del riesgo de crédito -probabilidades individuales de incumplimiento, correlaciones entre ellas y pérdidas en caso de impago- para obtener la distribución de probabilidad de las pérdidas.

Desde sus orígenes, y por razones históricas, los distintos paradigmas para medir el riesgo de crédito enfocaron su atención en la búsqueda de la distribución de probabilidad de las pérdidas lo más apegado posible a la realidad, lo que provocó una pérdida involuntaria de parsimonia en los modelos. *CreditMetrics*TM es producto de la preocupación por medir el incumplimiento de los emisores de instrumentos de deuda corporativos y su aplicación requiere información²² que sólo se encuentra disponible en los mercados financieros desarrollados. Para obtener el monto o valor en riesgo de crédito por medio de este modelo, primero se calculan las probabilidades conjuntas de migración de los bonos a los distintos estados de calidad e incumplimiento y su valor en cada uno de dichos estados. Con base en estos elementos, se construye la distribución de pérdidas de la cartera y finalmente se busca

¹⁹ Para un análisis comparativo de los cuatro paradigmas de medición de riesgo de crédito más aceptados (*CreditMetrics*TM, *KMV*, *CreditRisk*⁺ y *CreditPortfolioView*) véase Crouhy, M., et. al. (2000). La metodología de *KMV* puede encontrarse en Kealhofer, S., 1998, "Portfolio Management of Default Risk", *KMV Corporation*. La referencia clásica del paradigma *CreditPortfolioView* es Wilson, T., 1997, *Portfolio Credit Risk (I)*, *Risk Magazine*, Vol. 10, No. 9, September y Wilson, T., 1997, *Portfolio Credit Risk (II)*, *Risk Magazine*, Vol. 10, No. 10, October.

²⁰ Gupton, G., et. al. (1997).

²¹ *Credit Risk*⁺ (1997).

²² Los elementos de mercado que requiere *CreditMetrics*TM para encontrar la distribución de pérdidas de una cartera son: (1) Calificaciones de crédito que otorgan las empresas calificadoras de valores (como *Standard & Poors*, *Moody's* y *Fitch*) que dependen del conocimiento de la probabilidad de incumplimiento histórica para papeles de deuda en cada rubro de calificación, así como de las tasas de migración de los mismos a diferentes estados de calificación de deuda por un lado así como de los diferenciales de tasas de interés entre papeles de distinta calidad por otro y (2) los precios de instrumentos de deuda e indicadores de su calidad.

el nivel de confianza deseado para el cálculo del valor en riesgo. El gran supuesto que hace *CreditMetrics*TM dentro del proceso del cálculo del *VaR* es que el cambio del valor de los créditos de la cartera en el tiempo sigue una distribución Normal. Debido a la heterogeneidad de los elementos mencionados y a la dimensión que alcanza el problema cuando existe un número grande de créditos en la cartera,²³ este paradigma recurre a simulaciones de tipo Montecarlo para encontrar la distribución de pérdidas.

CreditRisk⁺ obtiene la distribución de pérdidas de manera indirecta, a través de *Funciones Generadoras de Probabilidad (FGP's)*. Como primer paso, este modelo obtiene la *FGP* del número de incumplimientos y después, haciendo un supuesto de agrupabilidad sobre el nivel de pérdidas dado incumplimiento de cada deudor, obtiene la *FGP* de pérdidas de la cartera. Para facilitar el modelado, el paradigma recurre a un supuesto *Poisson* sobre el incumplimiento de los deudores. Una vez que se obtiene la *FGP* de incumplimientos, los deudores son agrupados en bandas según su nivel de exposición al riesgo. Combinando ambos elementos, se obtiene la *FGP* de pérdidas, cuya distribución de probabilidad es desconocida. Por esta razón, *CreditRisk*⁺ efectúa recursiones numéricas para recuperar la distribución de probabilidad de pérdidas en unidades estándar que posteriormente serán convertidas a unidades monetarias. Finalmente, el *VaR* es el valor correspondiente al percentil del nivel de confianza de “ α ” que se tome sobre dicha distribución.²⁴

Como hemos mencionado, la preocupación por encontrar la distribución de probabilidad de las pérdidas lo más apegada posible a la realidad, llevó a tal grado de

²³ Los cálculos necesarios para obtener la distribución conjunta de migración de la cartera crecen en forma exponencial. Para una cartera con “ N ” créditos, con un esquema de calificaciones que contempla “ C ” niveles de calidad -*CreditMetrics*TM supone siete más impago-, el número de valores posibles de la cartera y, por lo tanto, el de operaciones numéricas requeridas para hacer los cálculos es “ C^N ”.

²⁴ Algunos estudios recientemente realizados muestran que las metodologías de *CreditMetrics*TM y *CreditRisk*⁺, pueden mapearse una en la otra bajo ciertas equivalencias paramétricas. Véase Crouhy, et al. (2000) y Gordy, M. (2000).

complejidad la modelación que obligó a recurrir a técnicas numéricas, que son grandes consumidoras de recursos de cómputo, para la obtención de dicha distribución, dificultando así el acceso a un esquema integral riesgo-rendimiento de crédito mediante su uso.

Uno de los intentos por adaptar los descubrimientos sobre teoría de activos financieros al crédito es el trabajo realizado por Edward Altman (1997). En este artículo, Altman plantea un modelo de optimización de cartera para bonos basado en el *cociente de Sharpe*. Empleando el rendimiento esperado anual de los bonos, el problema planteado es maximizar el *cociente de Sharpe* para cada nivel de rendimiento esperado. El modelo incluye una restricción presupuestal del inversionista y límites individuales de inversión determinados de manera exógena al modelo. En este modelo, Altman regresa al empleo de la varianza como medida de riesgo y demuestra que los resultados son muy similares a los obtenidos con el empleo de la pérdida inesperada.²⁵ Un posible inconveniente de este esquema es que su aplicación se encuentra limitada a bonos.

Empleando un enfoque completamente distinto, Gregory Duffee (1999) derivó un modelo de precios del riesgo de incumplimiento para bonos corporativos. En dicho modelo, la probabilidad instantánea de impago es modelada mediante un proceso de difusión de raíces-cuadradas para permitir la correlación entre los bonos riesgosos y la tasa libre de riesgo. En esta investigación, el autor recurre a la aplicación de un *filtro de Kalman* extendido para incorporar los dos componentes -temporal y estructural o transversal- del precio de los bonos. De igual forma que el modelo derivado por Altman (1997), el modelo presenta un posible inconveniente: su aplicación es a bonos.

²⁵ La *pérdida inesperada* de un portafolio es el componente del *valor en riesgo* que captura la *volatilidad* del rendimiento -en el mercado de activos financieros- o de la probabilidad de incumplimiento -en el mercado de crédito-. Una explicación más detallada de las pérdidas no esperadas en el mercado de crédito puede encontrarse en Caouette, J, et. al. (1998), pp. 242-246.

En el mismo año, Javier Márquez y Calixto López (1999) y posteriormente Javier Márquez (2002) propusieron un paradigma de medición de riesgo de crédito que, a juzgar por la bibliografía revisada, parece ser el único que ofrece una *expresión cerrada para la distribución de las pérdidas*. Este paradigma permite, además, relacionar la suficiencia de capital con el riesgo de crédito, medir el riesgo de concentración y determinar límites individuales sobre los créditos.

Al ofrecer una expresión cerrada para la distribución de probabilidad de las pérdidas, este paradigma dejó abierta la posibilidad de acceder a un esquema integral de riesgo-rendimiento que permitirá completar otro de los aspectos más importantes y poco estudiados del riesgo de crédito: la *relación explícita entre riesgo y rendimiento de los créditos*.

Capítulo 2. Teoría de Portafolio para Cartera de Crédito

2.1. Problema de Selección de Cartera

Una cartera o portafolio de crédito “*c*” se define como cualquier combinación de créditos que otorga un banco. El problema de selección de cartera o de portafolio consiste en elegir la cartera óptima entre un conjunto de carteras posibles de inversión. Si el rendimiento esperado y el realizado de un portafolio fueran iguales, el problema se reduciría a escoger el(los) activo(s) que otorgue(n) el mayor rendimiento. No obstante, en los mercados financieros, donde el rendimiento de los activos es riesgoso, el problema de selección de cartera se convierte en un problema de elección bajo incertidumbre, particularmente, en el problema de elección de una *combinación riesgo-rendimiento*.

Para llevar a cabo la elección de portafolio, es necesario identificar dos elementos. El primero de ellos es un *esquema de preferencias del inversionista* (un banco en este caso), que permita jerarquizar las distintas combinaciones de riesgo-rendimiento de acuerdo a sus preferencias. El segundo elemento es la *región de oportunidades de inversión*, que permita identificar las carteras de crédito, en el plano riesgo-rendimiento, entre las que se puede realizar la elección. En el presente trabajo, el esquema de preferencias será modelado mediante el *teorema de maximización de la utilidad esperada* y la región de oportunidades de inversión será identificada introduciendo el concepto de *frontera eficiente de portafolio*.

La medida de riesgo de crédito utilizada será el valor en riesgo de la cartera (VaR_c) expresado como proporción del valor total de la cartera de crédito (V_c), es decir, expresándolo como VaR_c/V_c .¹ Particularmente, la forma funcional del valor en riesgo que se empleará corresponde a la del modelo general propuesto por Márquez, J. y López, C. (1999) y Márquez, J. (2002).

2.2. Concentration Risk in Bank Loan Portfolio's

En el modelo general, este paradigma permite trabajar con probabilidades de impago distintas para los créditos y la existencia de correlación entre ellas. Para modelar lo anterior, la cartera crediticia del banco se representa mediante el vector- N “**F**” y se supone que la distribución de probabilidad de incumplimiento puede caracterizarse mediante un *vector- N*

¹ Dado que el valor en riesgo se expresa en unidades monetarias, es necesario realizar una estandarización del mismo. Dicha estandarización se logra expresando el valor en riesgo como proporción del valor total de la cartera de crédito (V_c); es decir, expresando el VaR_c como “ VaR_c/V_c ”. Si no se hiciera lo anterior, sería posible que un banco que controla adecuadamente su riesgo, pero que tiene una cartera de crédito muy grande posea un nivel de VaR_c mayor que un banco que lleva un mal control de su riesgo pero que posee una cartera de créditos pequeña.

de probabilidades esperadas de impago ($\boldsymbol{\pi}$) y su correspondiente matriz de varianza-covarianza (\mathbf{M}). Entonces, suponiendo que la distribución de pérdidas de la cartera puede ser caracterizada por su media y su varianza, el valor o monto en riesgo de una cartera “c” para el nivel de confianza deseado “ α ” queda como:

$$VaR_c^\alpha = \mathbf{F}^T \boldsymbol{\pi} + z_\alpha \sqrt{\mathbf{F}^T \mathbf{M} \mathbf{F}} \quad (2.1)$$

donde “ $\mathbf{F}^T \boldsymbol{\pi}$ ” es el incumplimiento esperado y $z_\alpha \sqrt{\mathbf{F}^T \mathbf{M} \mathbf{F}}$ es el incumplimiento inesperado o no esperado de la cartera de crédito. Dentro de este último, “ z_α ” es la variable normal estandarizada para un nivel de confianza de “ α ”.

Según este paradigma, si se requiere que la pérdida, con un nivel de confianza de “ α ”, no exceda el capital de un banco (K), entonces debe cumplirse que:

$$VaR_c^\alpha = \mathbf{F}^T \boldsymbol{\pi} + z_\alpha \sqrt{\mathbf{F}^T \mathbf{M} \mathbf{F}} \leq K \quad (2.2)$$

Dividiendo la ecuación (2.2) entre el valor total de la cartera (V_c), se obtiene el monto en riesgo expresado como proporción del valor total de la cartera que puede relacionarse con el coeficiente de capitalización bancaria (ψ). Un banco cumple con suficiencia de capital si se satisface la desigualdad:

$$\frac{VaR_c^\alpha}{V_c} = \mathbf{x}^T \boldsymbol{\pi} + z_\alpha \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}} \leq \psi = \frac{K}{V_c} \quad (2.3)$$

donde “ \mathbf{x} ” es el vector que representa la composición de la cartera crediticia de un banco, expresando cada crédito como proporción del valor total de la cartera; “ $\mathbf{x}^T \boldsymbol{\pi}$ ” y $z_\alpha \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}}$ son el incumplimiento esperado y no esperado, respectivamente, de la cartera “ c ” como proporción del total de su valor.

Redimensionando la ecuación (2.2),² se obtienen cotas superiores para el valor en riesgo (2.4.a) y la concentración del riesgo (2.4.b):

$$\bar{p} + z_\alpha \sigma \sqrt{H(\mathbf{G})} \leq \psi \quad (2.4.a)$$

y

$$H(\mathbf{G}) \leq \left(\frac{\psi - \bar{p}}{z_\alpha \sigma} \right)^2 \quad (2.4.b)$$

donde $\bar{p} = \frac{\mathbf{F}^T \boldsymbol{\pi}}{V_c}$ es la probabilidad esperada de impago de la cartera, $H(\mathbf{G}) = \frac{\mathbf{G}^T \mathbf{G}}{(\mathbf{1}^T \mathbf{G})^2}$ es el

índice de concentración de Herfindahl-Hirshman³ de la variable \mathbf{G} y $\sigma = \frac{\mathbf{1}^T \mathbf{G}}{V_c} = \frac{\mathbf{1}^T \mathbf{G}}{\mathbf{1}^T \mathbf{F}}$ es

una medida de la desviación estándar de la probabilidad esperada de impago.

² Partiendo de (2.1), como \mathbf{M} es una matriz positiva definida, existe una matriz \mathbf{Q} tal que $\mathbf{M} = \mathbf{Q} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{Q}^T$, donde $\boldsymbol{\Lambda}$ es la matriz diagonal de valores característicos de \mathbf{M} y \mathbf{Q} es una matriz ortogonal de los vectores característicos de \mathbf{M} , con la propiedad de que $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$. Sea $\mathbf{S} = \mathbf{Q} \boldsymbol{\Lambda}^{1/2} \mathbf{Q}^T$, donde $\boldsymbol{\Lambda}^{1/2}$ es la matriz diagonal formada por las raíces cuadradas de los valores característicos de \mathbf{M} , de manera que $\mathbf{M} = \mathbf{S}^T \mathbf{S}$ y haciendo el cambio de variable $\mathbf{G} = \mathbf{S} \mathbf{F}$ se obtiene

$$VaR_c^\alpha = \mathbf{F}^T \boldsymbol{\pi} + z_\alpha \sqrt{\mathbf{G}^T \mathbf{G}} \leq K$$

Multiplicando y dividiendo el término dentro del radical por $(\mathbf{1}^T \mathbf{G})^2$ y dividiendo todo por el valor de la cartera (V_c), se obtienen (2.4.a) y (2.4.b).

³ El lector interesado en este índice de concentración puede consultar Martín, S., 1993, *Advanced Industrial Economics*, Great Britain, Blackwell Publishers, p. 165 o Tirole, J., 1988, *The Theory of Industrial Organization*, USA, The MIT Press, pp. 221-23.

Este redimensionamiento del vector de créditos “**F**” a través de “**S**” permite observar que la varianza total de las pérdidas ($\sigma\sqrt{H(\mathbf{G})}$) tiene dos componentes: el *efecto de la varianza de las probabilidades de incumplimiento*, medida por “ σ ” y el *efecto de la concentración*, medido por “ $H(\mathbf{G})$ ”.⁴

Dado que la forma más empleada de administrar el riesgo de concentración es fijar límites sobre la cantidad de crédito que se puede otorgar a cada deudor, este paradigma establece una cota para el límite individual de crédito mediante la siguiente desigualdad:⁵

⁴ El cambio de variable de “**F**” por “**G**” equivale a un redimensionamiento del vector “**F**” en función de la matriz “**S**” que representa la raíz cuadrada de la matriz de varianza-covarianza de las probabilidades de impago de cada crédito (**M**). Este redimensionamiento implica que se dará mayor peso a los créditos con mayores varianzas y correlaciones positivas con los demás créditos de la cartera. En términos de riesgo, esto significa que se da mayor importancia a los créditos más riesgosos y se disminuye la de los menos riesgosos. El redimensionamiento anterior, también implica que la concentración en el monto de crédito otorgado no es lo único que debe tomarse en cuenta, sino que también debe considerarse la varianza de la probabilidad de incumplimiento y la correlación entre esta y la del resto de los créditos. Si es verdad que mucho crédito en pocas manos puede ser riesgoso, también es cierto que resulta aún más peligroso que mucho riesgo se encuentre concentrado en un cierto grupo de créditos. Es decir, en un momento dado puede representar más riesgo un grupo de muchos créditos pequeños con varianzas muy grandes y que estén altamente correlacionados entre sí, que un grupo pequeño de créditos grandes con varianzas pequeñas y que no tengan mucha relación entre ellos, ni con otros créditos.

⁵ Para su derivación, introduzcamos el siguiente Teorema (Márquez, J. y López, C. (1999), pp.11-12). Si se requiere que $\mathbf{F} \leq \theta \mathbf{V} \mathbf{1}$, entonces $H(\mathbf{F}) \leq \theta$ y la máxima concentración bajo la medida de *Herfindahl-Hirschman* se da si y sólo si “**F**” es alguna permutación de la distribución siguiente:

$$f_k = \begin{cases} \theta V; & k = 1, 2, 3, \dots, n \\ 0; & k = n + 1, n + 2, \dots, N \end{cases}$$

donde $n\theta V = V \Rightarrow n\theta = 1$ ó $n = 1/\theta$.

Empleando el teorema anterior, si $\mathbf{F} \leq \theta \mathbf{V} \mathbf{1}$ implica que $H(\mathbf{F}) \leq \theta$, entonces, $\mathbf{G} \leq \theta \mathbf{V} \mathbf{1}$ implica que $H(\mathbf{G}) \leq \theta$ y por lo tanto $\mathbf{F} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{G} \leq \theta (\mathbf{S}^{-1} \mathbf{V} \mathbf{1})^T \Rightarrow H(\mathbf{G}) \leq \theta$. No obstante que el problema de fijar límites individuales de crédito queda resuelto con la desigualdad anterior, es difícil de instrumentar, ya que los únicos límites que son útiles son los impuestos sobre el monto de los créditos; es decir sobre “**F**”. Haciendo:

$$H(\mathbf{G}) \leq \theta \frac{H(\mathbf{G})}{H(\mathbf{F})} \leq \left(\frac{\psi - \bar{p}}{z_\alpha \sigma} \right)^2$$

se obtiene:

$$\theta \leq \frac{H(\mathbf{F})}{H(\mathbf{G})} \left(\frac{\psi - \bar{p}}{z_\alpha \sigma} \right)^2$$

$$\theta \leq \frac{1}{\lambda_{\max}} \left(\frac{\mathbf{1}^T \mathbf{G}}{\mathbf{1}^T \mathbf{F}} \right)^2 \left(\frac{\psi - \bar{p}}{z_\alpha \sigma} \right)^2 = \frac{1}{\lambda_{\max}} \left(\frac{\psi - \bar{p}}{z_\alpha \sigma} \right)^2 \quad (2.5)$$

que ya no se encuentra en términos de “**G**”, sino de “**F**”, por lo que su implementación es más sencilla. Si se escoge un límite individual (θ) tal que satisfaga la desigualdad (2.5), se satisface también la desigualdad (2.4.b), que controla la concentración del riesgo de manera tal que exista suficiencia de capital para cubrir el monto en riesgo de la cartera de crédito.

2.3. Maximización de la Utilidad Esperada

El *Teorema de Maximización de la Utilidad Esperada* supone que el decisor puede jerarquizar sus preferencias para distintas combinaciones de riesgo y rendimiento. Este teorema parte de una base axiomática -*comparabilidad, transitividad, lotería, independencia, el equivalente cierto y continuidad*- de la que se deriva un esquema de curvas de indiferencia que representan la estructura de preferencias del inversionista.⁶

Los axiomas de comparabilidad y transitividad aseguran la existencia de la función de utilidad. La definición de lotería introduce el principio de maximización. Los axiomas de independencia, el equivalente cierto y continuidad representan una posible racionalidad

Utilizando el *cociente de Rayleigh* y escribiendo los valores característicos menor y mayor de la matriz “**M**” como “ λ_{\min} ” y “ λ_{\max} ”, respectivamente, se sabe que:

$$\lambda_{\min} \leq \left(\frac{\|\mathbf{G}\|}{\|\mathbf{F}\|} \right)^2 \leq \lambda_{\max}$$

Finalmente, el paradigma obtiene la cota para el límite individual de crédito, dada por la desigualdad (2.5).

⁶ Un resumen detallado de la Teoría de la Utilidad bajo incertidumbre se encuentra en Copeland, T. y Weston, J. (1992), pp.77-108.

para la jerarquización de las preferencias sobre un conjunto de alternativas de elección bajo incertidumbre.

Concretamente, el *Teorema de Maximización de la Utilidad Esperada* dice que, si un decisor es confrontado con alternativas de elección cuyos resultados son inciertos y puede jerarquizar sus preferencias según los cinco axiomas mencionados, entonces: (1) Existe una función de utilidad “ $U(.)$ ” que preserva el orden en sus preferencias. Si la utilidad que proporciona “ x ” es mayor que la utilidad proporcionada por “ y ”, entonces necesariamente “ x ” es preferido sobre “ y ” ($U(x) > U(y) \Rightarrow x \succ y$). Análogamente, si la utilidad de “ x ” es igual a la utilidad de “ y ”, entonces necesariamente “ x ” es indiferente a “ y ” ($U(x) = U(y) \Rightarrow x \equiv y$).

(2) El ordenamiento de alternativas de resultado incierto se hace de acuerdo al principio de la utilidad esperada ($U(G(x, y; p)) = \lambda \cdot U(x) + (1 - \lambda) \cdot U(y)$).

Es importante mencionar que la función de utilidad ($U(.)$) a la que se refiere el teorema anterior, no es única. Cualquier transformación lineal de ella ($V(.) = \lambda + \tau U(.)$) también califica como función de utilidad. Por esta razón, se dice que la función de utilidad de los individuos, implícita en el teorema de maximización de la utilidad esperada, es *única hasta una transformación lineal*. Una consecuencia de esto es que las funciones de utilidad son ordinales; es decir, sólo el orden de preferencias, y no el nivel específico de la función, tiene sentido.

Al esquema axiomático anterior, es necesario agregarle el *axioma de no-saciedad*, según el cual, siempre se prefiere más riqueza final que menos. De esta forma, la función de utilidad empleada será monótona creciente en el nivel de riqueza. Esto implica que la

utilidad marginal de la riqueza ($UMg(W)=U'(W)$) es siempre positiva, es decir, $U'(W)=\partial U/\partial W > 0$.

Por último, para completar el esquema de preferencias de los bancos, necesitamos conocer su *actitud hacia el riesgo*. Tomando en cuenta que la utilidad marginal de la riqueza es positiva, la función de utilidad de los individuos adversos al riesgo es estrictamente cóncava.⁷

Se dice que una *función de utilidad* (U), definida en el intervalo de números reales $[W+h, W-h]$, es *estrictamente cóncava* si para todo $p \in [0, 1]$ y para todo $W \in [W+h, W-h]$, se cumple que la utilidad que el individuo recibe de su riqueza ($U(W)$) es mayor que la proporcionada por la utilidad de una lotería justa $U[G(W+h, W-h; p)]$, es decir, $U(W) = U(p(W+h) + p(W-h)) > U[G(W+x, W-x; p)] = pU(W+x) + pU(W-x)$.⁸

Siguiendo este esquema de preferencias, la función de utilidad de los bancos quedará representada por curvas de indiferencia cuya pendiente es la *tasa marginal de sustitución entre rendimiento y riesgo* ($TMS_{\text{riesgo}}^{\text{rendimiento}}$). En este caso, la tasa marginal de sustitución entre rendimiento (un bien) y riesgo (un mal) mide la cantidad de rendimiento que un banco está dispuesto a ceder con tal de disminuir su nivel de riesgo, para obtener el mismo nivel de utilidad.

⁷ Dado que la utilidad marginal de la riqueza es positiva, pueden darse tres tipos de función de utilidad: lineal, cóncava y convexa. La función de utilidad de los individuos neutrales al riesgo es lineal. Los individuos propensos o amantes del riesgo tienen una función de utilidad convexa. Finalmente, los sujetos adversos al riesgo tienen una función de utilidad estrictamente cóncava. Algunas de las funciones de utilidad más empleadas para individuos con aversión al riesgo son: la exponencial ($U(W)=-e^{-W}$), la logarítmica ($U(W)=\ln(W)$), la cuadrática ($U(W)=W-W^2$) y la potencia ($U(W)=W^\beta$) para $\beta \leq 1$, entre otras.

⁸ De la definición se deduce que un individuo con función de utilidad estrictamente cóncava siempre preferirá conservar su riqueza (K). Dicho de otra forma, *un individuo tiene aversión al riesgo si y sólo si rechaza entrar en una lotería justa, contra la alternativa de conservar su riqueza con certeza*.

2.3.1. La Función de Utilidad en el Esquema Valor en Riesgo-Rendimiento Esperado

Según el esquema anterior, si los bancos no tienen saciedad, son adversos al riesgo y sus preferencias cumplen con la base axiomática para la maximización de la utilidad esperada, es posible encontrar una función de utilidad, representada por las curvas de indiferencia del banco, que nos ayude a resolver el problema de selección de cartera de crédito bancario.

Si el rendimiento esperado de una cartera “c” se denota como “ \bar{r}_c ” y el valor en riesgo, para el nivel de confianza deseado, como proporción del valor total de la cartera se denota como “ VaR_c^α / V_c ”,⁹ entonces la función de utilidad de un banco bajo este esquema tiene la forma $U = U(\bar{r}_c, \frac{VaR_c^\alpha}{V_c})$, que es una función creciente del rendimiento esperado

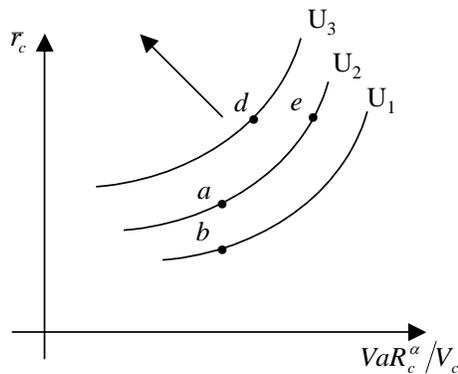
($\frac{\partial U}{\partial \bar{r}_c} > 0$) y decreciente del valor en riesgo de la cartera ($\frac{\partial U}{\partial VaR_c^\alpha / V} < 0$). Dicho de otra forma,

los bancos siempre prefieren mayor rendimiento y menor valor en riesgo. Dado que los bancos son adversos al riesgo, la tasa marginal de sustitución entre rendimiento esperado y valor en riesgo es negativa ($TMS_{VaR/V}^{\bar{r}} < 0$). Un banco nunca aceptará una reducción del rendimiento esperado si la caída no va acompañada por una disminución del valor en riesgo. Además, la $TMS_{VaR/V}^{\bar{r}}$ es decreciente. A medida que se van sacrificando unidades de rendimiento esperado (un bien), es necesario compensar al banco con disminuciones cada vez mayores de valor en riesgo (un mal) para mantener inalterado su nivel de utilidad. Análogamente, a medida que se va incurriendo en niveles mayores de valor en riesgo (un

⁹ A partir de este momento, cada vez que se haga referencia al valor en riesgo, siempre será como proporción del valor de la cartera, es decir, siempre se hará referencia a la relación “ VaR_c / V_c ”.

mal), es necesario compensar al banco con aumentos cada vez mayores de rendimiento esperado (un bien), para que mantenga el mismo nivel de utilidad.

La última característica importante de la función de utilidad bajo este esquema es que el nivel de utilidad aumenta en sentido noroeste en el mapa de indiferencia, debido a



Gráfica 2.1. Curvas de utilidad de un banco en el esquema valor en riesgo-rendimiento esperado

que los inversionistas siempre prefieren mayor rendimiento y menor riesgo. En la gráfica 2.1 se observa que la cartera de crédito “a” es preferida sobre la “b”, ya que para el mismo nivel de valor en riesgo, la primera de ellas ofrece un rendimiento mayor que la segunda. De

manera análoga, el portafolio de crédito “d” es preferido sobre el “e” debido a que para el mismo nivel de rendimiento esperado, el primero de ellos tiene un valor en riesgo menor que el segundo.

2.4. La Frontera Eficiente para Cartera de Crédito

2.4.1. El Conjunto Factible de Crédito

Como se mencionó al inicio del presente capítulo, para realizar la elección de cartera o portafolio óptimo, un banco debe tomar en cuenta, además de sus preferencias, sus posibilidades. El banco debe escoger una combinación de riesgo y rendimiento de acuerdo a sus preferencias, sujetándose siempre a que el portafolio producto de su elección se

encuentre dentro de la región factible. Como ya se ha mencionado, una cartera de crédito “ c ” se define como cualquier combinación de créditos que otorga un banco. Al conjunto de carteras de crédito que representa las alternativas de inversión de un banco que son objeto de la elección se le conoce como conjunto factible o región de oportunidades de inversión del banco. En la vida real, los bancos enfrentan restricciones que acotan su región de oportunidades de inversión de cartera, a decir: *la escasez de recursos y la relación inversa entre riesgo y rendimiento.*

La escasez de recursos significa que nadie puede invertir más de lo que tiene, ni quiere invertir menos de lo que ha decidido invertir. Si “ \mathbf{x} ” es el vector- N de proporciones de inversión de la cartera de crédito de un banco y “ $\mathbf{1}$ ” es un vector- N unitario, la restricción presupuestal de un banco puede escribirse como:

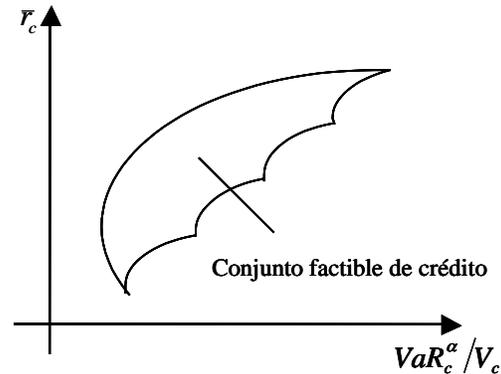
$$\mathbf{1}^T \mathbf{x} = \mathbf{1} \quad (2.6)$$

La segunda restricción que acota la región de oportunidades de inversión, está dada por la relación inversa entre el riesgo y el rendimiento de las carteras de crédito. Nadie puede acceder a rendimientos sumamente elevados sin incurrir en riesgos igualmente elevados. Esta imposibilidad define una región de combinaciones factibles de inversión, por lo que el banco tendrá que escoger una combinación de riesgo y rendimiento de crédito tomando en cuenta sus preferencias pero también sus posibilidades.

La restricción presupuestal y la relación inversa que existe entre el valor en riesgo y el rendimiento esperado de una cartera de crédito, dan origen a una región factible de crédito similar a la que se muestra en la gráfica 2.2. La ubicación exacta de la región

factible de inversión de un banco dentro del mapa valor en riesgo-rendimiento esperado, depende de los créditos individuales que conformen el conjunto de alternativas de inversión del banco.

Además de las dos restricciones anteriores, un banco se enfrenta al problema de disponer de recursos suficientes para otorgar créditos. Para hacerse de recursos, los bancos recurren a distintos instrumentos de captación.¹⁰ El monto recaudado mediante dichos



Gráfica 2.2. Región factible de inversión de un banco en el esquema valor en riesgo-rendimiento esperado

instrumentos puede ser representado matemáticamente por una proporción negativa ($x < 0$) dentro del portafolio de inversión (\mathbf{x}) del banco. Por lo anterior, en el presente trabajo no será impuesta la restricción de no negatividad sobre las proporciones de inversión¹¹ y de esta forma se permitirá que los bancos determinen la cartera de crédito y su fondeo de manera simultánea.

¹⁰ Ejemplo de los instrumentos de captación bancaria son los depósitos a plazo fijo, pagarés con rendimiento liquidable al vencimiento, cuentas de cheques y cuentas de ahorro entre otros.

¹¹ Usualmente en la teoría de portafolio para activos financieros no se permite la realización de ventas en corto -equivalentes al fondeo bancario dentro de la teoría de crédito- dentro del portafolio de inversión, ya que dichas operaciones se consideran demasiado riesgosas. Esto se representa normalmente por un conjunto de restricciones de no negatividad sobre las proporciones de inversión del portafolio, que puede escribirse como " $x \geq 0$ ". La venta en corto de un activo financiero se lleva a cabo cuando un inversionista vende un activo que no posee mediante la siguiente operación: El inversionista pide prestado, a un precio y un plazo previamente determinados y especificados en un contrato, un activo que vende inmediatamente en el mercado, obteniendo así una cantidad de dinero en moneda que invierte en otro activo financiero.

2.4.2. El Conjunto Eficiente de Crédito

En el inciso anterior se dijo que el conjunto factible contiene todas las alternativas de inversión que son objeto de la elección. El problema que se enfrenta ahora es encontrar, dentro de la región factible, aquellas carteras de crédito que son eficientes en el esquema valor en riesgo-rendimiento esperado.

Definición 2.1. Cartera Eficiente de Crédito. Se dice que una cartera de crédito “ c ” con rendimiento esperado “ \bar{r}_c ” y valor en riesgo, para un nivel de confianza de “ α ”, como proporción del valor total de la cartera “ VaR_c^α / V_c ”, es eficiente en rendimiento esperado-valor en riesgo si: (i) Es una cartera factible; (ii) dado un nivel de valor en riesgo, como proporción del valor de la cartera, ofrece el máximo rendimiento esperado; y (iii) dado un nivel de rendimiento esperado ofrece el mínimo valor en riesgo, como proporción del valor de la cartera.

En otras palabras, una cartera de crédito es eficiente en rendimiento esperado-valor en riesgo si no existe otra cartera con el mismo rendimiento esperado y con menor valor en riesgo y si no existe otra cartera con el mismo nivel de valor en riesgo que ofrezca mayor rendimiento esperado.

Supóngase que dos carteras de crédito tienen el mismo rendimiento esperado pero distinto nivel de valor en riesgo. Entonces, por aversión al riesgo, los bancos preferirán aquella cartera que ofrezca el menor valor en riesgo de entre ellas dos. Análogamente, si dos carteras tienen el mismo valor en riesgo, pero ofrecen distinto rendimiento esperado, por el axioma de no saciedad, los bancos preferirán aquella que ofrezca el mayor rendimiento esperado de entre ellas.

El problema que se enfrenta para encontrar las carteras eficientes de crédito es encontrar aquellas combinaciones de crédito que tengan el mínimo valor en riesgo (VaR_c^α / V_c), dado un nivel de confianza de “ α ”, para cada nivel de rendimiento esperado (\bar{r}).

Entonces, sea “ \mathbf{x} ” el vector- N de proporciones de inversión de la cartera de crédito, sea “ $\boldsymbol{\pi}$ ” el vector- N de probabilidades de incumplimiento de los créditos y sea “ \mathbf{M} ” la matriz de varianza-covarianza de las probabilidades de incumplimiento. Suponiendo que la distribución de pérdidas de la cartera puede ser caracterizada por sus dos primeros momentos, entonces el monto en riesgo de una cartera de crédito “ c ”, expresado como proporción del valor total de la cartera, es igual a:

$$\frac{VaR_c^\alpha}{V_c} = \mathbf{x}^T \boldsymbol{\pi} + z_\alpha \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}} \quad (2.7)^{12}$$

Suponiendo además, que “ \mathbf{r} ” es el vector- N que contiene el rendimiento esperado de los créditos de la cartera, el rendimiento esperado de dicha cartera es igual a:

$$r_c^\circ = \mathbf{x}^T \mathbf{r}. \quad (2.8)$$

Proposición 2.1. Cartera Eficiente de Crédito Bancario. Sea el valor en riesgo de una cartera “ c ”, para un nivel de confianza de “ α ”, igual a $VaR_c^\alpha / V_c = \mathbf{x}^T \boldsymbol{\pi} + z_\alpha \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}}$ (2.7) y sea el rendimiento esperado de la cartera igual a

¹² Que corresponde al lado izquierda de la desigualdad (2.3).

$r_c^\circ = \mathbf{x}^T \mathbf{r}$ (2.8). Entonces, una cartera de crédito bancario “c” es una cartera eficiente si y sólo si el vector de proporciones de crédito “x” es la solución al siguiente problema cuadrático:

$$\underset{\{\mathbf{x}\}}{\text{Min}} \quad \mathbf{x}^T \boldsymbol{\pi} + z_\alpha \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}} \quad \text{s.a.} \quad \mathbf{x}^T \mathbf{r} = r^\circ \quad ; \quad \mathbf{x}^T \mathbf{1} = 1$$

Resolviendo.¹³ Formando el *Lagrangeano*, “x” es la solución a:

$$L(\mathbf{x}, \lambda, \theta) = \mathbf{x}^T \boldsymbol{\pi} + z_\alpha \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}} - \lambda (\mathbf{x}^T \mathbf{r} - r^\circ) - \theta (\mathbf{x}^T \mathbf{1} - 1) \quad (2.9)$$

Utilizando un poco de cálculo se obtienen las *condiciones de primer orden (C.P.O.)*, dadas por:

$$\nabla L_x(\mathbf{x}, \lambda, \theta) = \boldsymbol{\pi} + \frac{z_\alpha}{\sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}}} \cdot \mathbf{M} \mathbf{x} - \lambda \mathbf{r} - \theta \mathbf{1} = \mathbf{0} \quad (2.10.a)$$

$$\nabla L_\lambda(\mathbf{x}) = r^\circ - \mathbf{x}^T \mathbf{r} = 0 \quad (2.10.b)$$

$$\nabla L_\theta(\mathbf{x}) = 1 - \mathbf{x}^T \mathbf{1} = 0 \quad (2.10.c)$$

donde “0” (en la ecuación (2.10.a)) es un vector-*N* de ceros.

Rescribiendo la desviación estándar de las pérdidas como $\sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}} = \sigma(\mathbf{x}^*)$ y despejando (2.10.a) para “x*” se tiene:

¹³ El álgebra más detallada de la proposición puede consultarse en el **Apéndice 2.1. Cartera Eficiente de Crédito Bancario.**

$$\mathbf{x}^* = \frac{\sigma(\mathbf{x}^*)}{z_\alpha} \mathbf{M}^{-1}(\lambda \mathbf{r} + \theta \mathbf{1} - \boldsymbol{\pi}) \quad (2.11)$$

Premultiplicando la ecuación (2.11) por “ \mathbf{r}^T ” y “ $\mathbf{1}^T$ ” y utilizando (2.10.b) y (2.10.c) se llega a:

$$\mathbf{r}^T \mathbf{x}^* = r^\circ = \frac{\sigma(\mathbf{x}^*)}{z_\alpha} \mathbf{r}^T \mathbf{M}^{-1}(\lambda \mathbf{r} + \theta \mathbf{1} - \boldsymbol{\pi}) \quad (2.12)$$

y

$$\mathbf{1}^T \mathbf{x}^* = 1 = \frac{\sigma(\mathbf{x}^*)}{z_\alpha} \mathbf{1}^T \mathbf{M}^{-1}(\lambda \mathbf{r} + \theta \mathbf{1} - \boldsymbol{\pi}) \quad (2.13)$$

que son las restricciones del problema original evaluadas en el óptimo.

Para encontrar el valor de “ λ ”, se despejan (2.12) y (2.13) para $\frac{z_\alpha}{\sigma(\mathbf{x}^*)}$ y se igualan.

Después de un poco de álgebra se obtiene:

$$\lambda = m - \theta n \quad (2.14)$$

con $m = \frac{(\mathbf{r}^T - r^\circ \cdot \mathbf{1}^T) \mathbf{M}^{-1} \boldsymbol{\pi}}{(\mathbf{r}^T - r^\circ \cdot \mathbf{1}^T) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{r}}$ y $n = \frac{(\mathbf{r}^T - r^\circ \cdot \mathbf{1}^T) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{1}}{(\mathbf{r}^T - r^\circ \cdot \mathbf{1}^T) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{r}}$. Nótese que “ λ ”, en la ecuación

(2.14), es el aumento en el nivel de valor en riesgo provocado por la búsqueda de una unidad más de rendimiento esperado, es decir, “ λ ” es el valor en riesgo marginal del rendimiento esperado ($VaRMg(\bar{r})$).

Para encontrar el valor de “ θ ”, se igualan (2.12) y (2.13) y se sustituye en (2.14) en el resultado. Después de un poco de álgebra se obtiene:

$$\theta = -\frac{(\mathbf{r} - r^\circ \cdot \mathbf{1})^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{y}}{(\mathbf{r} - r^\circ \cdot \mathbf{1})^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{z}} \quad (2.15)$$

donde $\mathbf{y} = (m \cdot \mathbf{r} - \boldsymbol{\pi})$ y $\mathbf{z} = (\mathbf{1} - n \cdot \mathbf{r})$.

Finalmente, sustituyendo (2.14) y (2.15) en (2.11) se obtiene el conjunto *eficiente de inversión* (\mathbf{x}^*) *para carteras de crédito*, que aunque no posee una forma cerrada puede ser resuelto mediante recursiones numéricas:

$$\mathbf{x}^* = \frac{\sigma(\mathbf{x}^*)}{z_\alpha} \mathbf{M}^{-1} \left[\frac{E}{D} \mathbf{1} + \frac{1}{AD} (CD - BE) \mathbf{r} - \boldsymbol{\pi} \right] \quad (2.16)$$

donde:

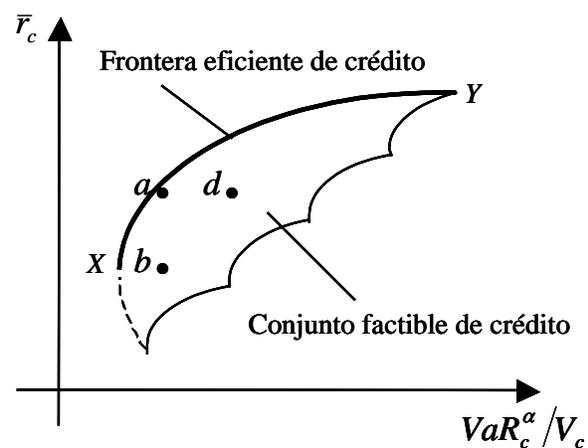
$$A = \frac{1}{r^\circ} [\mathbf{r} - r^\circ \mathbf{1}]^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{r}, \quad B = \frac{1}{r^\circ} [\mathbf{r} - r^\circ \mathbf{1}]^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{1},$$

$$C = \frac{1}{r^\circ} [\mathbf{r} - r^\circ \mathbf{1}]^T \mathbf{M}^{-1} \boldsymbol{\pi},$$

$$D = \frac{1}{r^\circ} [\mathbf{r} - r^\circ \mathbf{1}]^T \mathbf{M}^{-1} \left[\mathbf{1} - \frac{B}{A} \mathbf{r} \right] \text{ y} \quad E = \frac{1}{r^\circ} [\mathbf{r} - r^\circ \mathbf{1}]^T \mathbf{M}^{-1} \left[\frac{C}{A} \mathbf{r} - \boldsymbol{\pi} \right]. \blacksquare$$

Según la ecuación anterior, las proporciones eficientes de inversión de cartera para los bancos dependen del rendimiento esperado de los créditos (\bar{r}), de la probabilidad de incumplimiento de los mismos (π) y de su respectiva matriz de varianza-covarianza (\mathbf{M}), de la variabilidad de las pérdidas ($\sigma(\mathbf{x}^*)$), del intervalo de confianza para medir el riesgo (α) y del nivel de rendimiento esperado que deseen (r°).

Para comprender más fácilmente el resultado que hemos obtenido, en la gráfica 2.3 se observa la frontera eficiente de crédito (segmento XY) generada por la ecuación anterior. Recordando la definición (2.1) de cartera eficiente de crédito, se sabe que una combinación factible de crédito que no se encuentre



Gráfica 2.3. Conjunto eficiente de crédito

sobre el segmento “ XY ” no será eficiente en el esquema rendimiento esperado-valor en riesgo. En la misma gráfica, se observan tres carteras factibles de inversión. La cartera de crédito “ a ” domina a la cartera “ b ”. Ambas tienen el mismo nivel de valor en riesgo, no obstante, la cartera “ a ” ofrece un rendimiento esperado mayor al ofrecido por la cartera “ b ”. En realidad, no existe otra cartera que ofrezca mayor rendimiento esperado que “ a ” y que tenga el mismo nivel de riesgo, por lo que la cartera “ a ” cumple así la segunda premisa de la definición 2.1.

Análogamente, la misma cartera de crédito “ a ” domina a la cartera “ d ”. Ambas ofrecen el mismo nivel de rendimiento esperado, pero la primera de ellas tiene un valor en riesgo menor que la segunda. En realidad, no existe otra cartera de crédito que ofrezca el

mismo nivel de rendimiento esperado que “a” y que tenga menor valor en riesgo que esta. Se dice entonces que la cartera “a” cumple con la tercer premisa de la definición 2.1. Dado que la cartera “a” cumple con las tres condiciones de la *definición 2.1 (Cartera Eficiente de Crédito)*, la cartera “a” es una cartera eficiente de crédito.

Como se ha mencionado, la frontera eficiente de crédito contiene las combinaciones factibles de valor en riesgo y rendimiento esperado que son eficientes. La pendiente de dicha frontera es la *tasa marginal de transformación entre el rendimiento y el valor en riesgo* ($TMT_{VaR_c/V_c}^{\bar{r}_c}$). La tasa marginal de transformación mide la cantidad de un bien que puede obtenerse si se renunciara a una unidad de otro bien (o si se aceptara una unidad de un mal). En este caso, la tasa marginal de transformación entre el rendimiento esperado y el valor en riesgo mide el aumento en el rendimiento esperado que puede obtener un banco si acepta incurrir en una unidad más de valor en riesgo. *Dado que el rendimiento esperado (un bien) y el valor en riesgo (un mal) tienen una relación inversa, la tasa marginal de transformación entre ellos es negativa* ($TMT_{VaR_c/V_c}^{\bar{r}_c} < 0$), *es decir, un aumento en el rendimiento esperado va acompañado de un aumento en el valor en riesgo. Además, la* $TMT_{VaR_c/V_c}^{\bar{r}_c}$ *es creciente, es decir, a medida que se va sacrificando rendimiento esperado, se van obteniendo disminuciones cada vez menores de valor en riesgo. Análogamente, a medida que se va incurriendo en un mayor valor en riesgo, la ganancia obtenida en rendimiento esperado va siendo cada vez menor.*

2.5. Selección de Portafolio Óptimo en el Esquema Valor en Riesgo-Rendimiento Esperado

Las curvas de indiferencia representan combinaciones de rendimiento esperado y valor en riesgo que proporcionan el mismo nivel de utilidad al banco. La frontera eficiente de crédito representa las combinaciones eficientes en rendimiento esperado y valor en riesgo. La cartera óptima de inversión de un banco es aquella que maximiza la utilidad del banco y se encuentra dentro del conjunto eficiente de crédito.

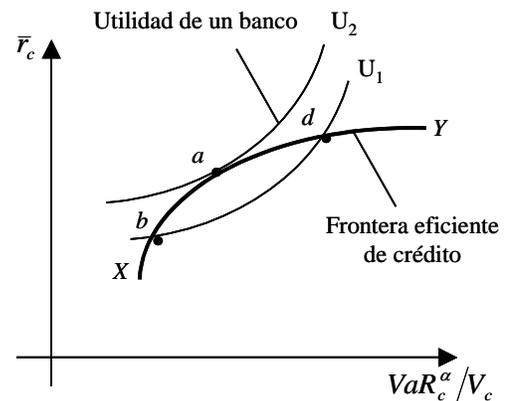
Proposición 2.2. Conjunto Eficiente de Crédito. La cartera de crédito óptima de un banco que tiene aversión al riesgo debe ser eficiente en rendimiento esperado-valor en riesgo.

Demostración. Si existen dos carteras de crédito, $c_1 = \{\bar{r}_1, \frac{VaR^\alpha}{V_1}\}$ y $c_2 = \{\bar{r}_2, \frac{VaR^\alpha}{V_2}\}$, tales que el rendimiento esperado de ambas sea el mismo ($\bar{r}_1 = \bar{r}_2$), y el valor en riesgo de la primera sea mayor que el de la segunda ($\frac{VaR^\alpha}{V_1} > \frac{VaR^\alpha}{V_2}$), entonces, por aversión al riesgo, un banco preferirá aquella cartera con el mínimo nivel de valor en riesgo (“ c_2 ” en este caso).

Análogamente, si existen dos carteras de crédito, $c_1 = \{\bar{r}_1, \frac{VaR^\alpha}{V_1}\}$ y $c_2 = \{\bar{r}_2, \frac{VaR^\alpha}{V_2}\}$, tales que el valor en riesgo de ambas sea el mismo ($\frac{VaR^\alpha}{V_1} = \frac{VaR^\alpha}{V_2}$) y el rendimiento esperado de la primera sea mayor que el de la segunda ($\bar{r}_1 > \bar{r}_2$), entonces, por el axioma de no saciedad, un banco preferirá la cartera que ofrezca mayor rendimiento esperado (“ c_1 ” en este caso).■

La cartera óptima de inversión para un banco se encuentra en el punto de tangencia entre el conjunto eficiente de crédito y una curva de indiferencia. Por esta razón, la cartera óptima de inversión de un banco es aquella donde la tasa marginal de sustitución entre el rendimiento esperado y el valor en riesgo y la tasa marginal de transformación entre ellos son iguales ($TMS_{VaR_c/V_c}^{\bar{r}_c} = TMT_{VaR_c/V_c}^{\bar{r}_c}$). Dicho de otra forma, la cartera óptima de crédito para un banco se encuentra en el punto donde la relación a la que un banco está dispuesto a sacrificar rendimiento para correr un menor riesgo es igual a la relación a la que el mismo banco puede obtener mayor rendimiento por incurrir en un mayor riesgo.

Si la tasa marginal de sustitución de un banco no fuera igual a la tasa marginal de transformación, la relación a la que el banco se encuentra dispuesto a sacrificar rendimiento con tal de disminuir su riesgo sería distinta a la tasa a la que es factible aumentar el rendimiento esperado incurriendo en un mayor nivel de riesgo, por lo que el banco podría obtener una mayor utilidad moviéndose de este punto. Supóngase que un banco se encuentra en el punto “b” de la gráfica 2.4. En este punto, la tasa marginal de sustitución será menor que la tasa marginal de transformación ($TMS_{VaR_c/V_c}^{\bar{r}_c} < TMT_{VaR_c/V_c}^{\bar{r}_c}$), por lo que el banco se encuentra dispuesto a aumentar su nivel de riesgo para obtener un mayor rendimiento, ya que esto le proporcionaría una mayor utilidad. Análogamente, si se encontrara en el punto “d”, la tasa marginal de sustitución será mayor que la tasa marginal



Gráfica 2.4. Cartera de crédito óptima de un banco

de transformación ($TMS_{VaR_c/V_c}^{\bar{r}_c} > TMT_{VaR_c/V_c}^{\bar{r}_c}$), por lo que el banco estaría dispuesto a disminuir su nivel de riesgo aunque eso provocara una disminución en el rendimiento, ya que esto aumentaría su utilidad. En ambos casos, el banco cambiará su cartera de créditos y repetirá esta operación hasta llegar al punto “a” en el que su utilidad ya no puede aumentar más, es decir, hasta el punto donde se igualen la relación a la que un banco está dispuesto a sacrificar rendimiento para correr un menor riesgo ($TMS_{VaR_c/V_c}^{\bar{r}_c}$) y la relación a la que el mismo banco puede obtener mayor rendimiento por incurrir en un mayor riesgo ($TMT_{VaR_c/V_c}^{\bar{r}_c}$).

Implícitamente el esquema descrito supone el conocimiento, por parte de los bancos, de la distribución de probabilidad de incumplimiento (caracterizado mediante el vector de probabilidades esperadas de impago y la correspondiente matriz de varianza-covarianza) y del rendimiento esperado de cada uno de los créditos, para poder jerarquizar las alternativas de elección de acuerdo a la estructura de preferencias de los bancos.

La implicación más importante del modelo es que tiene aplicación directa a créditos bancarios y permite incluir instrumentos de captación bancaria dentro del problema de selección de cartera. Es decir, el modelo permite a los bancos determinar la composición de la cartera de crédito y su fondeo de manera simultánea.

Por último, recuérdese que el interés de un banco se enfoca en poseer una cartera de crédito eficiente que maximice su nivel de utilidad. Por otro lado, el interés de los reguladores financieros se enfoca en que un banco cuente con un nivel de capitalización suficiente para hacer frente al riesgo en que incurre. Por medio de la desigualdad (2.3), que relaciona la suficiencia de capital con el monto en riesgo -como proporción del valor total

de la cartera- en que incurre un banco, los reguladores bancarios pueden determinar si un banco cuenta con un nivel de capital adecuado para enfrentar el riesgo que asume, independientemente de que su cartera de crédito sea o no eficiente.

2.6. Teoría de Selección de Cartera bajo la Existencia de una Tasa Libre de Riesgo

Hasta el momento se ha supuesto que todos los créditos existentes en el mercado son riesgosos, es decir, todos ellos poseen cierta probabilidad de caer en impago. En este apartado se permitirá la existencia de un instrumento libre de riesgo y se estudiarán los efectos que esto tiene sobre la frontera eficiente de crédito. Un instrumento libre de riesgo es un instrumento cuyo rendimiento esperado es seguro. *Un instrumento libre de riesgo en el esquema valor en riesgo-rendimiento esperado, es aquel que ofrece un rendimiento sin tener que incurrir en algún nivel de valor en riesgo.* Una propiedad importante de dicho instrumento es que no se encuentra correlacionado con ningún crédito del mercado. Al ser el único instrumento que carece de probabilidad de incumplimiento, su correlación con la probabilidad de impago del resto de los créditos es nula.

Sea " r_f " el rendimiento del instrumento libre de riesgo y sea cero su valor en riesgo ($Var_f^a=0$). Sean \bar{r}_c y Var_c^a el rendimiento esperado y el valor en riesgo, respectivamente, de una cartera de crédito cualquiera " c ". Si " A " es una cartera que se compone de una proporción " γ " del instrumento libre de riesgo y de una proporción " $1-\gamma$ " de la cartera de crédito " c ", entonces el rendimiento esperado y el valor en riesgo de la cartera " A " están dados por:

$$\bar{r}_A = \gamma \cdot r_f + (1 - \gamma) \cdot \bar{r}_c \tag{2.17}$$

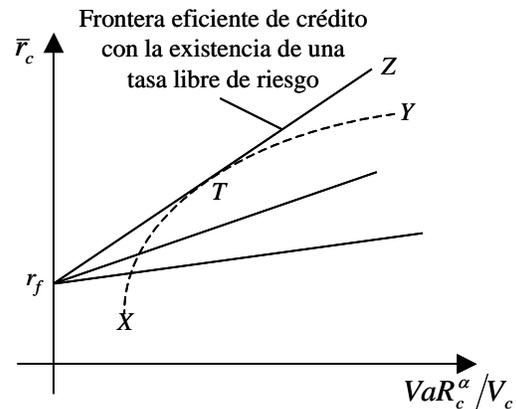
y

$$VaR_A^\alpha = (1 - \gamma) \cdot VaR_c^\alpha \tag{2.18}$$

Como se observa en (2.17), el rendimiento esperado de una cartera formada por un instrumento libre de riesgo y una cartera de crédito “c” es igual al promedio ponderado del rendimiento esperado de ambos. Por otro lado, el valor en riesgo de dicha cartera es igual al valor en riesgo de “c” ponderado por la proporción que “c” representa de la cartera “A”.

De las ecuaciones (2.17) y (2.18) se observa que la combinación de una cartera de crédito cualquiera y un instrumento libre de riesgo, dentro del esquema rendimiento esperado-valor en riesgo, da origen a líneas rectas semejantes a las ilustradas en la gráfica 2.5. Obsérvese que la línea “ $r_f Z$ ” resulta de la combinación entre el instrumento libre de riesgo y la cartera tangente “T”.

Al permitir la existencia de una tasa libre de riesgo, la frontera eficiente de crédito (XY) derivada en el apartado 2.4.2 queda dominada por las combinaciones entre el instrumento libre de riesgo (r_f) y el portafolio de crédito tangente (T). Dichas combinaciones permiten obtener el mismo nivel de



Gráfica 2.5. Frontera eficiente de crédito con la existencia de una tasa libre de riesgo a la que un banco puede prestar y pedir prestado

rendimiento esperado que la línea “XY” incurriendo en un valor en riesgo menor. Si una cartera de crédito eficiente es aquella que cumple con las tres premisas de la definición 2.1,

la frontera eficiente de crédito, en un mundo donde existe una tasa libre de riesgo (r_f) a la que un banco puede prestar y pedir prestado, está compuesta por las combinaciones entre la cartera de crédito tangente (T) y la tasa libre de riesgo (r_f). El segmento " r_fT " contiene las combinaciones en las que un banco invierte parte de su cartera en " T " y el resto de ella en el instrumento libre de riesgo. En el punto " T " de la frontera eficiente, la cartera de un banco está completamente invertida en la cartera de crédito tangente. El segmento " TZ " de dicha frontera contiene aquellas combinaciones en las que un banco se va corto en el instrumento libre de riesgo e invierte el dinero en la cartera de crédito " T ".

Bajo este nuevo esquema, el proceso de selección de cartera de crédito de un banco se lleva a cabo en dos etapas. En la primera cada banco debe seleccionar el único portafolio óptimo de crédito (T). En la segunda, de acuerdo con su esquema de preferencias, el banco escogerá la combinación entre el instrumento libre de riesgo y la cartera óptima de crédito (T) que maximiza su utilidad. De igual forma que cuando no existe un instrumento libre de riesgo, la tasa marginal de sustitución entre el rendimiento esperado y el valor en riesgo y la tasa marginal de transformación entre ellos deben igualarse ($TMS_{VaR_c/V_c}^{\bar{r}_c} = TMT_{VaR_c/V_c}^{\bar{r}_c}$) para que el banco maximice su utilidad.

Capítulo 3. Modelo de Asignación de Precios de Crédito Bancario (MAPCB)

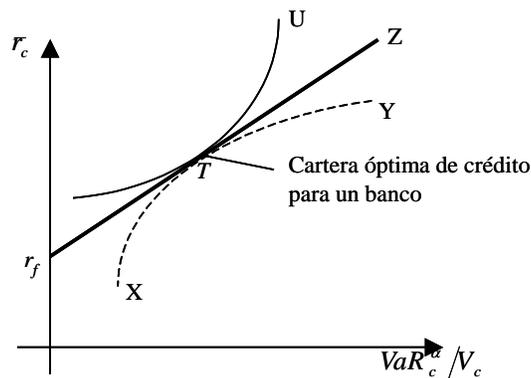
En el capítulo anterior se derivó un modelo de selección de cartera de crédito para un banco que actúa de manera individual. En dicho modelo, el banco encuentra el portafolio de crédito que maximiza su utilidad dentro de un conjunto eficiente de alternativas de inversión. Si todos los bancos actúan de esta forma, debe ser posible analizar su comportamiento colectivo y el impacto que este tiene sobre el rendimiento y el precio de los créditos en el mercado.

En el presente capítulo será derivado un modelo de equilibrio general que permitirá *determinar la medida de riesgo relevante para cualquier cartera de crédito del mercado y la relación que guarda dicho riesgo con el rendimiento esperado y el precio de los créditos, cuando el mercado de crédito se encuentra en equilibrio.*

3.1. Equilibrio en el Mercado de Crédito

Antes de proceder a la derivación del modelo, y como en toda teoría económica, es necesario hacer algunos supuestos sobre los cuales descansa la construcción del mismo. Primero, todos los bancos tienen el *mismo horizonte de tiempo de inversión de un periodo*, es decir, los bancos eligen su cartera de crédito al inicio de un periodo ($t=0$) y reciben las ganancias o las pérdidas producto de su elección al final del mismo ($t=1$). Segundo, *los créditos son infinitamente divisibles*, dicho de otra forma, un banco puede otorgar cualquier fracción de un crédito. Tercero, *todos los bancos pueden prestar y pedir prestado a una única tasa libre de riesgo (r_f)*. Además, un banco puede endeudarse ilimitadamente a dicha tasa. Cuarto, los bancos actúan en un *mercado de competencia perfecta*, es decir, ninguno de ellos puede afectar el rendimiento de los créditos actuando de manera aislada. Solo el comportamiento conjunto de los bancos puede repercutir en el mercado. Quinto, los bancos *basan sus decisiones de inversión de cartera exclusivamente en términos del valor en riesgo (VaR) y del rendimiento esperado de los créditos (r)*. Sexto, todos los participantes en el mercado tienen *expectativas homogéneas*. Esto quiere decir que todos tienen la misma percepción sobre el rendimiento esperado y las probabilidades de incumplimiento de todos los créditos del mercado así como de las respectivas correlaciones entre estas últimas. Por último, *la información necesaria se encuentra libremente disponible* para todos los participantes en el mercado.

En el capítulo anterior se vio que al introducir una tasa libre de riesgo (r_f), la frontera eficiente “XY” queda dominada por las combinaciones entre dicha tasa y el portafolio tangente de crédito (T). Estas combinaciones conforman la nueva frontera



Gráfica 3.1. Cartera óptima de crédito de un banco bajo la existencia de una tasa libre de riesgo (r_f) a la que se puede prestar y pedir prestado

eficiente de crédito bancario y se encuentran representadas por la línea recta " r_fZ " en la gráfica 3.1. El segmento " r_fT " contiene las combinaciones en las que un banco invierte parte de su cartera en " T " y el resto en el instrumento libre de riesgo. En el punto " T " la cartera de

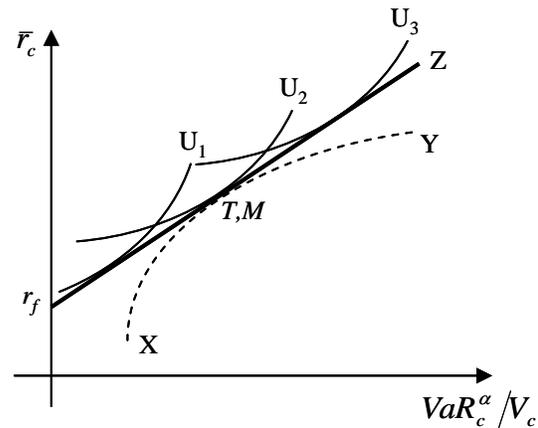
un banco está completamente invertida en la cartera de crédito tangente. Finalmente, el segmento " TZ " contiene aquellas combinaciones de inversión en las que un banco se va corto en el instrumento libre de riesgo e invierte el dinero obtenido en la cartera de crédito " T ".

El problema de selección de cartera que enfrenta un banco bajo este esquema se resuelve en dos pasos. Primero, el banco debe seleccionar el único portafolio óptimo de crédito (T). Segundo, de acuerdo con su estructura de preferencias, el banco debe elegir la combinación entre el instrumento libre de riesgo y la cartera de crédito " T " que maximice su utilidad.

Si los bancos tienen expectativas homogéneas todos ellos se enfrentan al mismo problema, de manera que, independientemente de sus preferencias, todos ellos escogerán un portafolio de inversión que contenga la cartera de crédito " T ". Dicho de otra forma, *si los bancos tienen expectativas homogéneas, la combinación óptima de crédito (T) para cualquier banco puede ser determinada sin tener conocimiento de sus preferencias hacia el riesgo y el rendimiento.* Dado que todos los bancos poseen una cartera de crédito riesgosa

de composición idéntica (T), como parte de su portafolio de inversión, dicha combinación será llamada: *la cartera de mercado (M)*.

En la gráfica 3.2 se observa la función de utilidad de tres bancos distintos. El banco uno prefiere invertir parte de su cartera en la combinación de mercado y el resto de ella en el instrumento libre de riesgo. El banco dos invierte toda su cartera en la combinación de créditos de mercado. El banco tres se va corto en el instrumento libre de riesgo para invertir una cantidad de



Gráfica 3.2. Elección del portafolio óptimo de los bancos con expectativas homogéneas

dinero mayor en la cartera de mercado. Es fácil observar que los tres bancos incluyen la combinación o cartera de mercado (M) dentro de su portafolio de inversión.

Una propiedad de la cartera de crédito “M” es que se encuentra formada por todos los créditos del mercado. La proporción que cada crédito representa de la cartera “M” es igual a la proporción que el monto de cada crédito representa del monto total de créditos otorgados en el mercado. Para ver porqué, supóngase que existe un crédito que no se halla dentro de la cartera “M” o que sí se halla pero que representa una proporción de “M” distinta a la antes mencionada. La búsqueda de los bancos por otorgar créditos en la combinación “M” y la falta de interés en el crédito que no se encuentra en ésta, provoca una revisión en el rendimiento de los créditos. El rendimiento esperado de los créditos que componen “M” sufriría una caída que desplazaría “M” (y los créditos que la componen) hacia abajo.

Análogamente, el rendimiento esperado del crédito que no se encuentre en “*M*” subiría y las combinaciones que incluyan dicho crédito se desplazarían hacia arriba. El cambio en rendimientos haría más atractivas las oportunidades de inversión que contengan el crédito no incluido en “*M*” o que tengan proporciones de inversión distintas a las de la cartera de mercado. Lo anterior provocaría una revisión en la conducta de los bancos. Esta nueva conducta por parte de los bancos provocaría un cambio en la demanda de los créditos y un nuevo ajuste en el rendimiento de los mismos. El proceso continuaría hasta que el rendimiento de los créditos se ajustara de manera tal que la cartera de crédito de mercado (*M*) se componga de todos los créditos existentes en el mercado, en la proporción que cada uno de ellos representa del mercado de crédito.

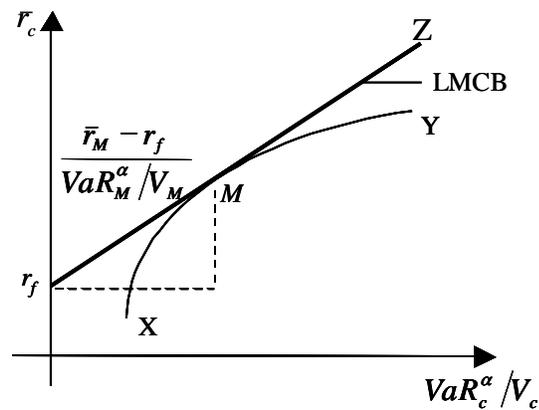
Dado que la frontera eficiente de crédito, dada por la línea “*r_fZ*”, es la misma para todos los bancos, *existe una relación directa entre el rendimiento esperado y el valor en riesgo para cualquier portafolio eficiente de crédito*. Según dicha relación, podemos decir que *cuando el mercado está en equilibrio, el rendimiento esperado de un portafolio eficiente de crédito es igual a la tasa libre de riesgo más un sobreprecio por cada unidad de valor en riesgo en que se incurra*.

Matemáticamente, lo anterior puede expresarse de la siguiente manera: Sea “ \bar{r}_{c^*} ” el rendimiento esperado de una cartera eficiente de crédito, sea “ r_f ” la tasa libre de riesgo, sea “ \bar{r}_M ” el rendimiento esperado de la cartera de crédito de mercado (*M*) y sean VaR_M^α / V_M y $VaR_{c^*}^\alpha / V_{c^*}$ el valor en riesgo -como proporción del valor total de la cartera- de la cartera de mercado (*M*) y de una cartera eficiente de crédito “*c**”, respectivamente. Entonces, el rendimiento esperado de cualquier cartera eficiente de crédito está dado por:

$$\bar{r}_{c^*} = r_f + \frac{\bar{r}_M - r_f}{\frac{VaR_M^\alpha}{V_M}} \cdot \frac{VaR_{c^*}^\alpha}{V_{c^*}} \quad (3.1)$$

La tasa libre de riesgo (r_f) puede interpretarse como el precio del tiempo, dicho de otra forma, “ r_f ” es el rendimiento que se obtiene por la espera. La pendiente de la ecuación (3.1) $\left(\frac{\bar{r}_M - r_f}{VaR_M^\alpha / V_M} \right)$ equivale al incremento en el nivel de rendimiento esperado que puede obtenerse por aceptar una unidad más de valor en riesgo, por lo que puede considerarse como el precio del valor en riesgo. Finalmente, el $VaR_{c^*}^\alpha / V_{c^*}$ es el nivel de riesgo en que el banco está dispuesto a incurrir.

En la gráfica 3.3 se observa que la frontera eficiente de crédito cuando existe una tasa libre de riesgo y la LMCB son la misma. La pendiente de ambas es el aumento en el rendimiento esperado que se obtiene por

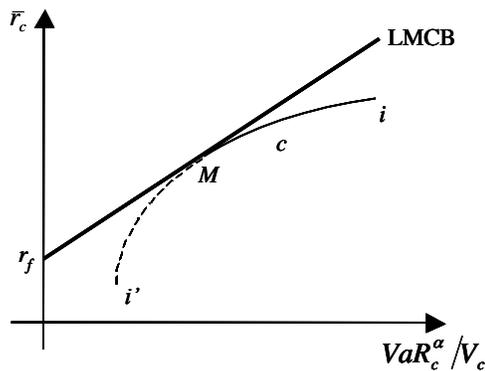


Gráfica 3.3. Línea de Mercado de Crédito Bancario (LMCB)

aceptar una unidad más de riesgo. De modo que, como se mencionó anteriormente, el rendimiento esperado de cualquier cartera eficiente de crédito es igual al rendimiento libre de riesgo más el precio del riesgo por el número de unidades del mismo en que un banco incurra.

3.2. La Línea de Mercado de Crédito Individual (LMCI)

La *Línea de Mercado de Crédito Bancario (LMCB)* establece la relación entre el rendimiento y el riesgo para las carteras eficientes, pero no proporciona información respecto al rendimiento de equilibrio de los créditos bancarios individuales o de las carteras



Gráfica 3.4. Relación entre el portafolio de mercado (M) y el i-ésimo crédito

no eficientes de crédito. Para determinar el rendimiento esperado de equilibrio de un crédito individual “i”, es necesario tomar su contribución al valor en riesgo de la cartera de mercado. En la gráfica 3.4, la curva “iMi” representa las combinaciones posibles entre el crédito “i” y la cartera de mercado (M).

Nótese que todas las curvas de este tipo son tangentes a la *LMCB* en el punto “M”; es decir, son tangentes a la cartera óptima de crédito o cartera de mercado (M). Si lo anterior no fuera cierto, la curva “iMi” intersectaría a la *LMCB* en algún punto, entonces una parte de la región factible de crédito se encontraría por encima de la frontera eficiente, lo que por definición es imposible.¹

Sea $\pi = [\pi_1 \quad \pi_2 \quad \dots \quad \pi_N]$ el vector-*N* de las probabilidades de impago (π_i) de los créditos de la cartera de mercado, sea $\mathbf{F} = [f_1 \quad f_2 \quad \dots \quad f_N]$ el vector-*N* que representa la cartera de crédito de mercado, sea “ z_α ” la variable normal estandarizada para el nivel de

¹ Véase definición 2.1 en la página 29.

confianza de “ α ” y sea $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \cdots & \sigma_N^2 \end{bmatrix}$ la matriz- $N \times N$ de varianza-covarianza

de las probabilidades de impago de la cartera de mercado, donde “ σ_i^2 ” es la varianza de la probabilidad de impago del crédito i -ésimo crédito y “ σ_{ij} ” es la covarianza del incumplimiento entre el crédito “ i ” y el “ j ”. Entonces, utilizando la expresión para el valor en riesgo planteada por Márquez, J. y López, C. (1999), *el valor o monto en riesgo del portafolio de crédito de mercado (M) es igual a:*

$$VaR_M^\alpha = \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{F} + z_\alpha \sqrt{\mathbf{F}^T \mathbf{M} \mathbf{F}} \quad (3.2)$$

Análogamente, sea $\boldsymbol{\pi}_i = [\pi_i \ 0 \ \cdots \ 0]$ el vector- N que contiene la probabilidad de impago del crédito “ i ”, sea $\mathbf{F}_i = [f_i \ 0 \ \cdots \ 0]$ el vector- N que contiene el i -ésimo crédito de la cartera de mercado, sea “ z_α ” la variable normal estandarizada para el nivel de

confianza de “ α ” y sea $\mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} \sigma_i^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ la matriz- $N \times N$ que contiene la varianza de la

probabilidad de impago del i -ésimo crédito de la cartera. Entonces, el *valor en riesgo para un crédito individual “ i ”* está dado por:

$$VaR_i^\alpha = \boldsymbol{\pi}_i^T \mathbf{F}_i + z_\alpha \sqrt{\mathbf{F}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{F}_i} \quad (3.3)$$

Ahora, sea “c” una cartera de crédito formada por una proporción “λ” del *i*-ésimo crédito y una proporción “1-λ” de la cartera “M” con rendimiento esperado (\bar{r}_c) igual a:

$$\bar{r}_c = \lambda \bar{r}_i + (1 - \lambda) \bar{r}_M \quad (3.4)$$

entonces su valor en riesgo (VaR_c^α), expresado como proporción del total de su valor (V_c), es igual a:

$$\frac{VaR_c^\alpha}{V_c} = \frac{VaR_c^\alpha(\lambda \cdot i, (1 - \lambda) \cdot M)}{V_c} = \frac{VaR_c^\alpha(\lambda \cdot i, (1 - \lambda) \cdot M)_i}{V_i + V_M} \quad (3.5)$$

Substituyendo (3.2) y (3.3) en (3.5), la ecuación anterior equivale a:

$$\frac{VaR_c^\alpha}{V_c} = \frac{\lambda \cdot \boldsymbol{\pi}_i^T \mathbf{F}_i + (1 - \lambda) \cdot \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{F} + z_\alpha \sqrt{\lambda^2 \cdot \mathbf{F}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{F}_i + (1 - \lambda)^2 \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{M} \mathbf{F} + 2\lambda(1 - \lambda) \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{K}_i \mathbf{F}}}{V_i + V_M} \quad (3.6)$$

donde $\mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \sigma_{li} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sigma_{i1} & \cdots & 0 & \cdots & \sigma_{iN} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_{Ni} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ es la matriz de covarianza de la probabilidad de

impago del crédito “i” con la de los restantes “N-1” créditos del mercado.

Sea “ \mathbf{x} ” el vector- N que contiene los créditos de la cartera de mercado (M), expresados como proporción del valor total de la cartera “ c ” (V_c), sea “ \mathbf{x}_i ” el vector- N que contiene el i -ésimo crédito expresado también como proporción del valor total de la cartera “ c ” (V_c). Entonces, el valor en riesgo de la cartera de crédito “ c ”, expresado como proporción del total de su valor (VaR_α^c/V_c), está dado por:

$$\frac{VaR_\alpha^c}{V_c} = \lambda \boldsymbol{\pi}_i^T \mathbf{x}_i + (1-\lambda) \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{x} + z_\alpha \sqrt{\lambda^2 \mathbf{x}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{x}_i + (1-\lambda)^2 \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} + \lambda(1-\lambda) \mathbf{x}^T \mathbf{K}_i \mathbf{x}}$$

(3.7)

donde $\lambda \boldsymbol{\pi}_i^T \mathbf{x}_i + (1-\lambda) \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{x}$ y $z_\alpha \sqrt{\lambda^2 \mathbf{x}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{x}_i + (1-\lambda)^2 \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} + \lambda(1-\lambda) \mathbf{x}^T \mathbf{K}_i \mathbf{x}}$ representan el incumplimiento esperado y la varianza total de las pérdidas de la cartera “ c ”, respectivamente. El incumplimiento esperado está formado por una proporción “ λ ” de la probabilidad esperada de impago del crédito “ i ” y una proporción “ $1-\lambda$ ” de la probabilidad esperada de impago de la cartera de mercado (M). Mientras que la varianza total de las pérdidas de la cartera “ c ” depende de la varianza de las pérdidas del i -ésimo crédito ($\lambda^2 \mathbf{x}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{x}_i$), de la varianza de las pérdidas de la cartera de mercado ($(1-\lambda)^2 \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}$) y de la covarianza de impago entre el crédito “ i ” y los restantes “ $N-1$ ” créditos de la cartera de mercado ($\lambda(1-\lambda) \mathbf{x}^T \mathbf{K}_i \mathbf{x}$).

Proposición 3.1. Sea “ c ” una cartera de crédito formada por una proporción “ λ ” del crédito individual “ i ” y una proporción “ $1-\lambda$ ” de la cartera de mercado (M). Sean además, su rendimiento esperado igual a (3.4) y su valor en riesgo, como proporción del total de su valor, igual a (3.7). Si el mercado se encuentra en equilibrio y el rendimiento esperado de

una cartera eficiente está dado por la *LMCB* (ecuación (3.1)), entonces, el rendimiento esperado de equilibrio del crédito individual “*i*” está dado por:

$$\bar{r}_i = r_f + \frac{(r_M - r_f)}{VaR_M^\alpha / V_M} \cdot \boldsymbol{\pi}_i^T \mathbf{X}_i + \frac{z_\alpha}{2} \frac{(r_M - r_f)}{VaR_M^\alpha / V_M} \cdot \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M}.$$

Resolviendo.² La pendiente de la curva “*iMi*” es el cambio en el rendimiento esperado de la cartera “*c*” entre el cambio en el valor en riesgo de la misma. Dicho de otra forma, la pendiente de la curva “*iMi*” expresa el cambio en el rendimiento esperado producto de incurrir en una unidad más de valor en riesgo. Matemáticamente esta relación se representa por:

$$\frac{d\bar{r}_c}{d VaR_c^\alpha / V_c} = \frac{\frac{d\bar{r}_c}{d\lambda}}{\frac{d VaR_c^\alpha / V_c}{d\lambda}} \quad (3.8)$$

El lado izquierdo de la ecuación (3.8) es el cambio en el rendimiento esperado de la cartera “*c*” producido por un cambio en el valor en riesgo de la misma. El numerador del lado derecho de la ecuación representa el cambio en el rendimiento esperado de la cartera “*c*” producto de un cambio en las proporciones de inversión entre el crédito “*i*” y el portafolio “*M*”. Análogamente, el denominador de lado derecho representa el cambio en el valor en

² El álgebra más detallada puede encontrarse en el **Apéndice 3.1. Línea de Mercado de Crédito Individual (LMCI)**.

riesgo de la cartera “c” producido por un cambio en las proporciones invertidas en el crédito “i” y en el portafolio “M”.

Derivando la ecuación (3.4) c.r.a. “λ” se obtiene el numerador del lado derecho de la ecuación (3.8):

$$\frac{d\bar{r}_c}{d\lambda} = \bar{r}_i - \bar{r}_M \quad (3.9)$$

Derivando la ecuación (3.7), c.r.a. “λ” y rescribiendo $\sigma_M^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}$, $A = \lambda^2 \mathbf{x}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{x}_i + (1-\lambda)^2 \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} + \lambda(1-\lambda) \mathbf{x}^T \mathbf{K}_i \mathbf{x}$, $\sigma_{iM}^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{K}_i \mathbf{x}$ y $\sigma_i^2 = \mathbf{x}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{x}_i$ se obtiene el denominador del lado derecho de la ecuación (3.8):

$$\frac{d \frac{VaR_c^\alpha}{V_c}}{d\lambda} = \boldsymbol{\pi}_i^T \mathbf{x}_i + \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{x} + \frac{z_\alpha}{\sqrt{A}} \left(\lambda \sigma_i^2 + \lambda \sigma_M^2 - \sigma_M^2 + \frac{1}{2} \sigma_{iM} - \lambda \sigma_{iM} \right) \quad (3.10)$$

Substituyendo (3.9) y (3.10) en (3.8) se obtiene la pendiente de la curva “iMi”:

$$\frac{d\bar{r}_c}{d \frac{VaR_c^\alpha}{V_c}} = \frac{\bar{r}_i - \bar{r}_M}{\boldsymbol{\pi}_i^T \mathbf{x}_i + \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{x} + \frac{z_\alpha}{\sqrt{A}} \left(\lambda \sigma_i^2 + \lambda \sigma_M^2 - \sigma_M^2 + \frac{1}{2} \sigma_{iM} - \lambda \sigma_{iM} \right)} \quad (3.11)$$

La pendiente de la curva “iMi” y la de la *Línea de Mercado de Crédito Bancario* (LMCB), derivada en el apartado anterior, son iguales cuando “λ=0”. Entonces, igualando ambas líneas es posible obtener la contribución del crédito “i” al riesgo de mercado y, por

lo tanto, la relación entre el rendimiento esperado (\bar{r}_i) del i -ésimo crédito y su riesgo relevante.

Evaluando la ecuación (3.11) en el punto “ $\lambda=0$ ”, ésta se reduce a:

$$\left. \frac{d\bar{r}_c}{d \frac{VaR_c^\alpha}{V_c}} \right|_{\lambda=0} = \frac{\bar{r}_i - \bar{r}_M}{\pi_i^T \mathbf{x}_i + \pi^T \mathbf{x} + \frac{z_\alpha}{\sigma_M} \left(\frac{1}{2} \sigma_{iM} - \sigma_M^2 \right)} \quad (3.12)$$

Del apartado anterior se sabe que la pendiente de la *LMCB* es igual a $\frac{\bar{r}_M - r_f}{VaR_M^\alpha / V_M}$.

Igualando la pendiente de ambas curvas se tiene:

$$\frac{d\bar{r}_c}{d \frac{VaR_c^\alpha}{V_c}} = \frac{\bar{r}_i - \bar{r}_M}{\pi_i^T \mathbf{x}_i + \pi^T \mathbf{x} + \frac{z_\alpha}{\sigma_M} \left(\frac{1}{2} \sigma_{iM} - \sigma_M^2 \right)} = \frac{\bar{r}_M - r_f}{VaR_M^\alpha / V_M} \quad (3.13)$$

y despejando para “ \bar{r}_i ” se obtiene la relación entre el rendimiento esperado de un crédito individual “ i ” y su riesgo relevante, expresada por la *Línea de Mercado de Crédito Individual (LMCI)*:

$$\bar{r}_i = r_f + \frac{(\bar{r}_M - r_f)}{VaR_M^\alpha / V_M} \cdot \pi_i^T \mathbf{x}_i + \frac{z_\alpha}{2} \cdot \frac{(\bar{r}_M - r_f)}{VaR_M^\alpha / V_M} \cdot \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M} \quad (3.14)$$

La LMCI muestra que el riesgo relevante para determinar el rendimiento esperado de un crédito individual deja de ser el riesgo total. En particular, muestra que *el rendimiento esperado de cualquier crédito “i” depende de la tasa libre de riesgo (r_f) y de dos sobretasas. La primera de ellas depende de su propio impago esperado, como proporción del valor total de la cartera de mercado (M). Cada unidad de impago esperado en que incurre un banco deberá pagar una sobretasa de rendimiento esperado igual a $\frac{(\bar{r}_M - r_f)}{VaR_M^\alpha / V_M}$, por lo que dicha sobretasa puede ser interpretada como *el precio del incumplimiento esperado. La segunda de ellas depende del riesgo sistémico, que proviene de la relación entre la probabilidad de impago del crédito “i” y la probabilidad de impago de los restantes $N-1$ créditos del mercado, es decir, de la sensibilidad del incumplimiento del i -ésimo crédito al incumplimiento del mercado. Cada unidad de riesgo sistémico será compensada con un aumento en el rendimiento esperado igual a $\frac{z_\alpha}{2} \cdot \frac{(\bar{r}_M - r_f)}{VaR_M^\alpha / V_M}$. Dicha sobretasa puede ser interpretada como el *precio del riesgo sistémico*. Tanto el precio del riesgo sistémico como el de impago guardan relación directa de la prima de riesgo del mercado ($\bar{r}_M - r_f$) y relación inversa con el valor en riesgo del mercado (VaR_M^α / V_M).**

La relación entre el precio de ambas fuentes de riesgo dependerá del nivel de confianza elegido para medir el VaR. Sea “ p_e ” el precio del incumplimiento esperado y sea “ p_s ” el precio del riesgo sistémico, la relación entre ellos está dada por:

$$p_e - p_s = \begin{cases} z_\alpha > 2 & p_e - p_s < 0 \\ z_\alpha = 2 & p_e - p_s = 0 \\ z_\alpha < 2 & p_e - p_s > 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

Según la ecuación anterior siempre que la variable normal estandarizada (z_α) tenga un valor menor a dos, el precio del riesgo sistémico será menor que el precio del incumplimiento esperado. Como “ z_α ” es una función creciente del nivel de confianza elegido (α) y dado que está comúnmente aceptado que no deben tomarse niveles de confianza menores a 90%, ya que esto implicaría un nivel de riesgo muy alto, y que tampoco es recomendable tomar valores mayores a 97.5%, pues se estaría incluyendo valores aberrantes de la distribución, *en la práctica el precio del impago esperado debe ser siempre mayor que el precio del riesgo sistémico.*³ En otras palabras, *la compensación, en términos de rendimiento esperado, por incurrir en una unidad más de impago esperado debe ser mayor que la compensación por incurrir en una unidad más de riesgo sistémico, proveniente de la sensibilidad al mercado.*

Es interesante notar que el rendimiento esperado de cualquier crédito que no tenga correlación negativa con el mercado, siempre será mayor a la tasa libre de riesgo ($r_i > r_f \quad \forall i | \sigma_{iM} > 0$). Si la covarianza de incumplimiento del i -ésimo crédito con el mercado es mayor a cero ($\sigma_{iM} > 0$), es fácil notar que el rendimiento esperado de dicho crédito es igual a la tasa libre de riesgo más dos sobretasas positivas, por lo que el rendimiento esperado de dicho crédito es estrictamente mayor a la tasa libre de riesgo. Si la probabilidad de impago de un crédito tiene correlación nula con el incumplimiento de la cartera de mercado ($\sigma_{iM} = 0$), el riesgo sistémico desaparece, ya que $\frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M} = 0$. No obstante,

no existe forma de desaparecer el riesgo proveniente del impago esperado, ya que todos los

³ El valor de la variable normal estandarizada para niveles de confianza de 90% y 97.5% es de 1.28 y 1.96, respectivamente ($z_{.90} = 1.28$ y $z_{.975} = 1.96$). Canavos, G. (1988), pp. 616-618.

créditos, al no ser libres de riesgo, tienen una probabilidad de incumplimiento mayor a cero ($\pi_i > 0$). Por lo tanto, el impago esperado de cualquier crédito que tenga correlación nula con el mercado siempre será positivo, por lo que también se cumple que el rendimiento esperado de dicho crédito es mayor al rendimiento libre de riesgo. Entonces, es posible afirmar que el mínimo rendimiento esperado de un crédito “ i ” que no tenga correlación negativa con el mercado será igual a la tasa libre de riesgo más el sobrepago del nivel de impago esperado por el número de unidades de este riesgo en que incurra.

Reordenando la ecuación (3.14) y re-expresando el impago esperado del i -ésimo crédito como “ γ_i ” y su riesgo sistémico como “ β_i ” se obtiene una expresión alternativa para la relación entre el rendimiento esperado de un crédito individual “ i ” y su riesgo relevante:

$$r_i = r_f + \gamma_i \cdot \frac{(\bar{r}_M - r_f)}{VaR_M^\alpha / V_M} + \beta_i \cdot \frac{z_\alpha}{2} \cdot \frac{(\bar{r}_M - r_f)}{VaR_M^\alpha / V_M}. \quad (3.16)$$

Basándonos en la ecuación anterior, que muestra la relación entre el rendimiento esperado y el riesgo relevante para un crédito individual “ i ”, es posible derivar la misma relación para cualquier cartera de crédito, ya sea eficiente o no eficiente. El resultado encontrado parece ser bastante atractivo. En la ecuación (3.17) se observa que el coeficiente “ γ ” para una cartera “ c ”, es simplemente el promedio ponderado de los coeficientes *gamma* de los N -créditos que compongan dicha cartera. Análogamente, el coeficiente “ β ” para una cartera “ c ”, es el promedio ponderado de los coeficientes *beta* de los N -créditos individuales que componen dicha cartera.

$$\bar{r}_c = r_f + \left(\sum_{i=1}^N w_i \cdot \gamma_i \right) \cdot \frac{(\bar{r}_M - r_f)}{\text{VaR}_M^\alpha / V_M} + \left(\sum_{i=1}^N w_i \cdot \beta_i \right) \cdot \frac{z_\alpha}{2} \cdot \frac{(\bar{r}_M - r_f)}{\text{VaR}_M^\alpha / V_M} \quad (3.17)$$

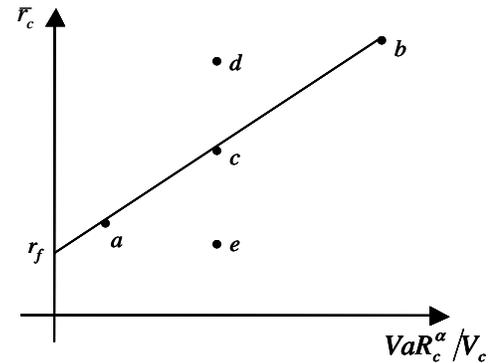
Generalizando, se puede decir que *el riesgo relevante -formado por el impago esperado y el riesgo sistémico- para un portafolio o cartera de crédito “c” es igual a la suma ponderada del riesgo relevante individual de los créditos que lo componen*. El lector no tardará en darse cuenta que la beta y la gamma de mercado son iguales a uno.

3.2.1. Equilibrio en la *Línea de Mercado de Crédito Individual*

En la gráfica 3.5 se observan los créditos “a” y “b” que poseen distinto nivel de riesgo y de rendimiento. Si se recuerda que el rendimiento esperado de cualquier cartera de crédito “c” es igual al promedio ponderado del rendimiento esperado de los créditos que la componen y que el riesgo relevante de dicha cartera también es igual al promedio ponderado del riesgo relevante de los créditos incluidos en ella. Entonces, el rendimiento esperado y el riesgo relevante de todas las carteras “c” -compuestas por las distintas combinaciones entre los créditos “a” y “b”- caerán sobre la línea recta que los une (segmento “ab”).

Supóngase que existe un crédito “d” con el mismo nivel de riesgo relevante que el crédito “c”, pero que ofrece un mayor rendimiento esperado que este último. Si todas las decisiones de inversión de cartera se basan en estos dos elementos -riesgo relevante y rendimiento esperado-, dicho crédito no puede durar mucho tiempo ya que un banco tendría

la posibilidad de obtener mayor utilidad vendiendo en corto el crédito “c” e invirtiendo ese dinero en el crédito “d”. Análogamente, si existiera un crédito “e” con el mismo riesgo relevante que “c” pero que ofrezca un menor rendimiento esperado, un banco tendría la oportunidad de vender en corto el crédito “e” e



Gráfica 3.5. Condición de equilibrio de la LMCI

invertir ese dinero en el crédito “c”. Ambas operaciones de arbitraje serían realizadas por los bancos hasta que los créditos “c”, “d” y “e” ofrecieran el mismo rendimiento esperado.

En equilibrio, el modelo derivado predice que el rendimiento esperado de una cartera de crédito -formada por uno o más créditos- puede ser completamente explicado por el impago esperado de dicha cartera y el riesgo sistémico. No obstante, es evidente que esto no sucede en la realidad, ya que no todo el valor en riesgo de una cartera proviene de estas dos fuentes. El riesgo total de un crédito tiene tres componentes: *el impago esperado*, *el riesgo sistémico* y *el riesgo único*. Los dos primeros no desaparecen con la diversificación de cartera y por lo tanto son recompensados por el mercado con un mayor rendimiento esperado. Por el contrario, el riesgo único sí desaparece con la diversificación y, por lo tanto, no es compensado por el mercado de crédito con un mayor rendimiento esperado. Esta última fuente de riesgo es la que explica las desviaciones del rendimiento esperado de las carteras con respecto al rendimiento esperado predicho por la *LMCI*.

Una implicación importante de esto es que una cartera con alto valor en riesgo no necesariamente debe ofrecer altos rendimientos, ya que parte de su riesgo puede provenir

del riesgo único, que no es compensado por el mercado. En contraste, *una cartera que posea un nivel de impago esperado y/o una sensibilidad al mercado alta deberá ofrecer un alto rendimiento esperado.*

3.3. Correspondencia entre Rendimiento y Precio de un Crédito

En los incisos anteriores se derivó la relación entre el rendimiento esperado y el *riesgo relevante* de los créditos. Para completar el modelo, en el presente apartado se presenta la relación existente entre el rendimiento esperado y el *precio* de los créditos.

El rendimiento esperado del crédito “*i*” está dado por la diferencia entre su pago esperado y el monto de crédito otorgado, expresada como proporción del monto de crédito otorgado. Sea “ $E(\varphi_i)$ ” el pago esperado que proporcionaría el *i*-ésimo crédito en un cierto periodo de tiempo y sea “ f_i ” el monto del préstamo otorgado “*i*”. Entonces, el rendimiento esperado del crédito “*i*” está dado por:

$$\bar{r}_i = \frac{E(\varphi_i) - f_i}{f_i} \quad (3.18)$$

Recordando que la *LMCI* también predice el rendimiento esperado del crédito “*i*”, y lo relaciona con su riesgo relevante, es posible igualarla con (3.18) para obtener:

$$\bar{r}_i = r_f + \gamma_i \cdot \frac{(\bar{r}_M - r_f)}{\text{VaR}_M^\alpha / V_M} + \beta_i \cdot \frac{z_\alpha}{2} \cdot \frac{(\bar{r}_M - r_f)}{\text{VaR}_M^\alpha / V_M} = \frac{E(\varphi_i) - f_i}{f_i} \quad (3.19)$$

Rescribiendo $\eta = \frac{(r_M - r_f)}{VaR_M^\alpha / V_M}$ en (3.19) y despejando para “ f_i ” se obtiene:

$$f_i = \frac{E(\varphi_i)}{1 + r_f + (\gamma_i + \frac{z_\alpha}{2} \cdot \beta_i) \cdot \eta} \quad (3.20)$$

Esta ecuación muestra la relación entre el monto de crédito otorgado “ i ” (f_i), su pago esperado ($E(\varphi_i)$) y su riesgo relevante $((\gamma_i + \frac{z_\alpha}{2} \cdot \beta_i) \cdot \eta)$. El numerador del lado derecho de la igualdad es el pago esperado del crédito “ i ” en un cierto periodo de tiempo y el denominador puede ser interpretado como una tasa de descuento. *Mientras mayor sea el riesgo relevante del crédito, mayor será la tasa de descuento y, por lo tanto, la diferencia entre el monto de crédito otorgado (f_i) y el pago esperado del mismo ($E(\varphi_i)$) será mayor.*

Debido a que en el mercado de crédito es más importante saber cuál es el pago esperado de un crédito que conocer el monto de crédito que debe ser otorgado -ya que este se encuentra determinado por el proyecto de inversión y no por la oferta de crédito-, es posible reordenar la ecuación (3.20) para obtener el pago esperado del i -ésimo crédito:

$$E(\varphi_i) = f_i \cdot \left(1 + r_f + (\gamma_i + \frac{z_\alpha}{2} \cdot \beta_i) \cdot \eta \right) \quad (3.21)$$

En la ecuación (3.21) se observa que *el pago esperado del crédito “ i ” depende de la tasa libre de riesgo (r_f), del impago esperado (γ_i) y del riesgo sistémico (β_i), además del nivel de confianza elegido para medir el valor en riesgo. Es fácil observar que el diferencial entre el monto del i -ésimo crédito otorgado y el pago esperado de dicho crédito*

se incrementa a medida que se incurre en un mayor riesgo relevante, ya sea producto de un mayor impago esperado o de un mayor riesgo sistémico.

3.4. Un ejemplo numérico

Para comprender mejor el modelo, se presentará a continuación un ejemplo numérico, para el cual serán tomados los datos del ejemplo 7.1 en Márquez, J. (2002). Supóngase que el mercado de crédito está conformado por los 25 créditos siguientes:

Tabla 3.1. Mercado de Crédito

No. de Créditos	Calificación							TOTAL
	A	B	C	D	E	F	G	
1	\$4,728 (3.63%)	\$5,528 (4.25%)	\$3,138 (2.41%)	\$5,320 (4.09%)	\$1,800 (1.38%)	\$1,933 (1.49%)	\$358 (0.28%)	\$22,805 (17.52%)
2	\$7,728 (5.94%)	\$5,848 (4.49%)	\$3,204 (2.46%)	\$5,765 (4.43%)	\$5,042 (3.87%)	\$2,317 (1.78%)	\$1,090 (0.84%)	\$30,994 (23.81%)
3			\$4,831 (3.71%)	\$20,239 (15.55%)	\$15,411 (11.84%)	\$2,411 (1.85%)	\$2,652 (2.04%)	\$45,544 (34.99%)
4			\$4,912 (3.77%)			\$2,598 (2.00%)	\$4,929 (3.79%)	\$12,439 (9.56%)
5			\$5,435 (4.18%)				\$6,467 (4.97%)	\$11,902 (9.14%)
6							\$6,480 (4.98%)	\$6,480 (4.98%)
TOTAL	\$12,456 (9.57%)	\$11,376 (8.74%)	\$21,520 (16.53%)	\$31,324 (24.07%)	\$22,253 (17.10%)	\$9,259 (7.11%)	\$21,976 (16.88%)	\$130,164 (100.0%)

*Tomada del Cuadro 7.2 en Márquez, J. (2002), p.27.

Las cifras asignadas a cada crédito corresponden al monto de crédito otorgado (f_i), mientras que las cifras entre paréntesis expresan dicho monto como proporción del mercado de crédito (x_i).

Considérese además que los 25 créditos contenidos en el mercado tienen las siguientes probabilidades de incumplimiento (π_i):

Tabla 3.2. Probabilidades de Incumplimiento (%)

Calificación						
A	B	C	D	E	F	G
1.65	3.00	5.00	7.50	10.00	15.00	30.00

*Tomada del Cuadro 7.1 en Márquez, J. (2002), p.26.

y que su matriz de varianza-covarianza (**M**) corresponde a la del Apéndice 3.4 del presente trabajo.

Por último supóngase que el rendimiento medio de los créditos en el mercado corresponde al reportado en la tabla 3.3:

Tabla 3.3. Rendimiento Medio de los Créditos

No. de Créditos	Calificación						
	A	B	C	D	E	F	G
1	3.9%	5.5%	7.00%	10.0%	13.3%	18.7%	30.0%
2	4.0%	6.5%	8.00%	10.6%	12.0%	22.0%	33.8%
3			7.75%	11.5%	13.3%	18.6%	29.0%
4			7.75%			17.0%	33.4%
5			7.75%				33.8%
6							30.5%

Como se observa en la tabla 3.1, el valor total de la cartera de crédito de mercado (V_M) asciende a \$130,164. Empleando la ecuación (2.1), el Valor en Riesgo del portafolio de mercado, para un nivel de confianza de 95% es igual a:

$$VaR_M^{.95} = \mathbf{F}^T \boldsymbol{\pi} + z_{.95} \sqrt{\mathbf{F}^T \mathbf{M} \mathbf{F}} = 14,179 + 1.645 (21,178) = \$49,017.$$

por lo que el Valor en Riesgo del mercado de crédito como proporción del valor total del mercado es igual a:

$$\frac{VaR_M^{.95}}{V_M} = \mathbf{x}^T \boldsymbol{\pi} + z_{.95} \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}} = \frac{49,017}{130,164} = 37.66\%$$

Lo anterior significa que la máxima pérdida esperada del mercado con un nivel de confianza de 95% es de \$49,017, que representan el 37.66% del valor total del mercado de crédito.

Realizando los cálculos adecuados, el rendimiento esperado del mercado (\bar{r}_M) es igual a 13.83% y suponiendo que la tasa libre de riesgo (r_f) es de 7.0%, entonces el diferencial entre el rendimiento esperado de mercado y el rendimiento libre de riesgo es igual a:

$$(\bar{r}_M - r_f) = (0.1383 - 0.07) = 6.83\%.$$

Empleando la ecuación (3.1), correspondiente a la *Línea de Mercado de Crédito Bancario (LMCB)* y substituyendo en ella el valor en riesgo del mercado, como proporción del valor de la cartera de mercado, y el diferencial entre el rendimiento de mercado y la tasa libre de riesgo, se obtiene:

$$r_{c^*} = r_f + \frac{\bar{r}_M - r_f}{\frac{VaR_M^\alpha}{V_M}} \cdot \frac{VaR_{c^*}^\alpha}{V_{c^*}} = 0.07 + \frac{0.0683}{.3766} \cdot \frac{VaR_{c^*}^\alpha}{V_{c^*}} = 0.07 + 0.1813 \cdot \frac{VaR_{c^*}^\alpha}{V_{c^*}}$$

Esta ecuación indica que por cada unidad de valor en riesgo en que desee incurrir un banco, invirtiendo en la cartera de mercado o en cualquier otra cartera eficiente de crédito, el mercado lo compensará con un rendimiento de 18.13%.

Utilizando la *Línea de Mercado de Crédito Individual (LMCI)* y substituyendo el valor en riesgo de la cartera de mercado y el diferencial entre el rendimiento del mercado y la tasa libre de riesgo, se observa que el rendimiento esperado de un crédito individual “*i*” se encuentra dado por la siguiente relación:

$$\bar{r}_i = r_f + \frac{(\bar{r}_M - r_f)}{VaR_M^\alpha / V_M} \cdot \boldsymbol{\pi}_i^T \mathbf{x}_i + \frac{z_\alpha}{2} \cdot \frac{(\bar{r}_M - r_f)}{VaR_M^\alpha / V_M} \cdot \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M} = 0.07 + \frac{0.0683}{0.3766} \boldsymbol{\pi}_i^T \mathbf{x}_i + \frac{1.645}{2} \cdot \frac{0.0683}{0.3766} \cdot \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M}$$

$$\bar{r}_i = 0.07 + 0.1813 \cdot \boldsymbol{\pi}_i^T \mathbf{x}_i + 0.1491 \cdot \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M}$$

La ecuación anterior indica que por cada unidad de impago esperado en que incurra un crédito, ésta deberá pagar una sobretasa de rendimiento esperado igual a 18.13%, mientras que cada unidad de riesgo sistémico deberá pagar una sobretasa de 14.91%. Como se mencionó en el apartado 3.2., el precio del riesgo proveniente de impago es mayor que el precio del riesgo sistémico.

En la tabla 3.4 se muestra la LMCI para cada uno de los 25 créditos contenidos en el mercado. En la segunda columna se encuentra el rendimiento esperado predicho por la LMCI y en las siguientes columnas se desglosan sus componentes. En la tercera columna se observa la tasa libre de riesgo. En la cuarta y sexta columnas se encuentran las primas del impago esperado (18.13%) y del riesgo sistémico (14.91%), respectivamente, y que corresponden a los coeficientes de la ecuación anterior. La quinta y séptima columnas contienen las unidades de impago esperado ($\boldsymbol{\pi}_i^T \mathbf{x}_i$) y de riesgo sistémico ($\frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M}$) que posee cada crédito. La última columna, que contiene la diferencia entre el rendimiento medio de

los créditos y el rendimiento esperado predicho por el MAPCB, puede interpretarse como el riesgo único de los créditos que desaparece con la diversificación.

Tabla 3.4. Línea de Mercado de Crédito Individual (LMCI)

Crédito	Rendimiento Esperado	Rendimiento libre de riesgo	Prima del Impago Esperado	Impago Esperado Individual	Prima de Riesgo Sistémico	Riesgo Sistémico	Diferencia entre el rendimiento esperado y el predicho
1	0.0736			0.0006		0.0232	0.0346
2	0.0742			0.0012		0.0268	-0.0058
3	0.0764			0.0019		0.0408	-0.0011
4	0.0785			0.0031		0.0530	-0.0215
5	0.0997			0.0117		0.1848	-0.0153
6	0.0744			0.0022		0.0265	-0.1126
7	0.0758			0.0030		0.0354	-0.0942
8	0.0733			0.0025		0.0193	-0.2647
9	0.0765			0.0013		0.0420	0.0215
10	0.0748			0.0012		0.0306	0.0048
11	0.0773			0.0019		0.0467	-0.0002
12	0.0806			0.0039		0.0664	-0.0394
13	0.1002	= 0.070	+ 0.1813	0.0118	+ 0.1491	0.1883	-0.0323
14	0.0762			0.0028		0.0384	-0.1099
15	0.0713			0.0008		0.0074	-0.2287
16	0.0915			0.0149		0.1258	-0.2460
17	0.0779			0.0010		0.0516	0.0379
18	0.0780			0.0013		0.0522	0.0130
19	0.0796			0.0021		0.0616	0.0021
20	0.0822			0.0033		0.0780	-0.0238
21	0.0745			0.0014		0.0287	-0.0585
22	0.0770			0.0027		0.0436	-0.1430
23	0.0805			0.0061		0.0631	-0.2095
24	0.0889			0.0114		0.1128	-0.2451
25	0.0942			0.0149		0.1442	-0.2108

Es fácil observar que en la mayoría de los casos el rendimiento predicho por la LMCI es inferior al observado, lo que significa que en la mayoría de los casos, el riesgo único es positivo. Generalmente, esto se debe a factores individuales de los créditos que hacen aumentar su riesgo individual. En los casos en los que el riesgo único es negativo se debe a que dichos créditos poseen factores individuales que hacen disminuir su riesgo.

Conclusiones

A mediados de la década de los ochenta, el mercado de crédito mundial comenzó a experimentar una serie de cambios que hicieron más difícil la valuación del riesgo de crédito. Como resultado, surgió la preocupación por emplear nuevos esquemas en la medición del riesgo de crédito que no estuvieran basados en el conocimiento exhaustivo del solicitante y que tomaran en cuenta la probabilidad de ocurrencia del incumplimiento, así como la magnitud de las pérdidas asociadas a dicho evento. Es a principio de los 90's, cuando los participantes en el mercado de crédito llegaron al consenso de emplear el *Valor en Riesgo (VaR)*, que había tenido buenos resultados dentro del mercado de activos financieros, para medir y controlar el riesgo de crédito.

Desde sus orígenes, los distintos paradigmas para medir el riesgo de crédito mediante el empleo del *VaR* enfocaron su atención en la búsqueda de la distribución de probabilidad de las pérdidas lo más apegada posible a la realidad. Este hecho llevó la

modelación a tal grado de complejidad que obligó a recurrir a técnicas numéricas para la obtención de la distribución de probabilidad de las pérdidas, dificultando así el acceso a un *esquema integral riesgo-rendimiento de crédito* mediante su aplicación.

En 1999 fue planteado el paradigma de medición de riesgo de crédito *Concentration Risk in Bank Loan Portfolio's* que, a juzgar por la bibliografía revisada, parece ser el único que ofrece una expresión cerrada para la distribución de probabilidad de las pérdidas, por lo que abre la posibilidad de completar uno de los aspectos más importantes y poco estudiados del riesgo de crédito: *la relación entre el riesgo y el rendimiento de los créditos*.

El objetivo del presente trabajo fue encontrar la relación explícita entre el rendimiento esperado y el riesgo relevante de los créditos empleando la expresión cerrada para la distribución de las pérdidas ofrecida por el paradigma *Concentration Risk in Bank Loan Portfolio's*. Como primer paso, se desarrolló un modelo de selección de cartera de crédito para un banco que actúa de manera individual. En dicho modelo, el banco encuentra el portafolio de crédito que maximiza su utilidad dentro de un conjunto eficiente de alternativas de inversión. Para realizar la elección de portafolio, el esquema de preferencias del banco fue modelado mediante el Teorema de Maximización de la Utilidad Esperada, mientras que para identificar la región factible de inversión fue introducido el concepto de frontera eficiente de crédito.

El resultado obtenido en este primer modelo es una ecuación para las proporciones eficientes de inversión de cartera de crédito, que puede ser resuelta utilizando métodos numéricos. En dicha ecuación, las proporciones eficientes de inversión dependen del rendimiento esperado de los créditos, de su probabilidad de incumplimiento y de su respectiva matriz de varianza-covarianza, así como del nivel de confianza elegido por el

banco para medir las pérdidas. Es interesante notar que el modelo permite determinar la composición de la cartera de crédito y del fondeo de manera simultánea.

Con base en este primer modelo fue derivado un modelo de equilibrio general que permite determinar la medida de riesgo relevante para cualquier cartera de crédito del mercado y la relación que guarda dicho riesgo con el rendimiento esperado y el precio de los créditos, bajo condiciones de equilibrio en el mercado de crédito.

Este segundo modelo plantea que el problema individual de selección de cartera que enfrenta un banco, bajo el esquema rendimiento esperado-valor en riesgo, puede resolverse en dos pasos. Primero, el banco debe seleccionar el único portafolio óptimo de crédito que existe en el mercado. Segundo, de acuerdo con su estructura de preferencias, el banco debe elegir la combinación, entre el instrumento libre de riesgo y la cartera de crédito óptima, que maximice su utilidad. A partir de este hecho, fue posible encontrar una relación explícita entre el rendimiento y el riesgo de los créditos.

La *Línea de Mercado de Crédito Bancario (LMCB)* establece la relación entre el rendimiento esperado y el riesgo para las carteras eficientes de crédito. Según esta línea, el rendimiento esperado de cualquier cartera eficiente de crédito es igual al rendimiento libre de riesgo más el precio del riesgo por el número de unidades del mismo en que un banco incurra. El precio del riesgo, en este caso, depende directamente del diferencial entre el rendimiento esperado del mercado y la tasa libre de riesgo y de manera inversa de la proporción que represente el valor en riesgo del mercado del valor total de la cartera de mercado.

La *Línea de Mercado de Crédito Individual (LMCI)* establece la relación entre el rendimiento esperado y el riesgo relevante para cualquier crédito individual. En particular,

el rendimiento esperado de un crédito cualquiera depende de su riesgo relevante y de la tasa libre de riesgo. El riesgo relevante resulta estar compuesto por dos sobretasas. La primera de ellas depende del impago esperado del crédito -como proporción del valor total de la cartera de mercado- y la segunda de ellas depende del riesgo sistémico, que proviene de la relación entre el incumplimiento del crédito individual y el incumplimiento del mercado. Una propiedad interesante de la *LMCI* es que el riesgo relevante para una cartera de crédito cualquiera es igual a la suma ponderada del riesgo relevante de los créditos que la componen.

Debido a que la información requerida por el modelo se considera *confidencial* en la mayoría de las ocasiones, la corroboración empírica del modelo se ha dejado a los agentes crediticios, así como a los reguladores financieros que se encuentren interesados en *acceder a un esquema integral riesgo-rendimiento de crédito*. Para esto, en uno de los apéndices del trabajo se presenta el algoritmo para el cálculo del *MAPCB* en *Matlab6*.

Bibliografía

- Adamidou, E., Ben-Dov, Y., Pendergast, L. y Pica, V., 1993, The Optimal Portfolio System: Targeting Horizon Total Returns under Varying Interest-rate Scenarios, in *Financial Optimization*, edited by Zenios, S., Cambridge University Press.
- Altman, E., 1997, “Corporate Bond and Commercial Loan Portfolio Analysis”, Working Paper S-97-12, New York University, Salomon Brothers Center.
- , 2002, *Bankruptcy, Credit Risk, and High Yield Junk Bonds*, Great Britain, Blackwell Publishers.
- Basle Committee on Banking Supervision, 1994, “Basle Capital Accord: Treatment of Potential Exposure for off-Balance-Sheet Items”, *Bank for International Settlements (BIS)*.
- Basle Committee on Banking Supervision, 2004, “Basel II: International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: a Revised Framework”, *Bank for International Settlements (BIS)*.
- Blair, R. y Heggstad, A., 1978, “Bank Portfolio Regulation and the Probability of Bank Failure”, *Journal of Money, Credit and Banking*, Vol. 10, No. 1, February, pp. 88-93.

- Canavos, G., 1988, *Probabilidad y Estadística. Aplicaciones y Métodos*, México, McGraw-Hill.
- Caouette, J., Altman, E. y Narayanan, P., 1998, *Managing Credit Risk. The Next Great Financial Challenge*, USA, John Wiley & Sons, Inc.
- Copeland, T. y Weston, J., 1992, *Financial Theory and Corporate Policy*, USA, Addison Wesley Publishing Company, Third Edition.
- Credit Risk⁺*, 1997, Credit Suisse Financial Products, New York.
- Crouhy, M., Galai, D. y Mark, R., 2000, “A Comparative Analysis of Current Credit Risk Models”. *Journal of Banking and Finance*, Vol. 24, No. 1/2 pp. 59-117.
- Duffe, G., 1999, “Estimating the Price of Default Risk”, *The Review of Financial Studies*, Vol. 12, Issue 1, Spring, pp. 197-226.
- Eom, Y. H., Helwege, J. y Huang, J., 2003, “Structural Models of Corporate Bond Pricing: An Empirical Analysis”, Unpublished Draft.
- Fama, E. y French, K., 1996, “The CAPM is Wanted, Dead or Alive”, *The Journal of Finance*, Vol. LI, No.5., pp.1947-1958.
- , 1996, “Multifactor Explanations of Asset Pricing Anomalies”, *The Journal of Finance*, No. 51, pp. 55-84.
- Fama, E. y MacBeth, J., 1973, “Risk, Return, and the Equilibrium: Empirical Tests”, *The Journal of Political Economy*, Vol. 91, Issue 3, May, pp. 607-36.
- García de Jalón, J., Rodríguez, J. y Brazales, A., 2001, “Aprenda Matlab 6.1 como si estuviera en primero”. Colección Aprenda Informática como si estuviera en Primero, Madrid, Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales, Universidad Politécnica de Madrid.
- Gordy, M., 2000, “A Comparative Anatomy of Credit Risk Models”. *Journal of Banking and Finance*, Vol. 24, No. 1/2 pp. 119-149.
- Grossman, S., 1996, *Álgebra Lineal*, Colombia, McGraw-Hill, 5^{ta} Edición.
- Gupton, G., Finger, C. y Bhatia, M., 1997, *CreditMetrics: The Benchmark for Understanding Credit Risk*. Technical Document, New York, J. P. Morgan, Inc.
- Gutiérrez R. y Márquez, J., 2003, “Los Métodos de Calificación de Cartera y su Importancia para los Paradigmas de Medición de Riesgo de Crédito” en *Medición*

- Integral del Riesgo de Crédito*, Alan Elizondo (Compilador), México, Limusa Noriega Editores, pp. 21-41.
- Hart, O. y Jaffee, M., 1974, "On the Application of Portfolio Theory to Depository Financial Intermediaries", *Review of Economic Studies*, January, pp. 129-47.
- Holmström, B. y Tirole, J., 1998, *LAPM: A Liquidity-Based Asset Pricing Model*, NBER Working Paper No. 6673, National Bureau of Economic Research.
- Huang, C. y Litzenberger, R., 1998, *Foundations for Financial Economics*, USA, Prentice Hall.
- Jorion, P., 1997, *Value at Risk. The New Benchmark for Controlling Derivatives Risk*, USA, Mc Graw-Hill.
- Lam, C. y Chen, A., 1985, "Joint Effects of Interest Rate Deregulation and Capital Requirements on Optimal Bank Portfolio Adjustments", *The Journal of Finance*, Vol. XL, No. 2, June, pp. 563-75.
- Lintner, J., 1965(a), "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets", *Review of Economics and Statics*, Vol. 47, No. 1, February, 13-37.
- , 1965(b), "Security Prices, Risk, and Maximal Gains from Diversification", *The Journal of Finance*, Vol. XX, No.4, December, pp. 587-615.
- Markowitz, H., 1952, "Portfolio Selection", *The Journal of Finance*, Vol. VII, No. 1, March, pp. 77-91.
- , 2000, *Portfolio Selection. Efficient Diversification of Investments*, USA, Blackwell Publishers, Second Edition.
- , 1983, "Nonnegative or Not Nonnegative: A Question about CAPMs", *The Journal of Finance*, Vol. XXXVIII, No.2, May, pp. 283-95.
- Markowitz, H. y Perold, A., 1981, "Portfolio Analysis with Factors and Scenarios", *The Journal of Finance* Vol. XXXVI, No. 14, September, pp. 871-877.
- Márquez, J., 1982, "On the Equivalence Between the Safety First and Min-variance Criterion for Portfolio Selection", *European Journal of Operational Research*, Vol. 10, No. 2, June, pp.144-50.
- , 1987, *Fundamentos de Teoría de Optimización*, México, Editorial Limusa.

- , 2000, *Paradigmas de Riesgo-Crédito*. Apuntes del Curso Riesgo-Crédito, México, Diplomado de Riesgos, Universidad Panamericana.
- , 2002, “Suficiencia de Capital y Riesgo de Crédito en Carteras de Préstamos Bancarios”, México, Documento de Investigación No. 2002-04, DGASF, Banco de México.
- , 2002, “Notas del Curso: Teoría de Inversiones”, México, Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey.
- Márquez, J. y López, C., 1999, “Concentration Risk in Bank Loan Portfolio’s: Measurement, Single Obligor Limits, and Capital Adequacy”, México, Documento de Investigación No. 9902, Banco de México.
- MathWorks, 1998, *MATLAB Function Reference (Volume 1: Language)*, USA, The MathWorks, Inc., Version5.
- Merton, R., 1974, “On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates”, *The Journal of Finance*, Vol.29, pp.449-470.
- Mossin, J., 1966, “Equilibrium in a Capital Asset Market”, *Econometrica* Vol. 34, No.4, October, pp. 768-783.
- Roll, R., 1969, “Bias Fitting the Sharpe Model to Time Series Data”, *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 4., Issue 3, September, pp. 271-89.
- , 1978, “Ambiguity when Performance is Measured by the Securities Market Line”, *The Journal of Finance*, Vol. XXXIII, Issue 4, September, pp. 1051-69.
- Roll, R. y Ross, S., 1994, “On the Cross-sectional Relation between Expected Returns and Betas”, *The Journal of Finance*, Vol. XLIX, Issue 1, March, pp. 101-21.
- Roy, A., 1952, “Safety First and the Holding of Assets”, *Econometrica*, July, pp. 431-49.
- Schlottmann, F. y Seese, D., 2001, “A Hybrid Genetic-Quantitative Method for Risk-Return Optimization of Credit Portfolios”, paper presented for the *Quantitative Methods in Finance Conference*, Sydney, Australia.
- Scönbucher, P., 2000, “Factor Models for Portfolio Credit Risk”, Bonn University, Department of Statistics, Unpublished Document.
- Shalit, H. y Yitzhaki, S., 1984, “Mean-Gini Portfolio Theory, and the Pricing of Risky Assets”, *The Journal of Finance*, Vol. XXXIX, No. 5, December, pp. 1449-68.

- Sharpe, W., 1964, "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk", *The Journal of Finance*, Vol. XIX, No. 3, September, pp. 425-42.
- , 1965, "Risk-Aversion in the Stock Market: Some Empirical Evidence", *The Journal of Finance*, Vol. XX, No. 3, September, pp. 416-22.
- , 1967, "Portfolio Analysis", *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 2, No. 2, June, pp. 76-84.
- , 1970, "Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work: Discussion", *The Journal of Finance*, Vol. XXV, No. 2, May, pp. 418-20.
- , 1991, "Capital Asset Prices with and without Negative Holdings", *The Journal of Finance*, Vol. XLVI, No. 2, June, pp. 489-509.
- Sharpe, W., Alexander, G. y Bailey, J., 1998, *Investments*, USA, Prentice Hall, Inc., 6th Edition.
- Stiglitz, J y Weiss, A, 1981, "Credit Rationing in Markets with Imperfect Information", *The American Economic Review*, Vol. 71, No. 3, pp. 393-410.
- Stiglitz, J y Weiss, A, 1987, "Credit Rationing: Reply", *The American Economic Review*, Vol. 77, No. 1, pp. 228-231.

Apéndice 2.1. Cartera Eficiente de Crédito Bancario

Sea “ \mathbf{x} ” el vector- N de proporciones de inversión de la cartera de crédito, sea “ $\boldsymbol{\pi}$ ” el vector- N de probabilidades de incumplimiento de los créditos y sea “ \mathbf{M} ” la matriz de varianza-covarianza de las probabilidades de incumplimiento. Entonces, sea “ $\mathbf{x}^T \boldsymbol{\pi}$ ” el incumplimiento esperado de la cartera como proporción del total de su valor (V_c) y sea “ $z_\alpha \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}}$ ” el incumplimiento no esperado de la cartera donde “ z_α ” es la variable normal estandarizada que corresponde al nivel de confianza de “ α ”. Entonces, el monto en riesgo de una cartera de crédito “ c ”, expresado como proporción del valor total de la cartera, es igual a:¹

$$\frac{VaR_c^\alpha}{V_c} = \mathbf{x}^T \boldsymbol{\pi} + z_\alpha \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}} \quad (2.7)$$

y el rendimiento esperado de dicha cartera es igual a:

$$r_c^\circ = \mathbf{x}^T \mathbf{r}. \quad (2.8)$$

Proposición 2.1. Cartera Eficiente de Crédito Bancario. Sea el valor en riesgo de una cartera “ c ”, para un nivel de confianza de “ α ”, igual a $VaR_c^\alpha / V_c = \mathbf{x}^T \boldsymbol{\pi} + z_\alpha \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}}$ y sea el rendimiento esperado de la cartera igual a $r_c^\circ = \mathbf{x}^T \mathbf{r}$. Entonces, una cartera de crédito bancario “ c ” es una cartera eficiente si y sólo si el vector de proporciones de crédito “ \mathbf{x} ” es la solución al siguiente problema cuadrático:

$$\underset{\{\mathbf{x}\}}{\text{Min}} \quad \mathbf{x}^T \boldsymbol{\pi} + z_\alpha \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}} \quad \text{s.a.} \quad \mathbf{x}^T \mathbf{r} = r^\circ \quad ; \quad \mathbf{x}^T \mathbf{1} = 1$$

¹ Véase Márquez, J. y López, C. (1999)

Resolviendo. Formando el *Lagrangiano*, “ \mathbf{x} ” es la solución a:

$$L(\mathbf{x}, \lambda, \theta) = \mathbf{x}^T \boldsymbol{\pi} + z_\alpha \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}} - \lambda (\mathbf{x}^T \mathbf{r} - r^\circ) - \theta (\mathbf{x}^T \mathbf{1} - 1) \quad (2.9)$$

Utilizando un poco de cálculo se obtienen las condiciones de primer orden (C.P.O.):

$$\nabla_{L_x}(\mathbf{x}, \lambda, \theta) = \boldsymbol{\pi} + \frac{z_\alpha}{\sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}}} \cdot \mathbf{M} \mathbf{x} - \lambda \mathbf{r} - \theta \mathbf{1} = \mathbf{0} \quad (2.10.a)$$

$$\nabla_{L_\lambda}(\mathbf{x}) = r^\circ - \mathbf{x}^T \mathbf{r} = 0 \quad (2.10.b)$$

$$\nabla_{L_\theta}(\mathbf{x}) = 1 - \mathbf{x}^T \mathbf{1} = 0 \quad (2.10.c)$$

donde “ $\mathbf{0}$ ”, en la ecuación (2.10.a), es un vector- N de ceros.

Rescribiendo la desviación estándar de las pérdidas como $\sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}} = \sigma(\mathbf{x}^*)$ la ecuación (2.10.a) queda como:

$$\mathbf{M} \mathbf{x} = \frac{(\lambda \mathbf{r} + \theta \mathbf{1} - \boldsymbol{\pi})(\mathbf{x}^*)}{z_\alpha} \quad (A.2.1.1)$$

y despejando (A.2.1.1) para “ \mathbf{x}^* ” se tiene:

$$\mathbf{x}^* = \frac{\sigma(\mathbf{x}^*)}{z_\alpha} \mathbf{M}^{-1} (\lambda \mathbf{r} + \theta \mathbf{1} - \boldsymbol{\pi}) \quad (2.11)$$

Premultiplicando la ecuación (2.11) por “ \mathbf{r}^T ” y “ $\mathbf{1}^T$ ” y utilizando (2.10.a) y (2.10.b) se llega a:

$$\mathbf{r}^T \mathbf{x}^* = r^\circ = \frac{\sigma(\mathbf{x}^*)}{z_\alpha} \mathbf{r}^T \mathbf{M}^{-1} (\lambda \mathbf{r} + \theta \mathbf{1} - \boldsymbol{\pi}) \quad (2.12)$$

y

$$\mathbf{1}^T \mathbf{x}^* = 1 = \frac{\sigma(\mathbf{x}^*)}{z_\alpha} \mathbf{1}^T \mathbf{M}^{-1} (\lambda \mathbf{r} + \theta \mathbf{1} - \boldsymbol{\pi}) \quad (2.13)$$

que son las restricciones del problema original evaluadas en el óptimo.

Para encontrar el valor de “ λ ”, se despejan (2.12) y (2.13) para “ $\frac{z_\alpha}{\sigma(\mathbf{x}^*)}$ ” y se

igualan para obtener:

$$\frac{z_\alpha}{\sigma(\mathbf{x}^*)} = \frac{\mathbf{r}^T \mathbf{M}^{-1} (\lambda \mathbf{r} + \theta \mathbf{1} - \boldsymbol{\pi})}{r^\circ} = \mathbf{1}^T \mathbf{M}^{-1} (\lambda \mathbf{r} + \theta \mathbf{1} - \boldsymbol{\pi}) \quad (\text{A.2.1.2})$$

acomodando términos, la ecuación anterior es igual a:

$$\mathbf{r}^T \mathbf{M}^{-1} (\lambda \mathbf{r} + \theta \mathbf{1} - \boldsymbol{\pi}) = r^\circ \cdot \mathbf{1}^T \mathbf{M}^{-1} (\lambda \mathbf{r} + \theta \mathbf{1} - \boldsymbol{\pi}) \quad (\text{A.2.1.3})$$

desarrollándola se tiene:

$$\lambda \mathbf{r}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{r} + \theta \mathbf{r}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{1} - \mathbf{r}^T \mathbf{M}^{-1} \boldsymbol{\pi} = r^\circ \cdot \lambda \mathbf{1}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{r} + \theta \mathbf{1}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{1} - \mathbf{1}^T \mathbf{M}^{-1} \boldsymbol{\pi} \quad (\text{A.2.1.4})$$

reagrupando términos para “ λ ” y “ θ ” se llega a la ecuación (A.2.1.5):

$$\lambda (\mathbf{r}^T - r^\circ \cdot \mathbf{1}^T) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{r} + \theta (\mathbf{r}^T - r^\circ \cdot \mathbf{1}^T) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{1} - (\mathbf{r}^T - r^\circ \cdot \mathbf{1}^T) \mathbf{M}^{-1} \boldsymbol{\pi} = 0 \quad (\text{A.2.1.5})$$

Factorizando la ecuación anterior se llega a la *condición de ortogonalidad* siguiente:

$$(\mathbf{r}^T - r^\circ \cdot \mathbf{1}^T) \mathbf{M}^{-1} (\lambda \mathbf{r} + \theta \mathbf{1} - \boldsymbol{\pi}) = 0 \quad (\text{A.2.1.6})$$

Despejando (A.2.1.5) para “ λ ” se obtiene:

$$\lambda = \frac{(\mathbf{r}^T - r^\circ \cdot \mathbf{1}^T) \mathbf{M}^{-1} \boldsymbol{\pi}}{(\mathbf{r}^T - r^\circ \cdot \mathbf{1}^T) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{r}} - \theta \frac{(\mathbf{r}^T - r^\circ \cdot \mathbf{1}^T) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{1}}{(\mathbf{r}^T - r^\circ \cdot \mathbf{1}^T) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{r}} \quad (\text{A.2.1.7})$$

rescribiendo términos en la ecuación anterior como:

$$m = \frac{(\mathbf{r}^T - r^\circ \cdot \mathbf{1}^T) \mathbf{M}^{-1} \boldsymbol{\pi}}{(\mathbf{r}^T - r^\circ \cdot \mathbf{1}^T) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{r}} \quad (\text{A.2.1.8})$$

y

$$n = \frac{(\mathbf{r}^T - r^\circ \cdot \mathbf{1}^T) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{1}}{(\mathbf{r}^T - r^\circ \cdot \mathbf{1}^T) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{r}} \quad (\text{A.2.1.9})$$

(A.2.1.7) es igual a:

$$\lambda = m - \theta n \quad (2.14)$$

donde “ m ” y “ n ” son escalares. En la ecuación anterior, “ λ ” es el aumento en el nivel de valor en riesgo provocado por la búsqueda de una unidad más de rendimiento esperado; es decir, “ λ ” es el riesgo marginal del rendimiento esperado ($VaRMg(\bar{r})$).

Para obtener ahora el valor de “ θ ” se sustituye (2.14) en la condición de ortogonalidad (A.2.1.6) y tenemos:

$$(\mathbf{r}^T - r^\circ \cdot \mathbf{1}^T) \mathbf{M}^{-1}((m - \theta n)\mathbf{r} + \theta \mathbf{1} - \boldsymbol{\pi}) = 0 \quad (\text{A.2.1.10})$$

agrupando términos para “ θ ” :

$$(\mathbf{r}^T - r^\circ \cdot \mathbf{1}^T) \mathbf{M}^{-1}((m \cdot \mathbf{r} - \boldsymbol{\pi}) + \theta(\mathbf{1} - n \cdot \mathbf{r})) = 0 \quad (\text{A.2.1.11})$$

y haciendo los cambios de variables:

$$\mathbf{y} = (m \cdot \mathbf{r} - \boldsymbol{\pi}) \quad (\text{A.2.1.12})$$

y

$$\mathbf{z} = (\mathbf{1} - n \cdot \mathbf{r}) \quad (\text{A.2.1.13})$$

donde “ \mathbf{y} ” y “ \mathbf{z} ” son vectores de tamaño N , se llega a:

$$(\mathbf{r}^T - r^\circ \cdot \mathbf{1}^T) \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{y} + \theta \cdot \mathbf{z}) = 0 \quad (\text{A.2.1.14})$$

Descomponiendo términos, la ecuación anterior es igual a:

$$\mathbf{r}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{y} - r^\circ \cdot \mathbf{1}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{y} + \theta \cdot \mathbf{r}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{z} - \theta \cdot r^\circ \cdot \mathbf{1}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{z} = 0 \quad (\text{A.2.1.15})$$

y reagrupando para “ θ ”:

$$(\mathbf{r} - r^\circ \cdot \mathbf{1})^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{y} + \theta (\mathbf{r} - r^\circ \cdot \mathbf{1})^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{z} = 0 \quad (\text{A.2.1.16})$$

de donde se despeja fácilmente “ θ ”:

$$\theta = - \frac{(\mathbf{r} - r^\circ \cdot \mathbf{1})^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{y}}{(\mathbf{r} - r^\circ \cdot \mathbf{1})^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{z}} \quad (2.15)$$

donde $\mathbf{y} = (m \cdot \mathbf{r} - \boldsymbol{\pi})$ y $\mathbf{z} = (\mathbf{1} - n \cdot \mathbf{r})$.

Finalmente, sustituyendo (2.14) y (2.15) en (2.11) se obtienen las proporciones eficientes de inversión (\mathbf{x}^*) para carteras de crédito:

$$\mathbf{x}^* = \frac{\sigma(\mathbf{x}^*)}{z_\alpha} \mathbf{M}^{-1} \left[\frac{E}{D} \mathbf{1} + \frac{1}{AD} (CD - BE) \mathbf{r} - \boldsymbol{\pi} \right] \quad (2.16)$$

con $A = \frac{1}{r^\circ} [\mathbf{r} - r^\circ \mathbf{1}]^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{r}$, $B = \frac{1}{r^\circ} [\mathbf{r} - r^\circ \mathbf{1}]^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{1}$, $C = \frac{1}{r^\circ} [\mathbf{r} - r^\circ \mathbf{1}]^T \mathbf{M}^{-1} \boldsymbol{\pi}$,

$$D = \frac{1}{r^\circ} [\mathbf{r} - r^\circ \mathbf{1}]^T \mathbf{M}^{-1} \left[\mathbf{1} - \frac{B}{A} \mathbf{r} \right] \text{ y } E = \frac{1}{r^\circ} [\mathbf{r} - r^\circ \mathbf{1}]^T \mathbf{M}^{-1} \left[\frac{C}{A} \mathbf{r} - \boldsymbol{\pi} \right]. \blacksquare$$

Apéndice 2.2. Concavidad de la Frontera Eficiente de Crédito Bancario

Proposición 2.2. Sean “ \mathbf{u} ” y “ \mathbf{v} ” dos carteras de crédito distintas tales que $\mathbf{u}^T \mathbf{r} = r^0$, $\mathbf{u}^T \mathbf{1} = 1$, $\mathbf{v}^T \mathbf{r} = r^1$ y $\mathbf{v}^T \mathbf{1} = 1$, entonces la frontera eficiente de crédito en el esquema *valor en riesgo-rendimiento* es cóncava.

Prueba. Sean “ \mathbf{u} ” y “ \mathbf{v} ” dos vectores tales que $\mathbf{u}^T \mathbf{r} = r^0$, $\mathbf{u}^T \mathbf{1} = 1$, $\mathbf{v}^T \mathbf{r} = r^1$ y $\mathbf{v}^T \mathbf{1} = 1$, para que la frontera eficiente en el esquema *valor en riesgo-rendimiento* ($VaR_\alpha(\mathbf{x}) - r(\mathbf{x})$) sea cóncava se necesita que la ecuación del valor en riesgo ($VaR_\alpha(\mathbf{x})$) sea convexa en “ \mathbf{x} ”.

Dado que la ecuación de valor en riesgo para una cartera “ c ” se definió como:

$$VaR_c^\alpha = \mathbf{F}^T \boldsymbol{\pi} + z_\alpha \sqrt{\mathbf{F}^T \mathbf{M} \mathbf{F}} \quad (2.1)$$

la condición de convexidad se escribe de la siguiente manera:

$$VaR_c^\alpha(\lambda \mathbf{u} + (1 - \lambda) \mathbf{v}) \leq \lambda VaR_c^\alpha(\mathbf{u}) + (1 - \lambda) VaR_c^\alpha(\mathbf{v}) \quad (A.2.1.1)$$

sustituyendo (2.1) en (A.2.1.1) se obtiene:

$$\begin{aligned} & [\lambda \mathbf{u} + (1 - \lambda) \mathbf{v}]^T \boldsymbol{\pi} + z_\alpha \sqrt{[\lambda \mathbf{u} + (1 - \lambda) \mathbf{v}]^T \mathbf{M} [\lambda \mathbf{u} + (1 - \lambda) \mathbf{v}]} \leq \\ & \lambda [\mathbf{u}^T \boldsymbol{\pi} + z_\alpha \sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u}}] + (1 - \lambda) [\mathbf{v}^T \boldsymbol{\pi} + z_\alpha \sqrt{\mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{v}}] \end{aligned} \quad (A.2.2.2)$$

desarrollando se llega a:

$$\begin{aligned} & \lambda \mathbf{u}^T \boldsymbol{\pi} + (1 - \lambda) \mathbf{v}^T \boldsymbol{\pi} + z_\alpha \sqrt{[\lambda \mathbf{u} + (1 - \lambda) \mathbf{v}]^T \mathbf{M} [\lambda \mathbf{u} + (1 - \lambda) \mathbf{v}]} \leq \\ & \lambda \mathbf{u}^T \boldsymbol{\pi} + (1 - \lambda) \mathbf{v}^T \boldsymbol{\pi} + \lambda z_\alpha \sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u}} + (1 - \lambda) z_\alpha \sqrt{\mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{v}} \end{aligned} \quad (A.2.2.3)$$

y cancelando términos se tiene la siguiente desigualdad:

$$z_\alpha \sqrt{[\lambda \mathbf{u} + (1 - \lambda) \mathbf{v}]^T \mathbf{M} [\lambda \mathbf{u} + (1 - \lambda) \mathbf{v}]} \leq \lambda z_\alpha \sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u}} + (1 - \lambda) z_\alpha \sqrt{\mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{v}} \quad (A.2.2.4)$$

que es la condición de convexidad en “ \mathbf{x} ” de la función “ $\sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}}$ ”.

Proposición 2.3. “ $\sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}}$ ” es una función estrictamente convexa en “ \mathbf{x} ” si “ \mathbf{M} ” es una matriz positiva definida ($\mathbf{M} > 0$).

Prueba. Sea $S \neq \emptyset$ un conjunto convexo en E^n y $f : S \rightarrow \Re$ una función diferenciable sobre S . Entonces, f es convexa sobre S si y sólo si

$$f(\mathbf{v}) \geq f(\mathbf{u}) + \nabla f(\mathbf{u})^T (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S.^1$$

Retomando (A.2.2.4) y empleando el teorema anterior se debe cumplir la siguiente desigualdad para que la proposición sea válida:

$$\sqrt{\mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{v}} \geq \sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u}} + \frac{(\mathbf{M} \mathbf{u})^T}{\left[\sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u}}\right]^T} (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \quad (\text{A.2.2.5})$$

desarrollando términos se tiene:

$$\sqrt{\mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{v}} \geq \sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u}} + \frac{1}{\sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u}}} (\mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{v} - \mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u}). \quad (\text{A.2.2.6})$$

Cancelando términos iguales la desigualdad anterior se reduce a:

$$\sqrt{\mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{v}} \geq \frac{\mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{v}}{\sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u}}} \quad (\text{A.2.2.7})$$

por lo tanto, para que la frontera eficiente de valor en riesgo-rendimiento sea cóncava se debe cumplir que:

$$\sqrt{\mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{v}} - \frac{\mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{v}}{\sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u}}} \geq 0. \quad (\text{A.2.2.8})$$

Sacando denominador común y simplificando se obtiene:

$$\sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u}} \cdot \sqrt{\mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{v}} - \mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{v} \geq 0 \quad (\text{A.2.2.9})$$

¹ Este teorema es ampliamente conocido por los economistas. Véase por ejemplo Márquez, J., (1987), p.77.

y por la desigualdad de *Cauchy-Scwartz*² ($\mathbf{y}^T \mathbf{V} \mathbf{x} \leq \sqrt{\mathbf{y}^T \mathbf{V} \mathbf{y}} \cdot \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{V} \mathbf{x}}$) sabemos que la desigualdad (A.2.2.9) se cumple. Por lo tanto, queda demostrado que la ecuación de valor en riesgo ($VaR(\mathbf{x})$) es convexa en “ \mathbf{x} ” y que la *curva eficiente de valor en riesgo- rendimiento es cóncava*.

² La demostración de la desigualdad de Cauchy-Scwartz puede verse en cualquier libro de álgebra lineal, por ejemplo Grossman, S. (1996), p.406.

Apéndice 3.1. La Línea de Mercado de Crédito Individual (LMCI)

La pendiente de la curva “*iMi*” (gráfica 3.4), que representa las combinaciones posibles entre el *i*-ésimo crédito y la cartera de mercado (*M*), es igual a:

$$\frac{\frac{d\bar{r}_c}{d VaR_c^\alpha / V_c}}{\frac{d\bar{r}_c}{d\lambda}} = \frac{\frac{d\bar{r}_c}{d\lambda}}{\frac{d VaR_c^\alpha / V_c}{d\lambda}} \quad (3.8)$$

El lado izquierdo de la ecuación (3.8) es el cambio en el rendimiento esperado de la cartera “*c*” producido por un cambio en el valor en riesgo de la misma. El numerador del lado derecho de la ecuación representa el cambio en el rendimiento esperado de la cartera “*c*” producto de un cambio en las proporciones de inversión entre el crédito “*i*” y el portafolio “*M*”. Análogamente, el denominador de lado derecho representa el cambio en el valor en riesgo de la cartera “*c*” producto de un cambio en las proporciones invertidas en el crédito “*i*” y en el portafolio “*M*”.

Derivando la ecuación (3.4) c.r.a. “ λ ” obtenemos el numerador del lado derecho de la ecuación (3.8):

$$\frac{d\bar{r}_c}{d\lambda} = \bar{r}_i - \bar{r}_M \quad (3.9)$$

Derivando la ecuación (3.7), c.r.a. “ λ ” y rescribiendo $\sigma_M^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}$, $A = \lambda^2 \mathbf{x}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{x}_i + (1 - \lambda)^2 \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} + \lambda(1 - \lambda) \mathbf{x}^T \mathbf{K}_i \mathbf{x}$, $\sigma_{iM}^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{K}_i \mathbf{x}$ y $\sigma_i^2 = \mathbf{x}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{x}_i$ se obtiene el denominador del lado derecho de la ecuación (3.8):

$$\frac{d \frac{VaR_c^\alpha}{V_c}}{d\lambda} = \boldsymbol{\pi}_i^T \mathbf{x}_i + \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{x} + \frac{z_\alpha}{\sqrt{A}} \left(\lambda \sigma_i^2 + \lambda \sigma_M^2 - \sigma_M^2 + \frac{1}{2} \sigma_{iM} - \lambda \sigma_{iM} \right) \quad (3.10)$$

Sustituyendo (3.10) y (3.11) en (3.9) se obtiene la pendiente de la curva “*iMi*”:

$$\frac{d\bar{r}_c}{d \frac{VaR_c^\alpha}{V_c}} = \frac{\bar{r}_i - \bar{r}_M}{\boldsymbol{\pi}_i^T \mathbf{x}_i + \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{x} + \frac{z_\alpha}{\sqrt{A}} \left(\lambda \sigma_i^2 + \lambda \sigma_M^2 - \sigma_M^2 + \frac{1}{2} \sigma_{iM} - \lambda \sigma_{iM} \right)} \quad (3.11)$$

La pendiente de la curva “*iMi*” y la de la Línea de Mercado de Crédito Bancario (LMCB), derivada en el apartado anterior, son iguales cuando “ $\lambda=0$ ”. Igualando ambas líneas es posible obtener la contribución del crédito “*i*” al riesgo de mercado y, por lo tanto, la relación del rendimiento esperado (\bar{r}_i) del *i*-ésimo crédito con su *riesgo relevante*.

Evaluando la ecuación (3.11) en el punto “ $\lambda=0$ ” se tiene que:

$$\left. \frac{d\bar{r}_c}{d \frac{VaR_c^\alpha}{V_c}} \right|_{\lambda=0} = \frac{\bar{r}_i - \bar{r}_M}{\boldsymbol{\pi}_i^T \mathbf{x}_i + \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{x} + \frac{z_\alpha}{\sigma_M} \left(\frac{1}{2} \sigma_{iM} - \sigma_M^2 \right)} \quad (3.12)$$

Del apartado anterior se sabe que la pendiente de la Línea de Mercado de Crédito Bancario es igual a $\frac{\bar{r}_M - r_f}{VaR_M^\alpha / V_M}$. Igualando la pendiente de ambas curvas se tiene:

$$\frac{d\bar{r}_c}{d \frac{VaR_c^\alpha}{V_c}} = \frac{\bar{r}_i - \bar{r}_M}{\boldsymbol{\pi}_i^T \mathbf{x}_i + \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{x} + \frac{z_\alpha}{\sigma_M} \left(\frac{1}{2} \sigma_{iM} - \sigma_M^2 \right)} = \frac{\bar{r}_M - r_f}{VaR_M^\alpha / V_M} \quad (3.13)$$

Despejando para \bar{r}_i , la ecuación (3.14) es equivalente a:

$$\bar{r}_i - \bar{r}_M = \frac{(\bar{r}_M - r_f) \cdot \left\{ \boldsymbol{\pi}_i^T \mathbf{x}_i + \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{x} + \frac{z_\alpha}{\sigma_M} \left(\frac{1}{2} \sigma_{iM} - \sigma_M^2 \right) \right\}}{VaR_M^\alpha / V_M} \quad (A.3.1.1)$$

descomponiendo y reagrupando términos se tiene:

$$\bar{r}_i = \bar{r}_M + \frac{(\bar{r}_M - r_f)\boldsymbol{\pi}_i^T \mathbf{X}_i - (\bar{r}_M - r_f)\boldsymbol{\pi}^T \mathbf{X} + (\bar{r}_M - r_f)\frac{z_\alpha}{2\sigma_M}\sigma_{iM} - (\bar{r}_M - r_f)\frac{z_\alpha}{\sigma_M}\sigma_M^2}{VaR_M^\alpha / V_M} \quad (\text{A.3.1.2})$$

Simplificando:

$$\bar{r}_i = \bar{r}_M + \frac{(\bar{r}_M - r_f) \cdot \left(\boldsymbol{\pi}_i^T \mathbf{X}_i + \frac{z_\alpha}{2\sigma_M}\sigma_{iM} \right) + (\bar{r}_M - r_f) \cdot \left(\boldsymbol{\pi}^T \mathbf{X} + z_\alpha \sigma_M \right)}{VaR_M^\alpha / V_M} \quad (\text{A.3.1.3})$$

Recordando que $\boldsymbol{\pi}^T \mathbf{X} + z_\alpha \sigma_M = VaR_M^\alpha / V_M$ y factorizando se llega a:

$$\bar{r}_i = r_f + \frac{(\bar{r}_M - r_f) \cdot \left(\boldsymbol{\pi}_i^T \mathbf{X}_i + \frac{z_\alpha}{2\sigma_M}\sigma_{iM} \right)}{VaR_M^\alpha / V_M} \quad (\text{A.3.1.4})$$

Finalmente, separando términos se obtiene la relación entre el rendimiento esperado de un crédito individual “i” y su riesgo relevante, expresado por la *Línea de Mercado de Crédito Individual (LMCI)*:

$$\bar{r}_i = r_f + \frac{(\bar{r}_M - r_f)}{VaR_M^\alpha / V_M} \cdot \boldsymbol{\pi}_i^T \mathbf{X}_i + \frac{z_\alpha \cdot (\bar{r}_M - r_f)}{2 \cdot VaR_M^\alpha / V_M} \cdot \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M} \quad (3.14). \blacksquare$$

Apéndice 3.2. Pago Esperado de un Crédito Individual

Sea “ $E(\varphi_i)$ ” el pago esperado que proporcionaría el crédito “ i ” en un cierto plazo de tiempo y sea “ f_i ” el monto del préstamo otorgado “ i ”. Entonces, el rendimiento esperado del crédito “ i ” está dado por:

$$\tilde{r}_i = \frac{E(\varphi_i) - f_i}{f_i} \quad (3.18)$$

Recordando la ecuación para la *LMCI* (3.16), que expresa la relación entre el rendimiento esperado del crédito “ i ” y el riesgo relevante, e igualándola a (3.18) se tiene:

$$\bar{r}_i = r_f + \gamma_i \cdot \frac{(\bar{r}_M - r_f)}{VaR_M^\alpha / V_M} + \beta_i \cdot \frac{z_\alpha}{2} \cdot \frac{(\bar{r}_M - r_f)}{VaR_M^\alpha / V_M} = \frac{E(\varphi_i) - f_i}{f_i} \quad (3.19)$$

Rescribiendo $\eta = \frac{(\bar{r}_M - r_f)}{VaR_M^\alpha / V_M}$ en (3.19) la ecuación anterior queda como:

$$\bar{r}_i = r_f + \gamma_i \cdot \eta + \beta_i \cdot \frac{z_\alpha}{2} \cdot \eta = \frac{E(\varphi_i) - f_i}{f_i} \quad (A.3.2.1)$$

pasando el denominador del lado derecho al lado izquierdo se llega a:

$$f_i \cdot \left(\bar{r}_i = r_f + \gamma_i \cdot \eta + \beta_i \cdot \frac{z_\alpha}{2} \cdot \eta \right) = E(\varphi_i) - f_i \quad (A.3.2.2)$$

Finalmente, reagrupando y despejando para “ f_i ” se obtiene la ecuación (3.20)

$$f_i = \frac{E(\varphi_i)}{1 + r_f + \left(\gamma_i + \frac{z_\alpha}{2} \cdot \beta_i \right) \cdot \eta} \quad (3.20)$$

que muestra la relación entre el monto de crédito otorgado con su pago esperado.

La ecuación (3.21) se obtiene fácilmente dividiendo entre uno la ecuación (3.20) y despejando para “ $E(\varphi_i)$ ”:

$$E(\varphi_i) = f_i \cdot \left(1 + r_f + \left(\gamma_i + \frac{z_a}{2} \cdot \beta_i \right) \cdot \eta \right) \quad (3.21). \blacksquare$$

Apéndice 3.3. Algoritmo del Modelo de Asignación de Precios de Crédito**Bancario (MAPCB) para Matlab6**

```

%Modelo de Asignacion de Precios de Credito Bancario (MAPCB)
%Roque V. Hernandez Montes
%Centro de Investigacion y Docencia Economicas (CIDE)
%Julio-Agosto 2003

%Definicion de Variables:
%M es la matriz-NxN de varianza-covarianza del incumplimiento de los creditos
%f es el vector-N que representa la cartera de credito
%x es el vector-N que representa la composicion de la cartera de credito(proporcion que
representa cada credito del valor total de la cartera)
%p es el vector-N que contiene las probabilidades de incumplimiento de los creditos
%r es el vector-N de rendimientos realizados de la cartera
%uno es un vector-N de unos
%z es la variable normal estandarizada para un nivel de confianza "alpha"
%Rf es el rendimiento libre de riesgo

%Se calcula el Rendimiento de Mercado y su VaR
%Probabilidad Esperada de Impago del Mercado (PEIC)
PEI=x'*p
PEIf=f'*p
%Incumplimiento No Esperado del Mercado (INEM)
INE=z*([x'*M*x]^(1/2))
INEf=z*([f'*M*f]^(1/2))
%Rendimiento de Mercado (RM)
R=x'*r
%Valor en Riesgo del Mercado como proporción del Valor Total de la Cartera de Mercado
VaR_V=PEI+INE
VaRf=PEIf+INEf

%Valor de la Cartera de Mercado (V)
V=f'*uno
%Valor en Riesgo del Mercado en Moneda
VaR=V*VaR_V

%Primas de Riesgo del Credito
%Prima de Riesgo del Mercado (PRiesgo)
PRiesgo=R-Rf
%Prima de Riesgo del Impago Esperado (PRIE)
PRIE=[[PRiesgo]/[VaR/V]]

```

%Prima del riesgo Sistemico (PRS)

PRS=[[z/2]*[PRIE]]

%Linea de Mercado de Credito Bancario (LMCB)

LMCB=PRiesgo/VaR_V

%Linea de Mercado de Credito Individual (LMCI)

N=max(size(M))

for i=1:N

 %Probabilidad Esperada de Impago del "i"-esimo credito (PEIi)

 PEIi=x(i)*p(i)

 %Covarianza entre el "i"-esimo credito y el mercado (OJO: no incluye la varianza de impago de "i")

 mi=M(i,:)

 mj=M(:,i)

 Mi=sparse(i,1:N,mi,N,N)

 Mj=sparse(1:N,i,mj,N,N)

 Mij=Mi+Mj

 Mij(i,i)=0

 Covij=x'*Mij*x

 %Riesgo Sistemico del "i"-esimo credito (RSi)

 RSi=Covij/[x'*M*x]

 %Rendimiento esperado del "i"-esimo credito (Ri)

 Ri=Rf+[PRIE*PEIi]+[PRS*RSi]

 RE(i)=Ri

 %Unidades de Impago Esperado de cada Credito

 UIECi(i)=PEIi

 %Unidades de Riesgo Sistemico de cada Credito

 URSi(i)=RSi

end

RE=RE'

%Diferencia entre Rendimiento Realizado(r) y Rendimiento Esperado(RE)

Dif=RE-r

%Porcentaje explicado del Rendimiento Realizado(r)

Dif_r=Dif./r

