

Las colecciones de Documentos de Trabajo del CIDE representan un medio para difundir los avances de la labor de investigación, y para permitir que los autores reciban comentarios antes de su publicación definitiva. Se agradecerá que los comentarios se hagan llegar directamente al (los) autor(es).

❖ D.R. © 1998, Centro de Investigación y Docencia Económicas, A. C., carretera México-Toluca 3655 (km. 16.5), Lomas de Santa Fe, 01210 México, D. F., tel. 727-9800, fax: 292-1304 y 570-4277. ❖ Producción a cargo del (los) autor(es), por lo que tanto el contenido como el estilo y la redacción son responsabilidad exclusiva suya.



NÚMERO 114

David Mayer y Jorge López López
**SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL PROBLEMA DE RAMSEY
MEDIANTE LA ECUACIÓN DEL CALOR**

Introducción

Los métodos de optimización intertemporal se utilizan ampliamente en la modelación económica. Entre las características de estos problemas se encuentra la no linealidad de las funciones utilizadas para modelar las preferencias de los agentes y de las funciones de producción. Consecuentemente, los problemas planteados normalmente no cuentan con soluciones analíticas. Uno de los recursos que se utiliza para simplificar el proceso de análisis de los modelos es el de la graficación. Sin embargo esta posibilidad se limita a un número muy pequeño de variables. Si bien los modelos de pocas variables son apreciados por su claridad, existen temas cuyo trato demanda la utilización de más variables. Un ejemplo es el estudio de la distribución, en que la economía se divide en subconjuntos de agentes cada uno de los cuales obtiene soluciones diferentes del mismo problema.

Los métodos numéricos ofrecen una aproximación al análisis de modelos más complejos (Bona y Santos, 1997). Dentro de este campo, se han estudiado aplicaciones sofisticadas de métodos numéricos de ecuaciones diferenciales (Judd, 1992; Kolbert, 1993). Una buena parte de la atención actual se dedica a la solución de problemas estocásticos (Santos y Vigo, 1997; Santos, 1997). Aún así, la mayoría de las aplicaciones contempla un número de variables relativamente limitado.

El tema que atrae nuestra atención central es el del desarrollo y crecimiento económico, por lo cual consideramos especialmente problemas como el de Ramsey,

$$\max \int_0^{\infty} u(c(t))e^{-\rho t} dt \quad (1)$$

$$\text{s.a. } k' = f(k) - (n + \delta)k - c, \quad (2)$$

$$k(0) = k_0, \quad (3)$$

donde u y f son convexas. Las condiciones de primer orden de este problema se pueden escribir como

$$c' = \frac{r - n - \rho}{\sigma} c, \quad (4)$$

$$0 = \lim_{t \rightarrow \infty} k(t) e^{\int_t^{\infty} (r(t) - n(t)) dt}, \quad (5)$$

donde $r = f'(k) - \delta$ es la tasa de interés. El problema se reduce a resolver las ecuaciones simultáneas (2), (4), junto con las condiciones de frontera (3), (5). En el Diagrama 1 se muestra el diagrama de fase del problema. Cuando se asumen las condiciones de Inada para f , es decir, $\lim_{k \rightarrow 0} f'(k) = \infty$, $\lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) = 0$, existe un único punto estable con coordenadas (k^*, c^*) dadas por

$$f'(k^*) = n + \rho + \delta, \quad c^* = f(k^*) - (n + \delta)k^*. \quad (6)$$

La peculiaridad de este problema radica en la inestabilidad de las soluciones con respecto a los valores iniciales de k ó c según t tiende a infinito, como se aprecia en el Diagrama 1, y en el hecho de que las condiciones de frontera se encuentran en cada extremo del intervalo $[0, \infty)$.

Son dos los métodos principales que se han utilizado para aproximar numéricamente las soluciones. El primero es el método de "shooting", (o disparos), en el que se experimenta con valores de c_0 hasta encontrar la solución que converge en algún tiempo T al punto de equilibrio. El segundo es el método de "eliminación del tiempo", en que se resuelve la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dk}{dc} = \frac{\frac{dk}{dt}}{\frac{dc}{dt}} = \frac{f(k) - (n + \delta)k - c}{\frac{r - n - \rho}{\sigma}c}, \quad (7)$$

tomando como punto inicial el de equilibrio, y utilizando una aproximación lineal a la ecuación en los primeros pasos (para deshacerse de la singularidad allí presente).

Ambos métodos presentan problemas al incrementar el número de variables. En el caso del método de disparos, la búsqueda del punto inicial se transforma, de un proceso que puede consistir del corte por la mitad sucesivo de intervalos, en una búsqueda de un punto en un conjunto multidimensional que requeriría de procesos bastante complicados de implementar. En el caso del método de eliminación del tiempo, la situación es similar. En lugar de existir una única dirección inicial relevante para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales, sería necesario realizar una búsqueda en un cono multidimensional, llevando a cabo un proceso análogo al del método de disparos, en que se intentaría llegar a las condiciones iniciales. De hecho, además de aumentar el número de variables, nos interesa introducir rezagos en las ecuaciones diferenciales, lo cual complicaría aún más el método de eliminación del tiempo.

El objetivo de este trabajo es aplicar al problema de Ramsey un método de solución numérica que se generalice fácilmente a un número mayor de variables. Transformamos el sistema de dos ecuaciones ordinarias de primer orden en una ecuación diferencial elíptica de segundo orden, para el cual son naturales las condiciones de frontera. Para la implementación numérica, convertimos el problema en una ecuación del calor cuasilineal. Encontramos que la implementación de un algoritmo implícito converge adecuadamente a la solución del problema, sin que la inestabilidad presente en tiempo t grandes afecte el proceso. Este método es perfectamente generalizable a mayores dimensiones. Obtenemos una ventaja adicional. Si aproximamos la solución sobre un intervalo de tiempo $[0, T]$, en $t = T$ podemos utilizar las condiciones de frontera de Neumann, $(dk/dt)|_{t=T} = 0$ para aproximarnos al punto de equilibrio sin tener que conocerlo de antemano.

Por último, desarrollamos un método para incluir restricciones de tipo

$$k(t) \geq k^{\min}(t) \quad (8)$$

en el problema (1). Nuestro interés es metodológico, ya que se presentarán este tipo de

condiciones, que representan restricciones de crédito, en problemas de distribución que analizaremos en trabajos posteriores.

Las siguientes secciones presentan el planteamiento analítico y numérico de segundo orden del modelo de Ramsey y el tratamiento de las restricciones; los resultados de la implementación numérica, y las conclusiones de este trabajo. Las demostraciones se encuentran en el apéndice.

Planteamiento de segundo orden del modelo de Ramsey

La ecuación de segundo orden

El sistema de ecuaciones de primer orden

$$k' = f(k) - (n + \delta)k - c, \quad (9)$$

$$c' = \frac{r - n - \rho}{\sigma}c, \quad (10)$$

puede escribirse como una ecuación de segundo orden

$$\begin{aligned} k'' &= f'(k)k' - (n + \delta)k' - c' \\ &= f'(k)k' - (n + \delta)k' - \frac{f'(k) - \delta - n - \rho}{\sigma}c \\ &= A(k', k), \end{aligned} \quad (11)$$

donde

$$A(k', k) = [f'(k) - (n + \delta)] \left[k' - \frac{1}{\sigma}c \right] + \rho c / \sigma, \quad (12)$$

$$c(k, k') = f(k) - (n + \delta)k - k'. \quad (13)$$

La ecuación (9) (en su versión (13)) define c en el caso de resolver la ecuación (11). Derivándola y restando (11) obtenemos

$$k'' - A(k', k) \geq 0 \Leftrightarrow c' - \frac{r - n - \rho}{\sigma}c \leq 0. \quad (14)$$

Utilizaremos las desigualdades posteriormente. Por lo pronto, el caso de igualdad implica que la ecuación de segundo orden es equivalente al sistema de primer orden.

Para el cálculo numérico utilizaremos la ecuación parabólica asociada

$$\frac{dk}{ds} = k'' - A(k', k). \quad (15)$$

Esta es una ecuación del calor cuasilineal con t como espacio y s como tiempo 'virtual'. Las condiciones de frontera deseadas en la solución son (3) y (5). Resultará de los

ejemplos numéricos que el problema (15) puede ser estable numéricamente en casos en que el problema (11) es inestable.

La implementación numérica

Para el cálculo numérico, restringimos el dominio al conjunto $[0, T]$ y utilizamos la primera y ya sea la segunda o la tercera de las siguientes condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} k(0) &= k_0, & (16) \\ \begin{cases} k(T) = k^* & \text{(Dirichlet),} \\ \frac{\partial k}{\partial t}(T) = 0 & \text{(Neumann).} \end{cases} & (17) \end{aligned}$$

Si bien la condición $\frac{\partial k}{\partial t}(T) = 0$ no es natural en el contexto del problema original (1), una vez planteadas las condiciones de primer orden resulta indicada para encontrar el punto de equilibrio. En el Diagrama 2 (que ilustra el caso $k_0 < k^*$) se observa la diferencia entre las soluciones Dirichlet y Neumann. La solución de Dirichlet debe pasar por debajo del punto de equilibrio (k^*, c^*) , pues de otro modo no podrá llegar al valor k^* . Recuérdese que la velocidad de movimiento a lo largo de las trayectorias es lenta cerca del punto de equilibrio, por lo que entre más grande sea T , más se aproximará la solución a la trayectoria buscada. En cambio, la solución de Neumann debe pasar a la izquierda del punto de equilibrio (k^*, c^*) , pues de otro modo k será creciente y su derivada no pasará por cero. Es interesante que entre ambas soluciones se acota la región en la que se encuentra la trayectoria buscada, que es la que tiende al punto de equilibrio.

Para definir las particiones sobre las que realizaremos la aproximación numérica, escogemos $M \in \mathbb{N}$, definimos $h_t = T/M$, y escogemos h_s . Describiremos un algoritmo iterativo (con variantes) mediante el cual definiremos k_i^j para $i = 0, \dots, M$, $j = 0, 1, 2, \dots$. Los valores k_i^j aproximarán $k(ih_t)$ según j tiende a infinito, y el algoritmo se detendrá cuando cierto criterio de convergencia sea satisfecho. Comenzamos el algoritmo con la inicialización de k_i^0 . En nuestro programa de cómputo utilizamos $k_i^0 = \frac{T-i}{T}k_0 + \frac{i}{T}k^*$, pero lo único que se requiere es $k_0^0 = k_0$. La versión explícita de la ecuación (15) es:

$$\frac{k_i^{j+1} - k_i^j}{h_s} = \frac{k_{i-1}^j - 2k_i^j + k_{i+1}^j}{h_t^2} - \hat{A}(k_{i+1}^j, k_i^j), \quad i = 1, \dots, M-1, \quad (18)$$

donde

$$\hat{A}(k_{i+1}^j, k_i^j) = [f'(k_i^j) - (n + \delta)] \left[\frac{k_{i+1}^j - k_i^j}{h_t} - \frac{1}{\sigma} c_i^j \right] + \rho c_i^j / \sigma, \quad (19)$$

$$c_i^j = f(k_i^j) - (n + \delta) k_i^j - \frac{k_{i+1}^j - k_i^j}{h_t}. \quad (20)$$

Elegimos la derivada delantera $k' \approx \frac{k_{i+1}^j - k_i^j}{h_t}$. Esencialmente se obtienen los mismos resultados cuando se utilizan $\frac{k_i^j \cdot k_{i-1}^j}{h_t}$ ó $\frac{k_{i+1}^j \cdot k_{i-1}^j}{2h_t}$. En este caso los nuevos valores de k se obtienen tomando

$$k_i^{j+1} = k_i^j + h_s \left(\frac{k_{i-1}^j - 2k_i^j + k_{i+1}^j}{h_t^2} - \hat{A}(k_{i+1}^j, k_i^j) \right), \quad i = 1, \dots, M-1. \quad (21)$$

En cambio, la discretización implícita es:

$$\frac{k_i^{j+1} - k_i^j}{h_s} = \frac{k_{i-1}^{j+1} - 2k_i^{j+1} + k_{i+1}^{j+1}}{h_t^2} - \hat{A}(k_{i+1}^j, k_i^j), \quad i = 1, \dots, M-1. \quad (22)$$

En este caso para obtener las nuevas k_i^{j+1} es necesario resolver el sistema lineal

$$\frac{k_i^{j+1}}{h_s} - \frac{k_{i-1}^{j+1} - 2k_i^{j+1} + k_{i+1}^{j+1}}{h_t^2} - \frac{k_i^j}{h_s} = \hat{A}(k_{i+1}^j, k_i^j), \quad i = 1, \dots, M-1. \quad (23)$$

A cualquiera de estos sistemas deben añadirse dos ecuaciones, las versiones discretas de las condiciones de frontera (3) y (5). Estas toman las siguientes formas:

$$k_0^{j+1} = k_0; \quad (24)$$

$$\begin{cases} k_M^{j+1} = k^* & \text{(Dirichlet),} \\ k_M^{j+1} - k_{M-1}^{j+1} = 0 & \text{(Neumann).} \end{cases} \quad (25)$$

La matriz asociada con este sistema lineal es tridiagonal de orden $M+1$. En las filas no fronterizas los componentes tridiagonales son:

$$\left(-\frac{1}{h_t^2}, \frac{1}{h_s} + \frac{2}{h_t^2}, -\frac{1}{h_t^2} \right). \quad (26)$$

La primera fila es $(1, 0, \dots, 0)$, mientras que la última fila es $(0, \dots, 0, 1)$ para el caso Dirichlet y $(0, \dots, 0, -1, 1)$ para el caso Neumann. El vector del lado derecho del sistema lineal es

$$\left(k_0, \frac{k_1^j}{h_s} - \hat{A}(k_2^j, k_1^j), \dots, \frac{k_{M-1}^j}{h_s} - \hat{A}(k_M^j, k_{M-1}^j), x \right),$$

donde $x = k_M$ en el caso Dirichlet y $x = 0$ en el caso Neumann.

Ya sea que se aplique el método implícito o el explícito, y para cualquiera de las condiciones de frontera, hemos descrito un algoritmo para obtener $(k_1^{j+1}, \dots, k_M^{j+1})$ a partir de (k_1^j, \dots, k_M^j) . Lo aplicamos para $j = 1, 2, 3, \dots$ hasta que llegue el momento de que la distancia $\max_{i=1, \dots, M} |k_i^{j+1} - k_i^j|$ tome un valor menor a alguna tolerancia τ ó hasta que j rebase algún límite preestablecido. Sea J el último valor de j para el que se realice el cálculo, si ha sido satisfecho el criterio de convergencia. Mostramos que k_i^J se aproxima a la solución del problema de Ramsey si $\tau \rightarrow 0$ y $T \rightarrow \infty$.

Teorema 1 *Supongamos que el conjunto de valores $\{k_0\} \cup \{k_i^J : i = 0, \dots, M\}$ está contenido en el interior de un intervalo cerrado I a su vez contenido en el do-*

minio de la función f' . Sea dada $\tau > 0$ suficientemente pequeña y supongamos que $\max_{i=1, \dots, M} |k_i^{j+1} - k_i^j| < \tau$, donde k_i^j resulta de cualquiera de los algoritmos descritos. Supongamos además que los números utilizados en el cálculo numérico tienen precisión mejor que τ . Existe alguna constante C independiente de τ , y T suficientemente grande tal que

$$\max_{i=0, \dots, M} |k^R(ih_t) - k_i^j| < C(\tau + h_t), \quad (27)$$

donde k^R es la solución al problema de Ramsey (1).

Las demostraciones se encuentran en el apéndice.

Implementación de la restricción $k \geq k^{\min}$.

Al introducir la restricción mencionada en el problema de Ramsey, la condición de primer orden (4) se convierte: $\exists \eta(t) \geq 0$ tal que

$$\begin{cases} c' = \frac{r - n - \rho}{\sigma} c & \text{si } \eta = 0, \\ c = f(k) - (n + \delta)k, c' > \frac{r - n - \rho}{\sigma} c & \text{si } \eta > 0. \end{cases} \quad (28)$$

Sea $k_i^{\min} = \text{Aprox}(k^{\min}(ih_t))$, $i = 0, \dots, M$, donde Aprox es una función monótonica bajo la cual los números reales son representados en la máquina. Supondremos que existe $k_{\infty}^{\min} = \lim_{t \rightarrow \infty} k^{\min}$. Las funciones auxiliares k^D, k^N que utilizaremos para aproximar la solución al problema de Ramsey con restricciones serán ahora las que satisfacen la ecuación diferencial (11), las condiciones $k^D, k^N \geq k^{\min}$, junto con las condiciones de frontera

$$k^X(0) = \max[k_0, k^{\min}(0)], \quad X \in \{D, N\}, \quad (29)$$

$$\begin{cases} k^D(T) = \max[k^*, k^{\min}(T)] & \text{(Dirichlet),} \\ \frac{\partial k^N}{\partial t}(T) = 0 \text{ si } k^N(T) > k^{\min}(T) & \text{(Neumann).} \end{cases} \quad (30)$$

Modificamos los algoritmos presentados en la sección anterior introduciendo el siguiente cambio: después de definir o calcular k_i^j (para $j \geq 0$), la sustituimos con $\max(k_i^j, k_{\min}^j)$.

Teorema 2 *Tómemos las mismas hipótesis que en el Teorema 1, excepto que ahora k_i^j se obtiene por cualquiera de los algoritmos modificados. Existe alguna constante C independiente de τ , y T suficientemente grande tal que*

$$\max_{i=0, \dots, M} |k^S(ih_t) - k_i^j| < C(\tau + h_t), \quad (31)$$

donde k^S es la solución al problema de Ramsey (1) junto con la restricción (8).

Resultados

Implementamos los algoritmos descritos en un programa Windows que permite entrada y salida de parámetros y resultados a hoja de cálculo. Observamos que los algoritmos convergen a las soluciones siempre y cuando se escojan h_t , h_s suficientemente pequeñas. Debe tomarse en cuenta que el problema es no lineal, y que aún en el caso en que no se utilizan las restricciones $k \geq k^{\min}$ se tienen las restricciones implícitas en los dominios de f y de $(f_k)^{-1}$. La práctica demostró que si no es suficientemente pequeña h_s se desestabilizan los algoritmos. En el caso lineal el método implícito es estable, mientras que el explícito no lo es. Asimismo en nuestro caso demostró su superioridad el método implícito, convergiendo mucho más rápidamente y demostrando más estabilidad.

Escogimos para el modelo de Ramsey las siguientes funciones de utilidad y de producción:

$$u(c) = \frac{c^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}, \quad f(k) = A \left[\frac{1}{3}k^\phi + \frac{2}{3} \right]^{1/\phi}$$

(en el caso $\phi = 0$, $f(k) = Ak^{1/3}$ mientras que si $\phi \rightarrow -\infty$, $f(k) \rightarrow A \min[k, 1]$). Escogimos los parámetros siguientes para las simulaciones: $n = 0.02$, $\rho = 0.03$, $\sigma = 0.7$ ó 3.0 , $\delta = 0.04$. Estos son valores que se consideran usuales para los parámetros, definidos sobre una base anual. Para obtener soluciones con valores iniciales de capital k_0 por debajo y por arriba del nivel de equilibrio k^* , escogimos los niveles iniciales $\frac{1}{10}k^*$ y $\frac{3}{2}k^*$ (que llamaremos Problemas 1 y 2 respectivamente).

Reportamos varios conjuntos de corridas experimentales. En todos los casos utilizamos $\tau = 10^{-6}$. Esto significa que los errores de las soluciones se deben principalmente al grosor de la malla h_t , que no fue escogido demasiado pequeño. Significa también que el resultado del algoritmo, dada h_t , es prácticamente independiente de h_s , pues las determinantes del resultado son las ecuaciones satisfechas al final del algoritmo, no el camino de llegada. Los resultados de las corridas correspondientes a $\sigma = 0.7$ y $\sigma = 3.0$ fueron similares y reportamos solamente las correspondientes a $\sigma = 0.7$.

En el primer conjunto de corridas que reportamos, comparamos el desempeño de los métodos implícito y explícito. Utilizamos $T = 50$, $h_t = 1$, $\phi = 0$, y, en su caso, $k_{\min} = \frac{1}{2}k^* + \frac{1}{2}k_0$ (Problema 1) ó $k_{\min} = \frac{2}{3}k^* + \frac{1}{3}k_0$ (Problema 2). Utilizamos ambas condiciones de frontera. En la Tabla 1 se aprecia la superioridad del método implícito. El método explícito requirió $h_s = \frac{1}{3}$ para su estabilidad, lo cual contribuyó (como se verá más abajo) a que el número de iteraciones necesarias para converger fuera mucho mayor. El caso implícito fue estable con $h_s = 10$ (no necesariamente el que minimiza el número de iteraciones) y convergió mucho más pronto. (Señalamos que en el caso del Problema 1 la aplicación de la restricción $k \geq k_{\min}$ constituye en realidad un ejercicio formal, pues la economía recibe una dotación de capital si no satisface la restricción inicialmente.)

Las corridas restantes solamente utilizan el método implícito, debido a su superioridad.

En el segundo conjunto de corridas utilizamos $T = 50$, $\phi = 0$, la condición inicial del problema 2 y la condición de frontera de Dirichlet. Comparamos soluciones con varios valores de h_t , a saber, 5, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$. Se observa en los Gráficos 1 y 2 el aumento de precisión con el descenso de h_t . Los errores tienden a concentrarse en los períodos iniciales. Para $h_t = 0.5$ los errores son del orden de 1%. En el Gráfico 3 mostramos las iteraciones J necesarias para llegar al criterio de convergencia establecido por τ . J resultó ser casi independientes de h_t , por lo cual el costo en operaciones de hacer más fino este parámetro es aproximadamente lineal en el rango de tiempo observado. En el Gráfico 4 observamos que $h_s J$ se mantiene aproximadamente constante mientras h_s sea suficientemente pequeña para obtener la convergencia. Esto se debe a que, mientras esté bien aproximado, el recorrido que tiene que hacer la ecuación del calor en su tiempo virtual s es invariante. Si h_s es incrementada demasiado ($h_s = 100$ en estas corridas) se empieza a dificultar la convergencia, lo cual se observa en el incremento del recorrido $h_s J$, llegando a la inestabilidad. Así, el mínimo número de iteraciones se encuentra cerca de valores de h_s para los cuales el algoritmo sería inestable.

Cuando $h_s \rightarrow \infty$ la solución de la aproximación numérica de la ecuación del calor (18) ó (23) tiende a la solución de una aproximación numérica correspondiente del problema elíptico (11). Sin embargo, observamos en los cálculos numéricos que, debido a la no linealidad de f , cuando h_s crece, el sistema numérico se desestabiliza. Esto significa que para el cálculo numérico es superior la ecuación del calor a su problema elíptico correspondiente.

El tercer conjunto de corridas que reportamos resuelve los problemas 1 y 2 para $T = 50, 200, 500$ y 1000 , $\phi = 0$, con $h_t = h_s = 1$. Aquí el objeto es estudiar que tan grande debe de ser T para que la trayectoria se aproxime a la solución del problema de horizonte infinito. En el Gráfico 5 se muestran las soluciones sobre el espacio de fase. Vemos aquí la versión numérica del Diagrama 2. Las soluciones que más se separan de las demás corresponden a $T = 50$; les siguen las de $T = 200$. Las soluciones para $T = 500$ y $T = 1000$ prácticamente coinciden sobre la gráfica para ambos problemas y ambas condiciones de frontera. Observamos por una parte que el algoritmo funciona perfectamente con diversas condiciones de frontera, y por otra que se requiere calcular sobre un intervalo de tiempo muy largo (las unidades de medida son años) para aproximarse a la trayectoria óptima. En el Gráfico 6 mostramos la calidad de la aproximación para $T = 500$, en base a la comparación de las soluciones con condiciones de frontera de Dirichlet y de Neumann, entre las cuales se encuentra la trayectoria buscada. En $t = 500$, por ejemplo, las diferencias entre las dos soluciones son del orden de 3×10^{-5} en consumo y de 2×10^{-4} en capital.

El cuarto conjunto de corridas que reportamos resuelve los problemas 1 y 2 (para ambos tipos de condición de frontera) para $\phi \in \{-1.0, -0.8, \dots, 0.8\}$. Estos problemas se resolvieron con $T = 1000$ (excepto para los casos señalados en la Tabla 2, para los

cuales se tuvo que incrementar T para que la aproximación final al valor de equilibrio de k fuera aceptable). En este conjunto de corridas para cada ϕ se multiplicó A por un factor tal que el valor de equilibrio del capital fuera el mismo que para la Cobb-Douglass¹ con $A = 3.3$. Los factores correspondientes y las iteraciones necesarias para la convergencia se reportan en la Tabla 2. En los Gráficos 7 y 8 se observan las soluciones a los problemas 1 y 2 para diferentes valores de ϕ . (El primer caso, $\phi = -1$, se dibuja con una línea más gruesa; los demás casos le siguen en orden en el plano de fase.) Los niveles de equilibrio del consumo son diferentes en cada caso, por lo cual han sido normalizados con referencia al nivel de equilibrio. Esto permite observar qué tanto cambia el consumo para funciones de producción con elasticidades de sustitución entre capital y trabajo diferentes. Entre más sustituible es el trabajo con capital, más crece el consumo a lo largo de las trayectorias de equilibrio. Inclusive puede resultar óptimo disminuirlo para acumular capital.

Conclusiones

El principal aporte de este artículo es un nuevo método para el cálculo numérico del problema de Ramsey. Este se basa en convertir su sistema de dos ecuaciones de primer orden en una ecuación elíptica de segundo orden, la cual se resuelve numéricamente en base a la ecuación del calor correspondiente.

Este método resulta funcional aún en la presencia del punto inestable en la frontera $t = T$ del intervalo de aproximación, característica incluíble del problema de Ramsey.

Si bien no hemos demostrado la necesidad de la convergencia de nuestros algoritmos (para lo cual se utilizarían los métodos de las ecuaciones parabólicas cuasilineales), hemos demostrado, en la práctica, que el método converge y, teóricamente, que si converge lo hace a la única solución. La convergencia sucede para valores adecuados de h_0 , y tiende a desaparecer cuando esta crece. Esto muestra las ventajas de la ecuación del calor sobre su versión elíptica. Asimismo hemos demostrado la superioridad del método implícito, lo cual no es sorprendente en vista de sus propiedades de estabilidad en el caso lineal.

Además de las ventajas que presenta el método de la ecuación del calor debido a sus posibilidades de generalización a modelos de más variables y restricciones, debemos subrayar las que presentan las condiciones de frontera (en $t = T$) que permiten utilizar las ecuaciones de segundo orden. En particular, la condición de Neumann permite calcular la trayectoria óptima sin conocer los niveles de equilibrio del estado estacionario. Esto revestirá una mayor importancia en el caso en que se reuelvan numéricamente modelos con más variables y restricciones.

¹ Para cada $\phi > 0$ la igualdad $f'(k) = n + \rho + \delta$ para $k = k_0^*$ (el nivel de equilibrio correspondiente a $\phi = 0$) garantiza que existe un equilibrio estable y que el modelo no es uno de crecimiento endógeno.

Cabe mencionar que la longitud del período de tiempo (más de docientos años) que es necesario considerar para obtener buenas aproximaciones a la trayectoria óptima es un elemento que puede poner en duda la fundamentación del modelo de Ramsey en la racionalidad de los agentes.

Apéndice

Demostración del Teorema 1. Existe una única solución k^R al problema de Ramsey, y esta satisface $\lim_{t \rightarrow \infty} k^R = k^*$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dk^R}{dt} = 0$. Por lo tanto existe alguna T , suficientemente grande, tal que $|k^R(T) - k^*| < \tau$, $\left| \frac{dk^R}{dt}(T) \right| < \tau$. En el intervalo $[0, T]$, k^R obedece la ecuación diferencial (11). Sustituyamos para efectos de la demostración f con una extensión suave que aproxime la extensión lineal de f fuera de I . De esta forma f tiene derivadas acotadas. Entonces a partir de resultados estándares de la teoría de ecuaciones de segundo orden sobre el intervalo $[0, T]$ se obtienen soluciones k^D y k^N de (11) con condiciones de frontera (16), (17) de Dirichlet y de Neuman respectivamente. Tenemos para $X \in \{D, N\}$

$$\begin{aligned} \left| [k^R - k^X]'' \right| &= |A(k^R, k^R) - A(k^X, k^X)| \\ &\leq A_1 \left| [k^R - k^X]' \right| + A_2 |k^R - k^X|, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\left| [k^R - k^X]' \right| \leq A_1 \left| [k^R - k^X]' \right| + A_2 |k^R - k^X|, \quad (33)$$

donde A_1, A_2 son constantes que dependen de las cotas de las derivadas de la función A . Además, por construcción,

$$|k^D(T) - k^R(T)| < \tau, \left| \frac{dk^R}{dt}(T) - \frac{dk^N}{dt}(T) \right| < \tau. \quad (34)$$

De aquí se obtienen estimativas

$$\max_{[0, T]} |k^R(t) - k^X(t)| < C_1 \tau. \quad (35)$$

Analizando ahora las soluciones numéricas, debido a que la función \hat{A} es suave en C , puede demostrarse, ya sea a partir de (21) o de (22), y ya sea que se utilice un método implícito o explícito, que existe una constante C_2 tal que

$$\max_{i=0, \dots, M} \left| \frac{k_{i-1}^J - 2k_i^J + k_{i+1}^J}{h_t^2} - \hat{A}(k_{i+1}^J, k_i^J) \right| < C_2 \tau, \quad (36)$$

$$|k_0^J - k_0| < \varepsilon, |k_M^J - k^*| < \varepsilon \quad (\text{Dirichlet}), \quad (37)$$

$$|k_0^J - k_0| < \varepsilon, \left| \frac{k_M^J - k_{M-1}^J}{h_t} \right| = 0 \quad (\text{Neumann}), \quad (38)$$

donde $\varepsilon < \tau$ es la precisión de los números utilizados por la máquina. Resultados bien conocidos del cálculo numérico de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden implican que existe una constante C_3 tal que

$$\max_{i=0, \dots, M} |k_i^J - k^X(ih_t)| < C_3(\tau + h_t), \quad (39)$$

donde X es D ó N según el caso. Utilizando (35), se obtiene (27). ■

Demostración del Teorema 2. Existe una única solución k^S al problema de Ramsey con restricción. (33). Esta satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k^S = \max(k^*, k_{\infty}^{\min}), \quad k^* > k_{\infty}^{\min} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dk^S}{dt} = 0. \quad (40)$$

Si $k^* \neq k_{\infty}^{\min}$, sea $\tau < |k^* - k_{\infty}^{\min}|$. Existe alguna T , suficientemente grande, tal que

$$\begin{cases} \left| \frac{dk^S}{dt}(T) \right| < \tau, & \text{si } k^* > k_{\infty}^{\min}, \\ |k^S(T) - k_{\infty}^{\min}| < \tau, & \text{si } k^* \leq k_{\infty}^{\min}. \end{cases} \quad (41)$$

Debido a (28) y (14), en el intervalo $[0, T]$, k^S obedece una de las condiciones las condiciones

$$\begin{cases} k > k^{\min}, & k'' - A(k', k) = 0, \\ k = k^{\min}, & k'' - A(k', k) \leq 0. \end{cases} \quad (42)$$

Sustituimos en la demostración f con una extensión suave que aproxime la extensión lineal de f fuera de I . De esta forma f tiene derivadas acotadas. Entonces utilizando la teoría de ecuaciones de segundo orden en el contexto de restricciones, se obtienen sobre el intervalo $[0, T]$ soluciones únicas k^D y k^N de (42) con condiciones de frontera

$$\begin{cases} k^D(T) = \max(k^*, k_{\infty}^{\min}) & \text{(Dirichlet),} \\ \begin{cases} \frac{dk^N}{dt}(T) = 0 & \text{si } k^* > k^{\min}(T), \\ k^N(T) = k^{\min}(T) & \text{si } k^* \leq k^{\min}(T), \end{cases} & \text{(Neumann).} \end{cases}$$

Las condiciones de frontera de estas soluciones se encuentran cerca de las de k^S por construcción. Utilizando estimativas semejantes a (33) y tomando en cuenta (42) puede demostrarse que

$$\max_{[0, T]} |k^S(t) - k^X(t)| < C_1 \tau. \quad (43)$$

Analizando ahora las soluciones numéricas, debido a que la función \hat{A} es suave en C , puede demostrarse, ya sea a partir de (21) o de (22), y ya sea que se utilice un método implícito o explícito, que existe una constante C_2 tal que

En lugar de (36) obtendremos ahora, si al algoritmo converge,

$$\begin{cases} \left| \frac{k_{i-1}^J - 2k_i^J + k_{i+1}^J}{h_i^2} - \hat{A}(k_{i+1}^J, k_i^J) \right| < C_2 \tau & \text{si } k_i^J > k_i^{\min} \\ \frac{k_{i-1}^J - 2k_i^J + k_{i+1}^J}{h_i^2} - \hat{A}(k_{i+1}^J, k_i^J) < 0 & \text{si } k_i^J = k_i^{\min} \end{cases}$$

$$|k_0^J - k_0| < \varepsilon,$$

$$\begin{cases} |k_M^J - \max(k_M^{\min}, k^*)| < \varepsilon, & \text{(Dirichlet),} \\ k_M^J \geq k_{\infty}^{\min}, \quad k_M^J > k_M^{\min} \Rightarrow k_M^J - k_{M-1}^J = 0 & \text{(Neumann),} \end{cases}$$

Si siguiendo las técnicas usuales del cálculo numérico de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, soluciones de la ecuación del calor implican que existe una

constante C_3 tal que

$$\max_{i=0, \dots, M} |k_i^J - k^X(ih_t)| < C_3(\tau + h_t), \quad (44)$$

donde X es D ó N según el caso. Utilizando (43), se obtiene (31). ■

Referencias

- [1] Jerry L. Bona and Manuel S. Santos (1997), "On the Role of Computation in Economic Theory", *Journal of Economic Theory* 72, 241-281.
- [2] Kenneth L. Judd (1992), "Projection Methods for Solving Aggregate Growth Models", *Journal of Economic Theory* 58, 410-452.
- [3] William C. Kolbert (1993), "Quick and Easy Optimal Approach Paths for Non-linear Natural Resource Models", Optimal Approach Paths for Resource Models, *American Journal of Agricultural Economics* 75 (August) 685-695 American Agricultural Economics Association.
- [4] Manuel S. Santos, Jesús Vigo (1997), "Analysis of a Numerical Dynamic Programming Algorithm Applied to Economic Models", First version, September 1995, this version, February 1997.
- [5] Manuel S. Santos (1997), "Numerical Solution of Dynamic Economic Models", Centro de Investigación Económica, ITAM, Preliminary versión (july 16, 1997). Paper prepared for the Handbook of Macroeconomics, J.B. Taylor and M. Woodford (eds.), Elsevier.

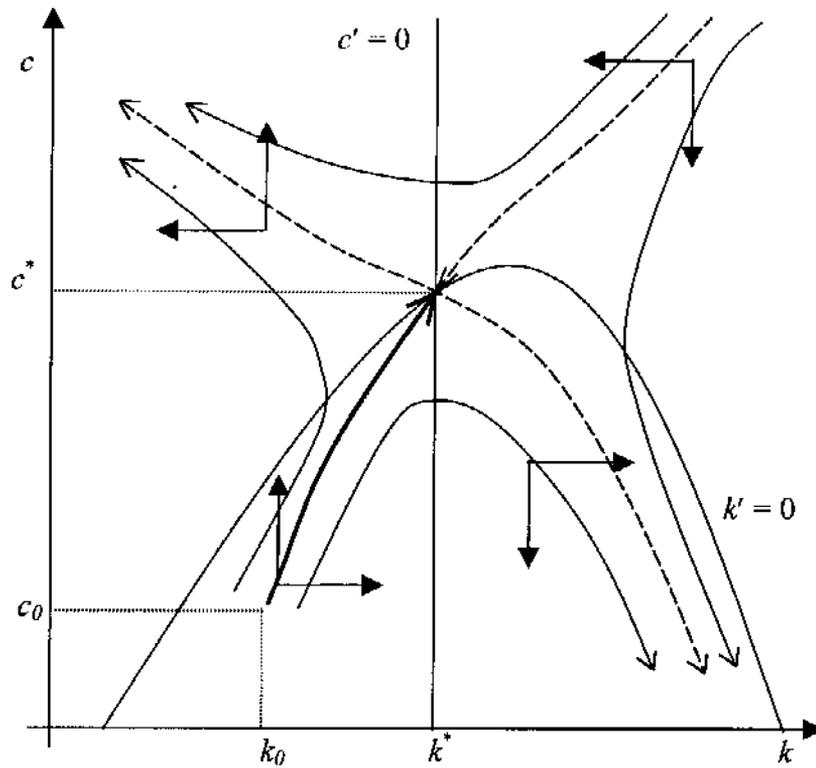


Diagrama 1. Espacio de fase y solución del problema de Ramsey.

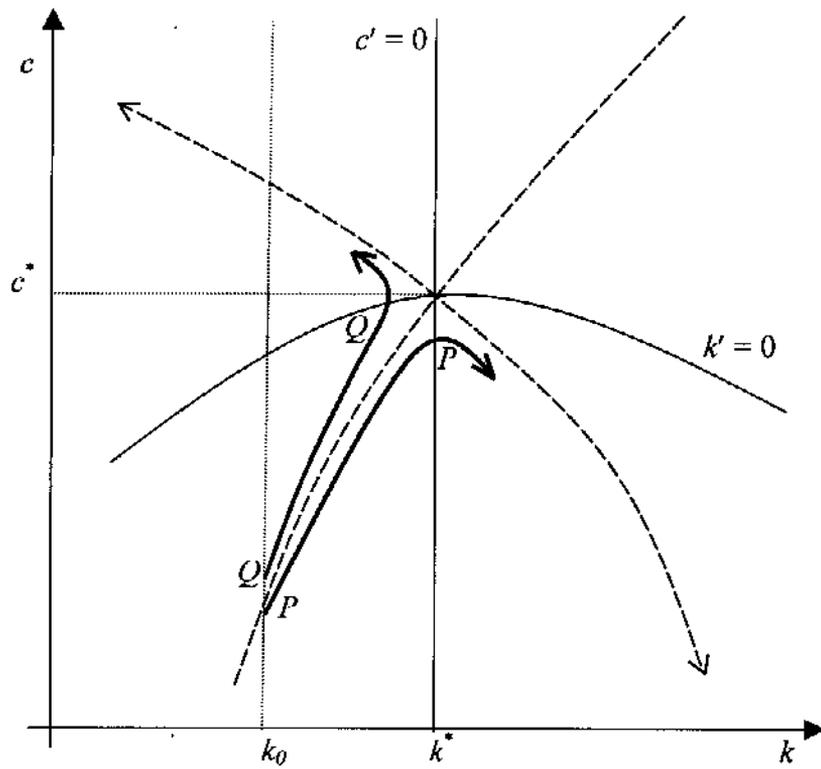


Diagrama 2. Las soluciones de Dirichlet (PP) y de Neuman (QQ).

Método	Restricción $k \geq k_{\min}$	Número de Iteraciones para converger			
		Condiciones de frontera de Dirichlet en el Problema:		Condiciones de frontera de Neumann en el Problema:	
		1	2	1	2
Implicito ($h_s = 10$)	Sin	59	65	67	70
	Con	62	31	69	31
Explicito ($h_s = 1/3$)	Sin	1470	1597	1681	1730
	Con	1516	635	1709	635

Tabla 1. Comparación del número de iteraciones utilizadas para converger en los métodos implícito y explícito. ($T = 50$, $h_t = 1$, $\phi = 0$.)

ϕ	Número de Iteraciones para converger				Factor aplicado a A para tener el mismo capital de equilibrio k^*
	Condiciones de frontera de Dirichlet en el Problema:		Condiciones de frontera de Neumann en el Problema:		
	1	2	1	2	
-1.00	70	12	70	12	67.64
-0.80	47	14	47	14	29.80
-0.60	29	42	29	42	12.90
-0.40	75	107	75	107	5.48
-0.20	194	272	194	272	2.32
0.00	529	719	529	719	1.00
0.20	1561	2035	1561	2035	0.46
0.40	4973	746*	4973	746*	0.24
0.60	309**	1290**	309**	1307**	0.15
0.80	898***	1250***	1284***	1262***	0.11

Tabla 2. Número de Iteraciones necesarias para la convergencia y factor aplicado a A en las corridas correspondientes a los Gráficos 7 y 8. ($T = 1000$, $h_t = 1$, $h_s = 1$.)

- * $T = 1,000$, $h_t = 1$, $h_s = 10$.
- ** $T = 2,000$, $h_t = 2$, $h_s = 20$.
- *** $T = 4,000$, $h_t = 4$, $h_s = 100$.

Precisión del cómputo al variar el incremento h de tiempo

Gráfico 1

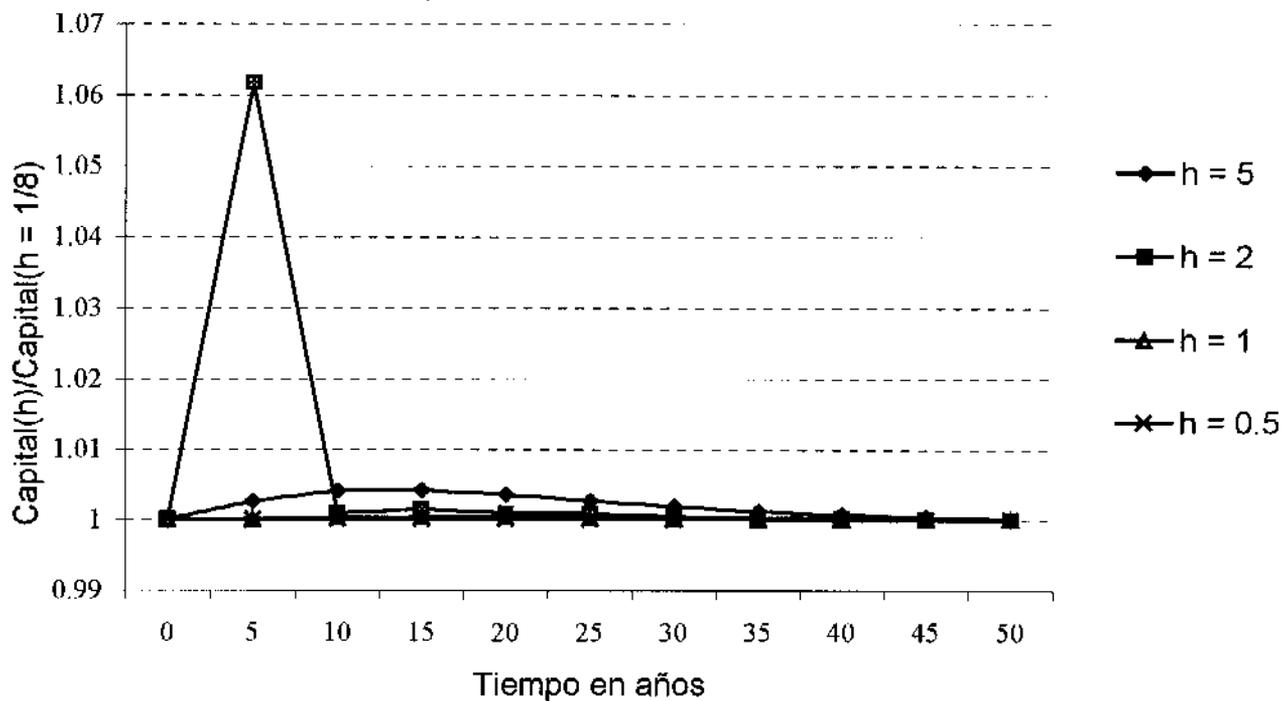
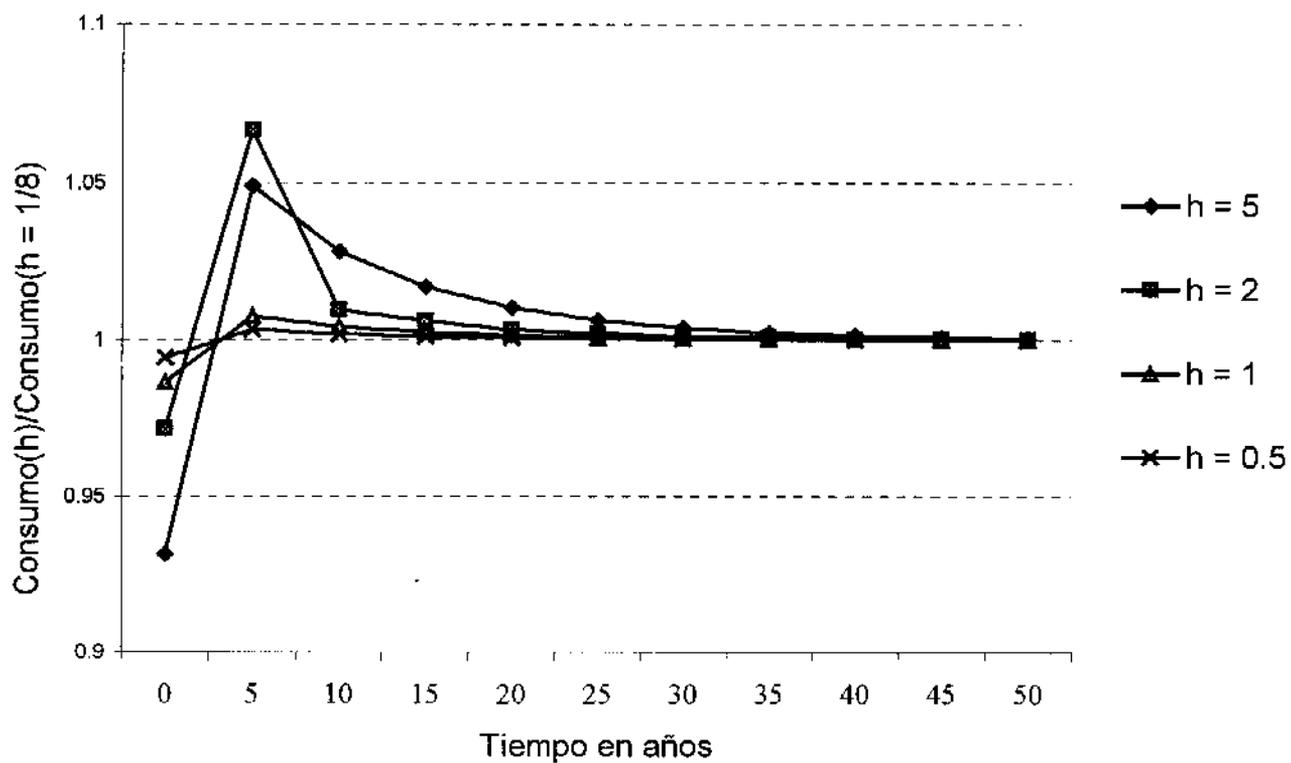


Gráfico 2



Iteraciones del algoritmo para alcanzar la convergencia

Gráfico 3

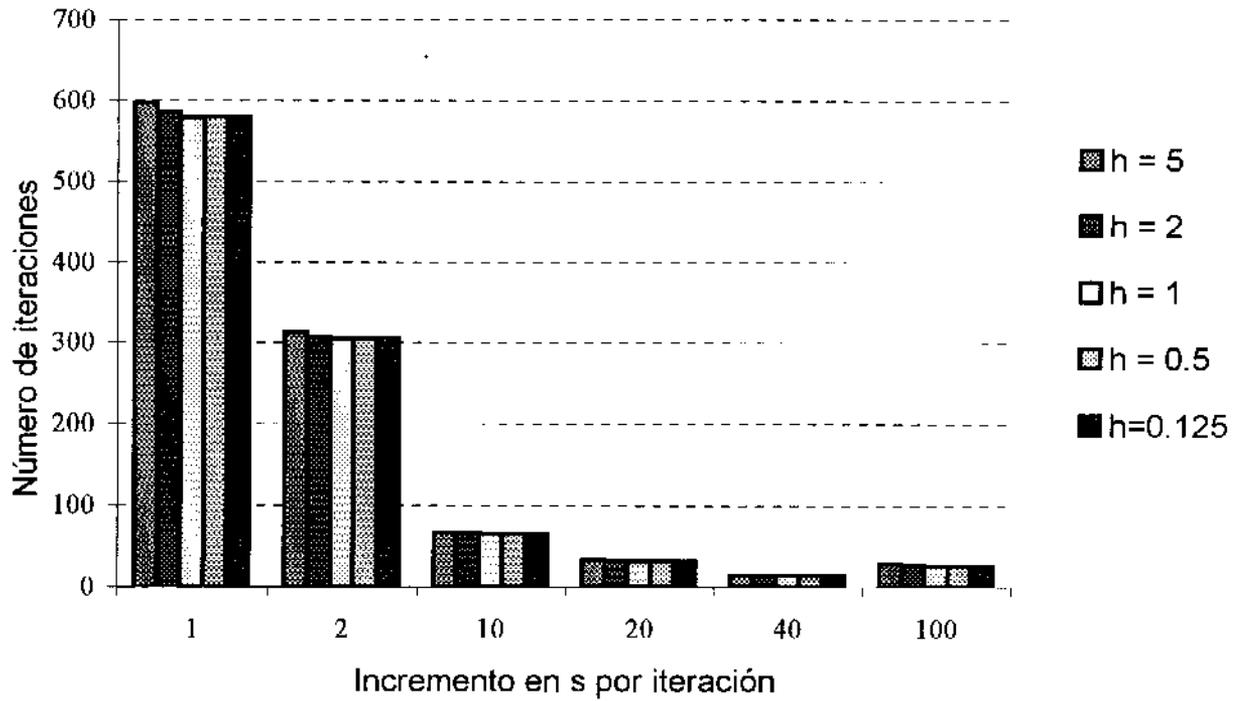
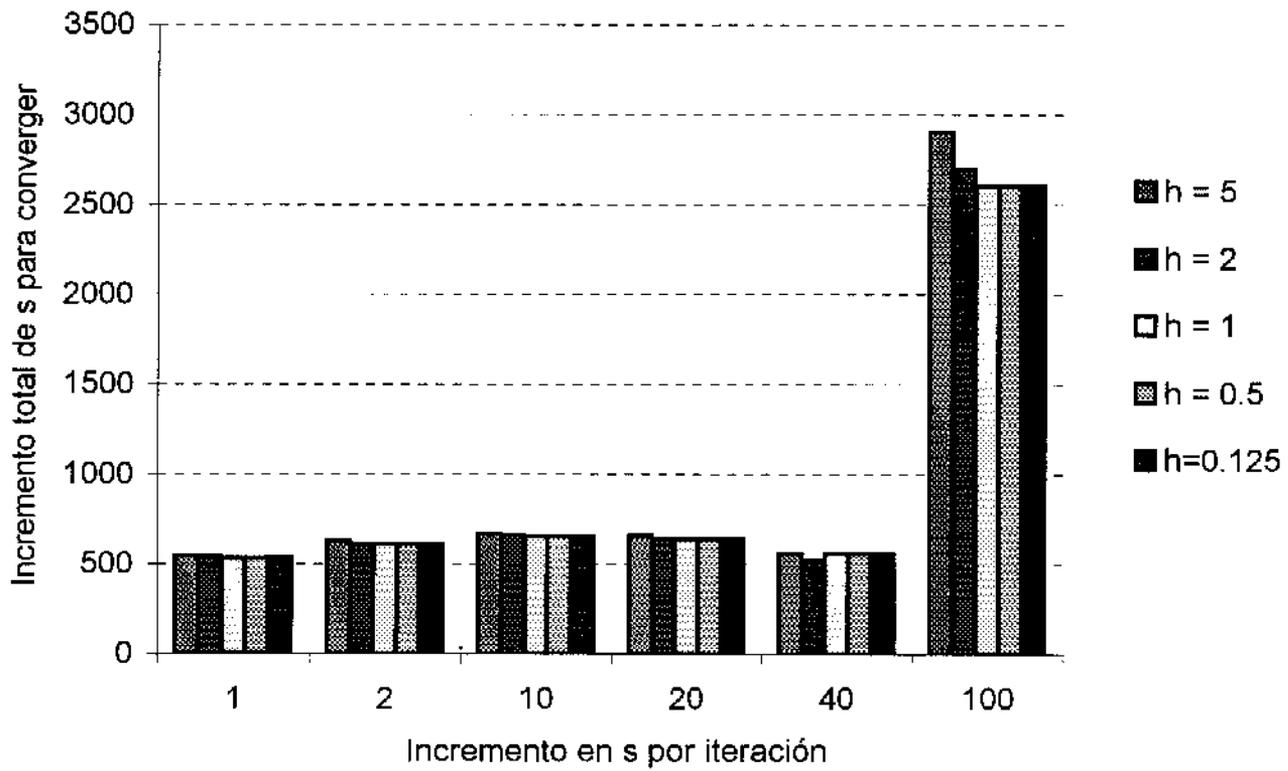
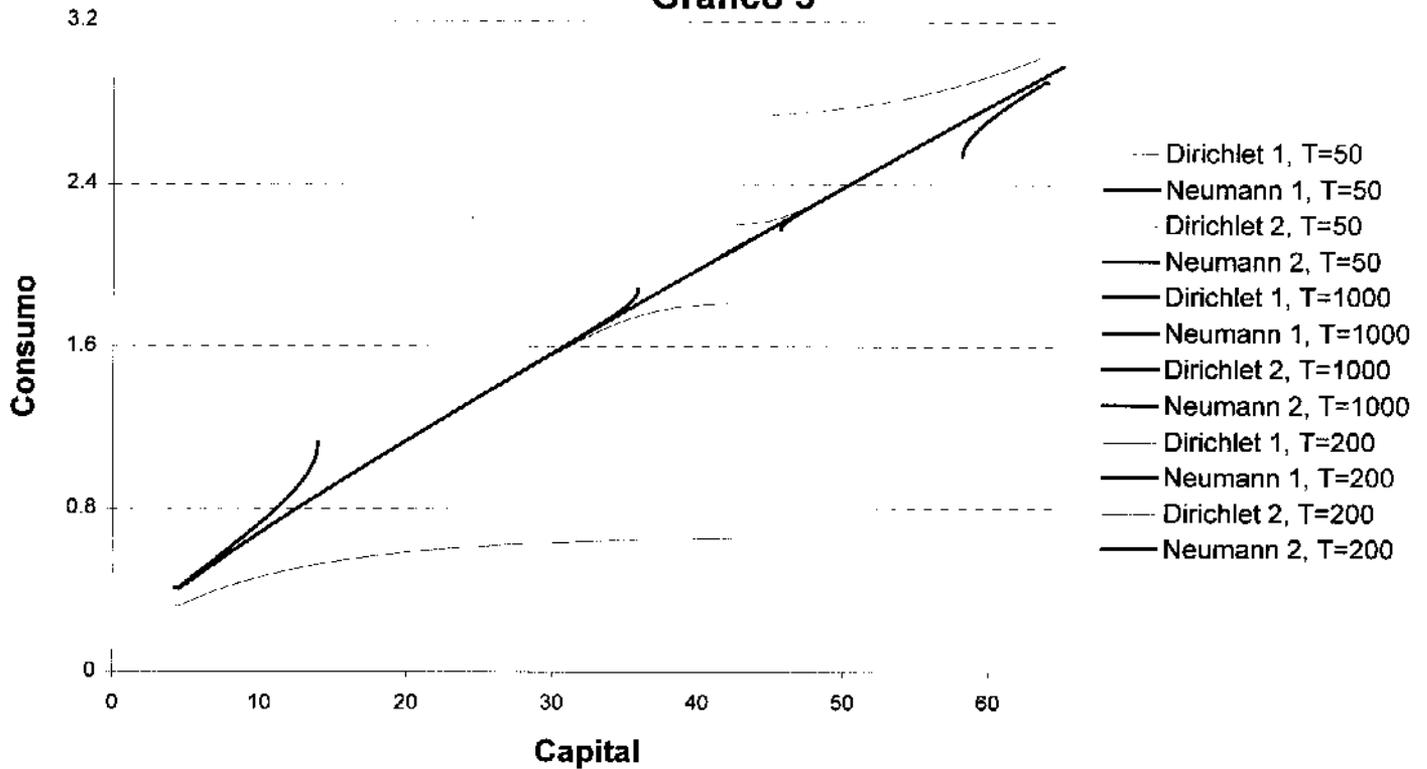


Gráfico 4



Trayectorias de las soluciones con condiciones de frontera de Dirichlet y de Neumann sobre el espacio de fase, $\phi = 0.6$

Gráfico 5



Comparación de las soluciones con condiciones de frontera de Dirichlet y de Neumann, T = 500

Gráfico 6

