

Las colecciones de Documentos de Trabajo del CIDE representan un medio para difundir los avances de la labor de investigación, y para permitir que los autores reciban comentarios antes de su publicación definitiva. Se agradecerá que los comentarios se hagan llegar directamente al (los) autor(es).
❖ D.R. © 1998, Centro de Investigación y Docencia Económicas, A. C., carretera México-Toluca 3655 (km. 16.5), Lomas de Santa Fe, 01210 México, D. F., tel. 727-9800, fax: 292-1304 y 570-4277. ❖ Producción a cargo del (los) autor(es), por lo que tanto el contenido como el estilo y la redacción son responsabilidad exclusiva suya.



NÚMERO 110

Juan Manuel Torres Rojo
ESTIMACIÓN DE LA PRODUCTIVIDAD FORESTAL
CON CURVAS DE SITIO DE FORMA Y ESCALA
VARIABLES

Resumen

Se presenta un procedimiento para generar curvas de índice de sitio con parámetros de forma y escala variables. Estas curvas se generan al asumir cambios discretos o continuos en la relación altura-edad para el intervalo de interés. En ambos casos las funciones presentan las ventajas tradicionalmente asociadas a las funciones anamórficas y polimórficas. El análisis de datos empíricos mostró que la bondad de ajuste de estos modelos es similar a los ajustes obtenidos con las formas anamórficas o polimórficas derivadas de modelos con mayor número de parámetros. Una prueba de validación también mostró que las curvas de índice de sitio compuestas proporcionan mejores predicciones sólo en el caso de tener diferencias de edad muy pequeñas.

Palabras clave: Índice de Sitio, Ana-polimórfica, Poli-anamorfica, Prueba de Validación

Introducción

En años recientes los índices de sitio se han convertido en el método más popular y práctico para la evaluación de la productividad forestal. Este método consiste en evaluar la altura que lograrían los árboles dominantes o codominantes y sanos a una edad predeterminada, frecuentemente referida como edad base o edad índice (Paynadeh y Wang, 1994). Tal evaluación requiere de la suposición de un modelo que represente la relación altura-edad, así como de la suposición de un comportamiento de la familia de curvas generadas bajo el mismo modelo.

La forma de la familia de curvas de índice de sitio se ha dividido en dos clases: anamórficas y polimórficas (Clutter *et al.*, 1983). Las curvas anamórficas se caracterizan porque la altura guarda la misma proporción a diferentes edades, haciendo que las curvas aparenten tener la misma forma. Por el contrario, las curvas polimórficas pueden ser de dos tipos: con intersecciones y sin intersecciones. En ambos casos la proporción que guarda la altura es diferente entre curvas, haciendo que las curvas aparenten diferente forma en cualquiera de sus dos variantes.

Prácticamente desde que se inició el uso de los índices de sitio como medidas de productividad de terrenos forestales se inició la polémica entre el uso de curvas anamórficas o curvas polimórficas. Varios autores han discutido ventajas y desventajas en el uso de ambas; sin embargo, a la fecha nadie puede argüir sobre la superioridad real de alguna de ellas, dado que su uso es prácticamente dependiente de la especie (Payandeh, 1977; Hahn y Carmean 1982). En numerosos artículos se ha destacado que algunas ventajas de un tipo de curva se convierten en desventajas del otro tipo y *viceversa*. Ello conduce a plantear la hipótesis de que la integración de variaciones tanto en forma como en escala de las curvas de índice de sitio podría dar por resultado un tipo de curva que mezcle las ventajas de ambas. Así por ejemplo, se ha señalado que las curvas anamórficas asemejan el comportamiento teórico esperado de curvas de índice de sitio; sin embargo, en años recientes se ha dedicado mucho más investigación al diseño de funciones polimórficas, dado que se ha descubierto que varias especies presentan este comportamiento en su relación altura-edad (Newnham, 1988; Ker y Bowling, 1991; Stansfield *et al.*, 1991; Goelz y Burk, 1992; Payandeh y Wang, 1994).

Dado este marco de referencia, resulta de gran relevancia probar el comportamiento integrado tanto del componente anamórfico como del polimórfico en una función de índice de sitio, la cual podría llamarse *ana-polimórfica* o *poli-anamórfica*. Tal integración consistiría en combinar los cambios en forma y escala de una función cualquiera que relacione las variables altura-edad. Una función de este tipo sería de gran utilidad no sólo en la estimación de índices de sitio, sino también para la evaluación del crecimiento en altura, dado que tal estimación se complica cuando los rodales a ser evaluados presentan muchas especies y amplias diferencias edáficas y topográficas.

Este artículo presenta una alternativa para integrar curvas ana-polimórficas o poli-anamórficas que puedan servir para evaluar la productividad de terrenos forestales. El artículo se organiza de la siguiente forma. La siguiente sección muestra el procedimiento para generar curvas de índice de sitio con variación en escala y forma, mismas que en los sucesivos se referirán como curvas compuestas. La tercera sección compara la eficiencia de las formas compuestas con las formas tradicionales derivadas de los modelos de Shumacher (1939) y Richards (1959). La cuarta sección presenta los resultados de las comparaciones y finalmente, la última sección muestra algunas ventajas y desventajas de la propuesta, así como conclusiones importantes.

Modelo con parámetros de forma y escala variables

Para ilustrar la derivación de la función ana-polimórfica asuma una función simple (Schumacher, 1939) que relacione las variables altura-edad

$$\ln(h) = a + b / E \quad (1)$$

donde h representa altura, E la edad, a y b son los parámetros del modelo y $\ln(\cdot)$ indica el logaritmo natural. Si se considera que el Índice de Sitio (IS) se define como la altura que se logra a la edad base (E_b); entonces es posible estimar el IS a partir de la misma forma funcional, esto es:

$$\ln(IS) = a + b / E_b \quad (2)$$

donde E_b representa la edad base.

El procedimiento tradicional para la construcción de familias de curvas de índice de sitio a través del modelo (2) inicialmente requiere de la suposición de la forma de la familia de curvas. Asuma que la función de índice de sitio que se desea obtener es del tipo anamórfico; ello implica que las curvas deben tener la misma forma, por lo que el parámetro a (de escala) se asumirá variable, mientras que el parámetro de forma (b) permanecerá constante (lo que garantiza la misma forma). Despejando a de (1), se obtiene la función que muestra la variación de a con cambios en edad y altura

$$a = \ln(h) - b / E \quad (3)$$

Sustituyendo (3) en (2) se obtiene la siguiente función anamórfica de índices de sitio para el modelo definido en (1).

$$\ln(IS) = \ln(h) + b(1 / E_b - 1 / E) \quad (4)$$

En esta función el parámetro de forma b es constante; sin embargo sería posible asumir una variación de este parámetro dentro del intervalo de estimación del índice de sitio, al considerar el cambio incremental de b . Este cambio podría integrarse a (4) como:

$$\ln(IS) = \ln(h) + b(1/E_b - 1/E) + db(1/E_b - 1/E) \quad (5)$$

donde db muestra el cambio en el parámetro de forma dentro del intervalo de edades ($E - E_b$) y de alturas ($h - IS$) analizado, esto es, db es la derivada total de b con respecto a las variables altura y edad.

Despejando b del modelo original (1) es posible obtener el valor de db por una simple derivada total¹, la cual tomaría la siguiente forma:

$$db = E d[\ln(h)] + [\ln(h) - a] dE$$

Sustituyendo los valores de $d[\ln(h)]$ y dE , por aquellos que se obtendrían al considerar las diferencias en el intervalo de estimación, db se puede reescribir como:

$$db = E [\ln(IS) - \ln(h)] + [\ln(h) - a] [E_b - E] \quad (6)$$

Al sustituir (6) en (5) y reorganizando se obtiene la siguiente función de índice de sitio:

$$\ln(IS) = \left[\frac{E_b}{2E_b - E} \right] \left[\ln(h) + \left[b - E \ln(h) + [\ln(h) - a] [E_b - E] \right] \left[\frac{1}{E_b} - \frac{1}{E} \right] \right] \quad (7)$$

La función (7) se derivó a partir de una función anamórfica de índice de sitio, sin embargo al incorporar el componente db , la hace también variable en forma dentro del intervalo de interés de edades y alturas, por lo que puede considerarse como una función *ana-polimórfica* de índice de sitio. Esta función tiene algunas características deseables en su estructura, como el hecho de que cuando $E = E_b$ entonces $\ln(h) = \ln(IS)$. Adicionalmente observe la similitud de las funciones (7) y

(4). En (7) existe un ponderador general $\left[\frac{E_b}{2E_b - E} \right]$ que es el inverso de la diferencia entre E_b y su proporción con E . Como se puede apreciar el ponderador queda indefinido cuando la edad es mayor o igual al doble de la edad base ($E \geq$

¹ Observe que por facilidad se ha dejado indicada la derivada de $\ln(h)$ y no de h

$2E_b$), caso que en la práctica sería muy raro. El efecto de tal ponderación es cambiar la forma de la función conforme E se aleja de E_b en ambos sentidos.

Observe también que en (7) $\left[\frac{1}{E_b} - \frac{1}{E} \right]$ está ponderado por $\left\{ -E \ln(h) + [\ln(h) - a] [E_b - E] \right\}$ que es el cambio en la escala de la curva de índice de sitio dentro del intervalo de interés, siendo nulo cuando $E = E_b$.

El modelo de índice de sitio definido en (7) asume que el parámetro de forma b cambia continuamente (db) dentro del intervalo de alturas y edades. Sin embargo, el cambio db también podría considerarse en forma discreta (Δb). Para ilustrar esta estrategia, considere la misma función (1) para la relación altura-edad. Si los pares (h, E) y (IS, E_b) son dos puntos dentro de la curva, y de (1) se sabe que $b = [\ln(h) - a]E$, entonces Δb se puede definir como:

$$\Delta b = b_{E_b} - b_E = [(\ln(IS) - a)E_b - (\ln(h) - a)E] \quad (8)$$

donde b_{E_b} es el valor de b a la edad E_b (y altura IS) y b_E es el valor de b a la edad E (y altura h). Substituyendo (8) en (5) y cambiando db por Δb , es posible obtener una función de índice de sitio ana-polimórfica asumiendo cambios discretos en el parámetro de forma b . La función resultante tiene la forma:

$$\ln(IS) = \left[\frac{E}{E_b} \right] \left[\ln(h) + (1/E_b - 1/E)(b - aE_b - \ln(h)E + aE) \right] \quad (9)$$

Las funciones (7) y (9) son funciones muy similares en las cuales la diferencia básica es el ponderador.

El procedimiento seguido para definir una función *ana-polimórfica* se puede repetir para definir una función *poli-anamórfica*, esto es, una función en la que a partir de una función polimórfica se incorpore una variación del parámetro de escala a . El lector puede comprobar que para el modelo (1) y asumiendo un cambio continuo en el parámetro de escala a (da), la curva *poli-anamórfica* que se puede derivar tiene la siguiente expresión:

$$\ln(IS) = \left[\frac{E_b}{E} - 1 \right] \left[a + \frac{b}{E^2} (E_b - E) \right] + \ln(h) \left[2 - \frac{E_b}{E} \right] \quad (10)$$

mientras que adoptará la siguiente expresión si el cambio es discreto Δa :

$$\ln(IS) = \left[\frac{E_b}{E} \right] \left[a - \ln(h) + b \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{E_b} \right) \right] + 2 \ln(h) - a + b \left(\frac{1}{E_b} - \frac{1}{E} \right) \quad (11)$$

Considerando (4) es posible reacomodar términos y reescribir (11) como:

$$\ln(IS) = LISA + \left[\frac{E_b}{E} - 1 \right] [a - \ln(h)] + b \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{E_b} \right) \left(\frac{E_b}{E} \right) \quad (12)$$

donde *LISA* representa el valor del logaritmo del índice de sitio anamórfico; lado derecho de la expresión (4). En (12) es fácilmente apreciable que la nueva expresión de *IS* considera el modelo anamórfico, más una ponderación que incluye el cambio de escala (segundo término del lado derecho) y un factor adicional que considera la forma de la curva, proporcional a la diferencia entre la edad base y la edad de referencia (tercer término del lado derecho).

Resulta obvio que las expresiones *ana-polimórficas* y las *poli-anamórficas* siempre serán diferentes a menos que la relación altura-edad sea una relación directa ($h=E$), en la que el parámetro de escala y de forma sean iguales a la unidad; sin embargo este es un caso poco atractivo. Adicionalmente es claro que al existir siempre una diferencia entre ambas formas se vuelve a la disyuntiva original: ¿qué es mejor, iniciar con una función anamórfica o con una polimórfica?. Teóricamente ambas expresiones incorporan tanto la variación en escala como en forma, sin embargo como se advertirá posteriormente, existen diferencias de comportamiento.

Comparación de funciones de Índice de Sitio

La base de datos para las variables altura y edad se integró con información proveniente de análisis troncales. La elección del arbolado no incluyó solamente arbolado dominante o codominante, aunque fue requisito que tal arbolado creciera libre de competencia, que fuera de varias edades y que creciera en diferentes condiciones de sitio. De esta forma se asegura que la información refleje el crecimiento real en altura en un amplio rango de edades, evitando el sesgo de usar solo arbolado maduro. La muestra consistió de 164 árboles de diferentes especies y agrupados en 3 diferentes grupos de especies (Cuadro 1). El área de muestreo corresponde a la región denominada Guanacevi-Tecuan, localizada al Noreste del Estado de Durango. Los análisis troncales se realizaron de acuerdo a la metodología definida por Kiessling (1978) mientras que la estimación de alturas derivada de tales análisis se realizó de acuerdo al método ISSA (Fabbio *et al.*, 1994).

La información se dividió aleatoriamente en dos grupos. El primer grupo se integró con 127 árboles, cuya información se utilizó para realizar los ajustes de los modelos. El segundo grupo (de solo 37 árboles) se utilizó para realizar las pruebas de validación sobre los modelos de índice de sitio probados (Cuadro 1). Adicionalmente, las especies se dividieron en tres grupos de acuerdo a sus ritmos de crecimiento en la zona de estudio y el análisis se realizó para cada grupo de especies. El Cuadro 1 muestra el agrupamiento de especies en estos grupos.

Cuadro 1. Número de análisis troncales por especie usadas en el análisis.

<i>Pinus arizonica</i>	1	44	9
<i>Pinus duranguensis</i>	1	17	4
<i>Pinus ayacahuite</i>	2	39	8
<i>Pinus leiophylla</i>	3	14	3
<i>Pinus lumholtzii</i>	3	10	3
<i>Pinus herrerae</i>	3	16	4
<i>Pinus engelmannii</i>	3	10	3
<i>Pinus teocote</i>	3	14	3
TOTAL		164	37

Dada la disponibilidad de análisis troncales el análisis se realizó de acuerdo a la metodología de la diferencia algebraica (Clutter *et al.*, 1983). A fin de ampliar la muestra y calidad de información se tomaron varias diferencias de edad de los análisis troncales, esto es, en lugar de tomar solo las alturas de una década para definir edad y altura, inicial y final respectivamente, se tomaron alturas con diferencias de 20, 30, 40 y 50 años cuando fuese posible. De esta forma la información se enriquece y se aumentó de 1659 a un total de 5038 observaciones. Otra ventaja de esta estrategia es que permite adicionar información para intervalos de proyección grandes de índice de sitio, con lo que es posible incluir polimorfismos en las trayectorias. Los ajustes se realizaron por cuadrados mínimos ordinarios (lineales o no lineales de acuerdo al modelo), usando los procedimientos REG y NLIN del sistema SAS.

Los modelos *ana-polimórficos* (7 y 9) y *poli-anamórficos* (10 y 11) se compararon contra los modelos anamórficos y polimórficos derivados del modelo de Schumacher (1939) y del modelo de Richards (Richards, 1959). En años recientes este último modelo se ha ampliado para mejorar sus ajustes (Ker y Bowling, 1991) y para definir índices de sitio polimórficos (Payendeh y Wang, 1994). También se ha usado para evaluar nuevos modelos de crecimiento en altura (Newnham, 1988; Ker y Bowling, 1991; Goelz y Burk, 1992; Payendeh y Wang, 1994; Meng *et al.*, 1997) de gran eficiencia. Para completar la comparación e incluir estos modelos más eficientes se usaron también las formas de tres parámetros del modelo de Richards definidas por Goetz y Burk (1992) y aquella de Payendeh y Wang (1994). A continuación se muestran los modelos utilizados:

Modelo anamórfico (Schumacher):

$$h_2 = \exp(\ln(h_1) + b(1/E_2 - 1/E_1))$$

Modelo polimórfico (Schumacher):

$$h_2 = \exp \left\{ a + [\ln(h_1) - a] \frac{E_1}{E_2} \right\}$$

Modelo anamórfico (Richards):

$$h_2 = h_1 \left[\frac{1 - e^{\beta_2 E_2}}{1 - e^{\beta_2 E_1}} \right]^{\beta_3}$$

Modelo polimórfico (Richards):

$$h_2 = \beta_1 (1 - e^{b E_2})^{\beta_3}$$

donde

$$b = E_1^{-1} \ln \left[1 - \left(\frac{h_1}{\beta_1} \right)^{1/\beta_3} \right]$$

Modelo polimórfico de Goetz y Burk (1992)

$$h_2 = h_1 \frac{1 - \exp \left[-\beta_1 \left(\frac{h_1}{E_1} \right)^{\beta_2} E_1^{\beta_3} E_2 \right]^{\beta_4}}{1 - \exp \left[-\beta_1 \left(\frac{h_1}{E_1} \right)^{\beta_2} E_1^{\beta_3} E_1 \right]}$$

Modelo polimórfico de Payandeh y Wang (1994)

$$h_2 = \beta_1 h_1^{\beta_2} (1 - e^{\beta_3 E_2})^{\nu}$$

donde:

$$\nu = \frac{\ln \left(\frac{h_1}{\beta_1 h_1^{\beta_2}} \right)}{\ln(1 - e^{-\beta_3 E_1})}$$

donde h_1 y h_2 representan altura inicial y final mientras que E_1 y E_2 representan edad inicial y final respectivamente.

Una vez ajustados los diferentes modelos se procedió a su validación; para ello se usó la información separada para tal fin. El análisis consistió de calcular valores de los estadísticos R^2 tanto para toda la muestra como para varias diferencias de edad. Este segundo análisis se realizó con el fin de identificar el efecto de la diferencia de edad en la predicción de la altura. El estadístico R^2 como sigue:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum (h_i - \hat{h}_i)^2}{\sum (h_i - \bar{h})^2}$$

donde:

h_i : altura real a la edad de proyección para la i -ésima observación.

\hat{h}_i : altura predicha a la edad de proyección para la i -ésima observación.

h : altura real promedio.

Resultados de la comparación

El Cuadro 2 muestra los resultados de los ajustes obtenidos para el grupo de especies 1, mientras que los Cuadros 3 y 4 presentan el mismo resumen de resultados para los grupos 2 y 3. Observe que en los tres cuadros las varianzas son aproximadamente de la misma escala, ello debido a que los modelos de escala y forma variable se ajustaron en su forma no lineal usando como variable dependiente la altura y no el logaritmo de esta variable, que es como lo muestran las ecuaciones (3), (5), (6) y (9). Adicionalmente es importante hacer notar que el modelo denominado curva guía corresponde al modelo (1) igualmente ajustado en su forma no lineal. Este último modelo se ajustó a fin de comparar los valores de los estimadores de a y b obtenidos con diferentes formas de índice de sitio.

Claramente el uso de varias diferencias de edad en el ajuste hizo que la tendencia de las curvas se adapte mejor a la forma polimórfica. Ello sin duda se debe a que a mayor diferencia de edad se capta mejor la variabilidad de forma de las curvas, obviamente este factor se ve amplificado por el uso de varias especies en cada grupo.

Para el primer grupo de especies los modelos compuestos ana-polimórfico y poli-anamórfico proporcionaron mejor ajuste que el modelo simple (anamórfico o polimórfico) e incluso que los modelos mejorados como el de Goetz y Burk (1992) o aquel de Payendeh y Wang (1994), mismos que tienen mayor cantidad de parámetros. Para este grupo el mejor modelo fue la forma polimórfica derivada del modelo de Richards. Asimismo se puede observar que para este grupo de especies e incluso para los demás grupos, las formas poli-anamórficas tuvieron mejor desempeño que las ana-polimórficas.

Los resultados tanto para el grupo 2 como para el grupo 3 fueron muy similares a aquellos obtenidos para el grupo 1; aunque para estos grupos la forma polimórfica derivada del modelo de Schumacher resultó con mejor ajuste que las formas compuestas e incluso mejor que la forma polimórfica derivada del modelo de Richards.

Cuadro 2. Estadísticos de bondad de ajuste para diferentes formas de las curvas de índice de sitio para el Grupo 1.

Curva guía	0.723	3.233	**	-45.182	**	6.123
anamórfica (Schumacher)	0.792	---	---	-44.493	**	5.564
polimórfica (Shumacher)	0.823	3.493	**	---	---	3.267
ana-polimórfica con cambio continuo	0.830	2.122	**	-50.600	**	3.167
ana-polimórfica con cambio discreto	0.841	3.831	**	-37.817	**	3.005
poli-anamórfica con cambio continuo	0.846	3.390	**	-21.997	**	2.927
poli-anamórfica con cambio discreto	0.866	3.5383	**	-59.037	**	2.598
anamórfica (Richards)	0.834	$\beta_2=-0.017$	**	$\beta_3=1.725$	**	3.445
polimórfica (Richards)	0.885	$\beta_1=27.010$	**	$\beta_3=2.009$	**	2.068
Goetz y Burk (1992)	0.490	---	---	---	---	11.94
Payandeh y Wang (1994)	0.843	---	---	---	---	2.72

† Para todos los modelos el estadístico R^2 corresponde al valor de R^2 ajustada.

†† **Indica alta significancia ($\alpha \leq 0.01$), * indica significancia ($\alpha \leq 0.05$) y NS indica estimador no significativo.

Un aspecto notable acerca de los modelos compuestos es que los estimadores fueron muy similares a aquellos obtenidos con la curva guía, esto es, son estimadores que se asemejan a la forma original del modelo que relaciona altura-edad. La figura 1 muestra la forma que adoptan dos modelos compuestos para el primer grupo de especies y usando como edad base 80 años. En esta figura se puede apreciar una diferencia notable entre las curvas ana-polimórficas y las poli-anamórficas. Las primeras conservan la tendencia de una función de crecimiento dado que su base es anamórfica, mientras que el cambio en forma solo es apreciable en el largo plazo (intervalos grandes). Por el contrario, las curvas poli-anamórficas tienen un cambio en forma en el corto plazo (intervalos pequeños) y adoptan la forma genérica de la función, en este caso, una función no decreciente (modelo de Shumacher).

La figura 2 muestra la tendencia de las curvas poli-anamórficas (discretas) para tres diferentes índices de sitio. Como se puede apreciar son curvas que muestran la tendencia general del modelo de Schumacher, sin embargo dan la impresión de tener un comportamiento discontinuo (mucha variación entre una y otra edad) al considerar la variación de forma y escala a la vez.

Cuadro 3. Estadísticos de bondad de ajuste para diferentes formas de las curvas de índice de sitio para el Grupo 2.

Curva guía	0.654	3.080	**	-41.010	**	7.134
anamórfica (Schumacher)	0.634	---	---	-38.981	**	6.883
polimórfica (Shumacher)	0.824	3.400	**	---	---	3.319
ana-polimórfica con cambio continuo	0.647	2.040	**	-50.384	**	6.670
ana-polimórfica con cambio discreto	0.734	3.559	**	-37.614	**	5.025
poli-anamórfica con cambio continuo	0.718	3.242	**	-18.475	**	5.32
poli-anamórfica con cambio discreto	0.758	3.422	**	-49.717	**	4.560
anamórfica (Richards)	0.707	$\beta_2=-0.014$	**	$\beta_3=1.448$	**	5.53
polimórfica (Richards)	0.825	$\beta_1=20.960$	**	$\beta_3=2.531$	**	3.318
Goetz y Burk (1992)	0.4486	---	---	---	---	9.135
Payandeh y Wang (1994)	0.848	---	---	---	---	3.168

† Para todos los modelos el estadístico R^2 corresponde al valor de R^2 ajustada.

†† **Indica alta significancia ($\alpha \leq 0.01$), * indica significancia ($\alpha \leq 0.05$) y NS indica estimador no significativo.

Cuadro 4. Estadísticos de bondad de ajuste para diferentes formas de las curvas de índice de sitio para el Grupo 3.

Curva guía	0.589	3.083	**	-40.685	**	8.192
anamórfica (Schumacher)	0.650	---	---	-40.317	**	7.427
polimórfica (Shumacher)	0.834	3.454	**	---	---	3.562
ana-polimórfica con cambio continuo	0.719	2.034	**	-54.816	**	5.973
ana-polimórfica con cambio discreto	0.761	3.415	**	-44.279	**	5.090
poli-anamórfica con cambio continuo	0.793	3.260	**	-17.983	**	5.465
poli-anamórfica con cambio discreto	0.750	3.439	**	-48.853	**	5.323
anamórfica (Richards)	0.673	$\beta_2=-0.023$	**	$\beta_3=1.824$	**	6.973
polimórfica (Richards)	0.806	$\beta_1=23.300$	**	$\beta_3=2.409$	**	4.123
Goetz y Burk (1992)	0.643	---	---	---	---	8.311
Payandeh y Wang (1994)	0.712	---	---	---	---	5.870

† Para todos los modelos el estadístico R^2 corresponde al valor de R^2 ajustada.

†† **Indica alta significancia ($\alpha \leq 0.01$), * indica significancia ($\alpha \leq 0.05$) y NS indica estimador no significativo.

Figura 1. Comparación entre curvas compuestas y una curva polimórfica

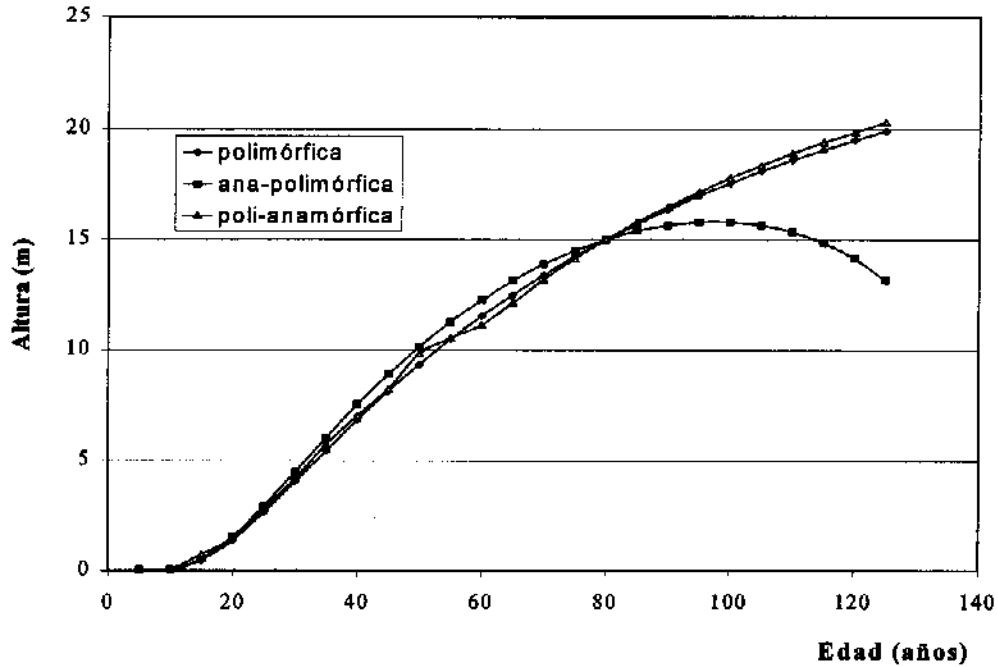
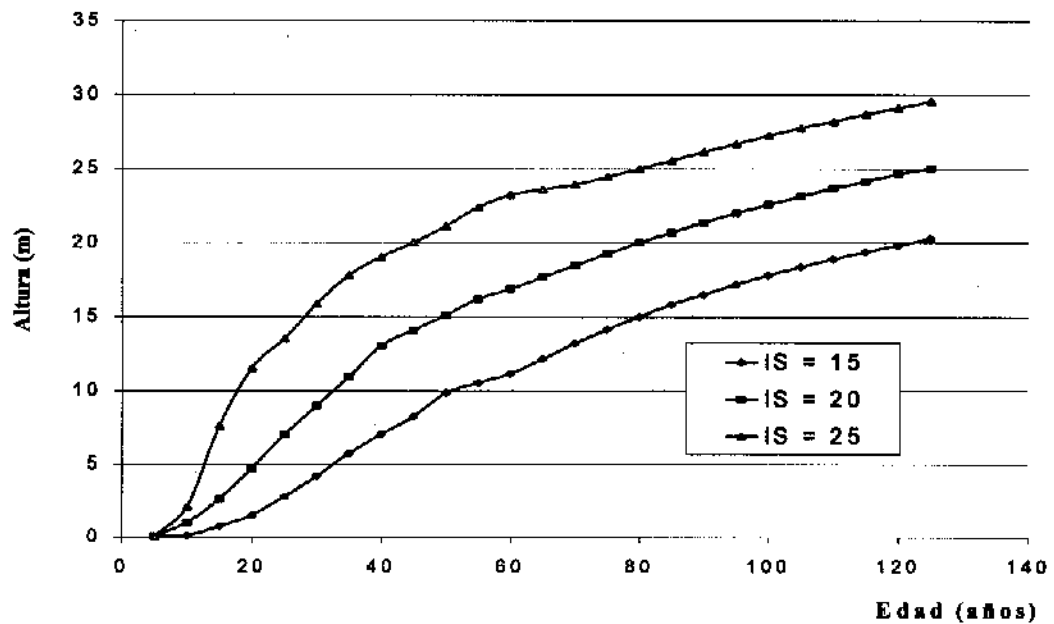


Figura 2. Comportamiento de tres curvas poli-anamórficas para el Grupo 1.



El desempeño de las diferentes formas de curvas en la predicción de índices de sitio se midió con una prueba de validación utilizando la base de datos previamente separada. El Cuadro 5 muestra los resultados de esta prueba de validación indicando solo el estadístico R^2 y para el grupo de especies 1. En este cuadro la columna denominada promedio denota que la prueba de validación se realizó con toda la muestra, esto es, con todas las diferencias de edad. Las columnas 10, 30 y 50 indican que la prueba de validación sólo se realizó para aquellos pares de datos (altura-edad) con 10, 30 y 50 años de diferencia

Como se puede apreciar, los modelos compuestos son bastante competitivos en términos de ajuste con respecto a los modelos tradicionales anamórficos o polimórficos. En la prueba es notable el gran desempeño que tienen los modelos mejorados de Goetz y Burk (1992) y el de Payendeh y Wang (1994), muy probablemente debido a que son modelos más parametrizados. Es importante notar que cuando las diferencias de edad son pequeñas, el modelo poli-anamórfico es muy eficiente, muy probablemente debido a que como se señaló, identifica las diferencias de forma en altura en rangos pequeños de edad. Una observación detenida al modelo ana-polimórfico muestra que este modelo mejora con respecto al poli-anamórfico en la medida que la diferencia de edad aumenta, lo cual corrobora lo que se había señalado anteriormente.

Cuadro 5. Valores de R^2 para la prueba de validación de proyecciones de altura para el Grupo 1.

Anamórfica (Schumacher)	0.537	0.853	0.238	0.084
Polimórfica (Shumacher)	0.643	0.880	0.522	0.359
Ana-polimórfica con cambio continuo	0.552	0.857	0.360	0.218
Ana-polimórfica con cambio discreto	0.590	0.859	0.409	0.362
Poli-anamórfica con cambio continuo	0.613	0.876	0.235	0.134
Poli-anamórfica con cambio discreto	0.646	0.889	0.231	0.155
Anamórfica (Richards)	0.537	0.853	0.290	0.071
Polimórfica (Richards)	0.626	0.873	0.476	0.310
Goetz y Burk (1992)	0.506	0.825	0.400	0.377
Payandeh y Wang (1994)	0.694	0.889	0.518	0.402

Payandeh y Wang (1994) mostraron que es muy importante realizar pruebas de validación de los modelos de índice de sitio considerando datos con varias diferencias de edad. El Cuadro 5 muestra que no sólo es necesario incluir varias diferencias de edad, sino que resulta importante evaluar los modelos por rangos de tales diferencias. De lo contrario se puede llegar a seleccionar un modelo poco robusto. Por ejemplo, considere los resultados del Cuadro 5, si la prueba de validación no hubiese incluido varias diferencias de edad, la forma poli-anamórfica hubiese sido una selección buena, sin embargo considerando diferencias más amplias de edad, es evidente que tal selección resulta inapropiada.

Una revisión más al Cuadro 5 muestra cierta intuición sobre la conveniencia de usar curvas anamórficas o polimórficas. Observe que en la medida en que la diferencia de edad es más pequeña las curvas poli-anamórficas son consistentemente más eficientes. Por el contrario, a medida que tal diferencia aumenta, las funciones ana-polimórficas se eficientan. Esto solo indica que cuando el intervalo de predicción de índices de sitio es pequeño son más importantes los cambios en forma que la tendencia general de la curva y *viceversa*, cuando el intervalo es grande, resulta de mayor importancia la tendencia general de la curva. Este resultado, derivado del análisis del Cuadro 5 no solo es lógico, sino que ha sido usado empíricamente; es común encontrar en la bibliografía recomendaciones sobre el uso de formas polimórficas para evaluar índices de sitio en plantaciones y el uso de formas anamórficas para la evaluación en poblaciones naturales (Clutter *et al.*, 1983).

Conclusiones

La integración del gradiente instantáneo o diferencial del parámetro que permanece constante al derivar una forma anamórfica o polimórfica de índice de sitio, permite derivar una función ana-polimórfica o poli-anamórfica dependiendo del gradiente que se incluya. Este tipo de funciones son bastante eficientes para estimar índices de sitio, comparadas con las funciones que tienen el mismo número de parámetros. Las formas poli-anamórficas predicen eficientemente índices de sitio cuando las diferencias de edad son pequeñas (menos de 10 años), mientras que las formas ana-polimórficas se hacen eficientes a medida que la diferencia de edad es mayor. Ambas formas compuestas permiten modificar en escala y forma la trayectoria típica de la función, permitiendo que se tenga más detalle en la evaluación. La prueba de validación mostró que es muy importante considerar la bondad de ajuste de los modelos con varios intervalos de edad.

Literatura Citada

- Clutter, J.L., J.C. Fortson, J.C. Piennar, L.V. Brister y R.L. Bailey. 1983. Timber management: A quantitative approach. Wiley New York 333 p.
- Fabbio, G., M. Frattegiani y M. CH. Manetti. 1994. Height estimation in stem analysis using second differences. *For. Sci.* 40(2):329-340.
- Goetz, J.C.G. y T.E. Burk. 1992. Development of a well-behaved site index equation: Jack pine in north central Ontario. *Can. J. For. Res.* 22:776-784.
- Hahn, T. y W.H. Carmean. 1982. Lake states site index curves formulated. USDA For. Serv. Gen. Tech. Rep. NC-88 5p.
- Ker, M.F. y C. Bowling. 1991. Polimorphic site index equations for four New Brunswick softwood species. *Can J. For. Res.* 21:728-732.
- Kiessling D., F.J. 1978, Análisis troncales, ejecución, aplicación actual y perspectivas. In: La investigación forestal en las Unidades Forestales y Organismos Descentralizados. Primera Reunión. Pub. Esp. No. 15 INIF, México. pp 9-54.
- Meng, Fan-Rui, Ch.H. Meng, S. Tang y P.A. Arp. 1997. A new height growth model for dominant and codominant trees. *For. Sci.* 43(3):348-354.
- Newnham R.M. 1988. A modification of the Ek-Payandeh nonlinear regression model for site index curves. *Can J. For. Res.* 18:115-120.
- Payandeh, B. 1977. Metric site index formulae for major Canadian timber species. *Bi-monthly Res. Notes.* 33(5):37-39.
- Payandeh, B. y Y. Wang. 1994. Relative accuracy of a new base-age invariant site index model. *For. Sci.* 40(2):341-3.
- Richards, F.J. 1959. A flexible growth function for empirical use. *J. Exp. Bot.* 10(29):290-300.

- Schumacher, F.X. 1939. A new growth curve and its application to timber yield studies. *J. Forestry*. 37(12):819-820.
- Stansfield, W.F., J.P. McTagle y R. Lacapa. 1991. Dominant height and site index equations for ponderosa pine in east central Arizona. *Can. J. For. Res.* 21:606-611.