CIDE

NÚMERO 125

José Carlos Ramírez y John Goddard

OPTIMIZACIÓN DE UN MODELO ESTOCÁSTICO DE APRENDIZAJE UTILIZANDO FUNCIONES DE UTILIDAD CON MÚLTIPLES ATRIBUTOS

Introducción

La teoría microeconómica recurre a las funciones de utilidad para determinar la cantidad óptima de bienes a consumir. El procedimiento empleado es de un alto nivel de abstracción y tiene el mérito incuestionable de resolver cualquier problema de optimización en el que los funcionales incluyan como argumentos a los *utiles* y a las *cantidades* de los bienes. El punto a discusión, desde que apareció el artículo seminal de Kelvin Lancaster (1966), es que los resultados obtenidos por ese procedimiento no son de orden general debido a que parten de la hipótesis "poco realista" de que los bienes son los objetos directos de la utilidad.

La propuesta de los que suscriben el "nuevo enfoque del consumidor" es que los consumidores derivan su utilidad de los atributos de los bienes y no de los bienes en si. Las funciones de utilidad no son, por consiguiente, relaciones de correspondencia entre cierto nivel de utilidad y una cantidad de bienes sino entre ese nivel y el conjunto ordenado de atributos de uno o varios bienes. Los defensores de estas funciones, llamadas *funciones de utilidad con múltiples atributos* (FUMAT), sostienen que los consumidores piensan en los bienes más como objetos formados por un vector de atributos, que como entes abstractos, al momento de ordenar sus preferencias. Consideran, por ejemplo, que un individuo que compara dos automóviles no observa dos bienes indivisibles sino que evalúa los atributos de cada uno (su velocidad, comodidad, diseño, precio, etcétera) a fin de tener una idea mas acabada sobre su bien elegido.

La introducción de este "nuevo enfoque" impulsó rápidamente el desarrollo de ciertas áreas de la Economía, como la Organización Industrial, en las que la utilización de las funciones sobre bienes resultaba limitada. Este es el caso del análisis de diferenciación de productos, en donde la aplicación de las FUMAT hizo posible una identificación más clara de los grupos de productos utilizados por Chamberlin para derivar sus demandas residuales, o en el campo de la teoría de la decisión, donde las FUMAT favorecieron la implementación de algoritmos que permitieron modelar, recursivamente, la conducta de agentes expuestos a múltiples decisiones intertemporales. El repentino auge de este enfoque empezó, sin embargo, a declinar en la década pasada a causa del complicado tratamiento matemático de las FUMAT. Y es que la maximización de funcionales con múltiples atributos supone problemas de dimensionalidad en el proceso de optimización, que aún ahora son técnicamente difíciles de resolver .

La historia por simplificar su utilización, y que arranca con el mismo Lancaster, revela que aún cuando las FUMAT han mostrado ser muy útiles para explicar el comportamiento del consumidor, en especial cuando éste cuenta con información incompleta acerca de los bienes, los resultados han dejado paradójicamente de lado el proceso de aprendizaje que, a decir de Keeney y Raiffa (1976), es la base del nuevo enfoque. La motivación de este trabajo parte precisamente de reconocer que, a pesar de su pobre empleo, las FUMAT son ideales para modelar procesos de aprendizaje en los que los consumidores descubren sus preferencias al momento de consumir los bienes[1]. De aquí que su objetivo sea plantear un modelo de optimización intertemporal con FUMAT construidas con información incompleta.

Las enormes dificultades involucradas en cubrir un objetivo de esta naturaleza obliga a ser cautos y a presentar resultados mas bien exploratorios. Es por eso que el texto está organizado de tal suerte que busca resaltar mas los elementos que son necesarios para analizar esos modelos, que su solución. Concretamente, en el primer apartado se hace una presentación, muy general, del llamado "nuevo enfoque del consumidor", mientras que en el segundo se analizan los aspectos claves de un modelo estocástico de optimización dinámica en el que el funcional se haya sujeto a un sistema de adaptación markoviano (el análisis también incluye una discusión sobre los supuestos y variables requeridos por el modelo así como dos propuestas de solución inspiradas en la teoría de latices y la programación dinámica). Finalmente, en las conclusiones, se enfatizan las múltiples posibilidades de análisis que abre un modelo de este tipo en la comprensión del fenómeno del aprendizaje en el consumo.

La Teoría Básica de las Funciones de Utilidad con Múltiples Atributos

Funciones de Utilidad Tradicionales

La conducta del consumidor es usualmente representada por medio de una función de utilidad U: $\mathbf{X} \to \mathbf{R}$, que debe cumplir con la condición de que $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ ($\mathbf{x}$ es estrictamente preferido a $\mathbf{y}$) $\Leftrightarrow U(\mathbf{x}) > U(\mathbf{y})$; en donde $\mathbf{X}$ puede ser cualquier conjunto de consumo, cerrado y convexo, y $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ dos cestas. La característica básica de esta función es su *continuidad* en espacios de bienes que son ordenados por las preferencias de un consumidor de acuerdo con ciertos supuestos de comportamiento: completitud, reflexividad transitividad, continuidad, monotonicidad, insaciabilidad local y convexidad. La ausencia de alguno de estos supuestos limita la posibilidad de operar con funciones de utilidad suaves y, por lo tanto, de conocer el espectro de elección factible del consumidor.

El ordenamiento de preferencias sobre los bienes no es, sin embargo, irrestricto, debido a que hay limitaciones presupuestarias que hacen que la elección sobre el espacio de productos sea distinta para cada consumidor. Esto implica que en un sistema como (1) el control o escalar de desempeño óptimo $\mathbf{x}^*$ debe garantizar que el supuesto de insaciabilidad local cumpla con la restricción presupuestaria:

[1] Este tipo de trabajos, llamados de "utilidad adaptativa", han sido planteados ya en el marco de las funciones sobre bienes por Cyert y De Groot (1975) y Louis Wilde (1981). Más recientemente Young (1991) y Bala Goyal (1995) han hecho esfuerzos interesantes en esta dirección. El primero presenta un modelo intertemporal con aprendizaje en el que se modelan las trayectorias de consumo (aunque no presenta conclusiones sobre diferencias entre bienes por no utilizar FUMAT). El segundo desarrolla una "teoría de aprendizaje con agentes heterogéneos" en la que usa conceptos similares a las martingalas para encontrar las condiciones necesarias en las que las decisiones de los agentes se desarrollan bajo aprendizaje completo. La novedad con las FUMAT es que, como veremos, su inclusión permite endogeneizar el aprendizaje de las preferencias en las funciones de utilidad del consumidor.

$$\max_{\mathbf{x}} U(\mathbf{x})$$

$$\text{sujeto a: } \mathbf{px} \leq y$$

Una forma de hacer explícita esta última condición es plantear una función objetivo continua cuyos argumentos sean los precios (**p**) y el ingreso (y), restringido a que el control ($\mathbf{x}^*$), evaluado a los precios corrientes, sea igual al presupuesto del consumidor, tal como se expresa en el sistema (2):

$$\mathrm{f}(\mathbf{p}, y) = \max_{\mathbf{x}} U(\mathbf{x}) \tag{2}$$

$$\text{sujeta a: } \mathbf{px} = y$$

donde f(**p**, y) es la función indirecta de utilidad que indica la máxima utilidad que el consumidor puede lograr a los precios e ingreso dados[2].

La solución a este sistema permite encontrar la demanda óptima del consumidor $\mathbf{x}^*(\mathbf{p}, y)$, en virtud de que el control $\mathbf{x}^*$ arroja un estado óptimo U* con condiciones preestablecidas (**p**, y). Esto es explicado por las propiedades de la función f(**p**, y), que permiten derivar sucesivamente, las funciones de gasto, la función de demanda compensada y, finalmente, la función de demanda Marshalliana $\mathbf{x}^*(\mathbf{p}, y)$[3].

Funciones de Utilidad con Múltiples Atributos

Condiciones para la Optimización del Consumo

El supuesto implícito en la optimización de los sistemas (1) y (2) es la existencia de una relación monótona decreciente entre el nivel de utilidad y la cantidad consumida de bienes. La solución de las condiciones de primer orden permite determinar el control $\mathbf{x}^*$, que asegura la cantidad de bienes asociada a la máxima utilidad del consumidor bajo ciertas restricciones presupuestarias (según la identidad de Roy).

En este contexto, las preferencias deben mantener una correspondencia uno a uno con los bienes y las unidades en que se mide el presupuesto. En otras palabras, tanto las funciones de utilidad como la restricción presupuestaria deben estar definidas en el mismo espacio de bienes[4]. En las FUMAT la

[2] Esta función es no creciente en **p** y no decreciente en y; homogénea de grado cero en **p** e y; y cuasiconvexa y continua en **p**.

[3] La serie de identidades con que se deriva la demanda Marshalliana y la función indirecta de utilidad, lleva a concluir que cualquier $\mathbf{x}^*$ puede expresarse como solución al problema de maximización de la utilidad o de minimización del gasto. Las condiciones suficientes de esta maximización deben satisfacer las restricciones de Slutsky, que exigen que la matriz de los términos de sustitución sea simétrica y semidefinida negativa y, más generalmente, el axioma de preferencia revelada. El proceso inverso para obtener funciones de utilidad indirectas a partir de funciones de demanda requiere resolver las ecuaciones de integrabilidad entre los bienes.

[4] "En el análisis tradicional del consumidor, tanto la restricción de presupuesto como la función de utilidad están definidas en el mismo espacio [de bienes], por lo que podemos inmediatamente relacionar los dos... en un diagrama de curvas de indiferencia", Lancaster (1966: 137).

correspondencia es mucho más compleja, pues la utilidad que deriva el consumidor es una función implícita, G(**z**), de la mezcla particular de atributos (**z**) en los bienes (**x**), que da como resultado que U = U(**x**) y **x** = G(**z**)

Este planteamiento modifica la forma convencional de analizar la conducta del consumidor, ya que las propiedades sobre el ordenamiento de las preferencias están mediadas por una intrincada relación establecida entre los atributos (**z**), los bienes (**x**), las actividades de consumo (**y**) y la restricción presupuestaria $\mathbf{px} \leq y$[5]. La relación entre estas cuatro dimensiones no es ni implícita ni biunívoca y, por consiguiente, no siempre están definidas en el mismo espacio, a diferencia de lo que ocurre en la teoria de la utilidad tradicional (TUT).

De acuerdo con el nuevo enfoque, los consumidores ordenan sus preferencias por la utilidad que les brindan los atributos, los cuales no pueden ser comprados directamente en el mercado. Y dado que los consumidores sólo pueden comprar bienes, éstos deben fungir como *mecanismos de transferencia* de ciertos atributos que son incluidos en diferentes proporciones en cada bien[6]. La conducta racional del consumidor consiste, entonces, en comprar diferentes cantidades de productos diferenciados que le permitan obtener una combinación óptima de atributos.

El problema es cómo determinar el consumo óptimo sí el consumidor se enfrenta a distintos grupos de productos que poseen diferente número y proporción de atributos. La solución usualmente propuesta requiere: a) establecer una relación entre la actividad de consumo y los bienes consumidos en esa actividad, por ejemplo $\mathbf{x}=\mathbf{Ay}$, donde **x** es el vector de bienes, **A** es la matriz de coeficientes a_{ij} que son determinados por las propiedades intrínsecas de los bienes, e **y** es el vector de actividades de consumo[7]; y b) encontrar la relación entre el vector de la cantidad de atributos **z** y el vector **y**, digamos $\mathbf{z} = \mathbf{By}$, donde **B** es la llamada "tecnología de consumo" (Lancaster, 1966)

Una vez hecho esto, lo que resta es resolver un sistema como (3), en donde

la función objetivo es U(**z**):

$$\begin{aligned} &\text{Max } U(\mathbf{z}) \\ &\text{Sujeto a: } \mathbf{px} \leq y \\ &\mathbf{z} = \mathbf{By} \\ &\mathbf{x} = \mathbf{Ay} \end{aligned} \tag{3}$$

[5] Es necesario distinguir entre y, el ingreso en la restricción presupuestal, y **y**, el vector de actividades de consumo.

[6] Ya que en este enfoque los bienes están definidos por la proporción de sus características, los bienes con proporciones idénticas son bienes idénticos.

[7] Deaton y Muellbauer (1980: 250-253) llaman a este enfoque el "modelo de características lineales", y establecen sus orígenes en el análisis de dietas, que fue tratado originalmente por Cornfeld, Stigler y Dantzig en la década de los cincuenta.

$$x_j, z_i, y_k \geq 0, \forall j = 1,\ldots,n; i = 1,\ldots,r; k = 1,\ldots,m$$

Ahora bien, para llevar a cabo la optimización de un sistema como (3) es necesario antes establecer cuatro condiciones básicas. La primera consiste en relacionar **z** y **x**, dado un número de r características, m actividades y n bienes. En particular, si $r = m = n$ y **A** es invertible, la optimización de (3) será igual al caso tradicional en el que hay correspondencia biunívoca entre **z** y **x** ya que, dado que **A** y **B** son matrices cuadradas, U(**z**) puede expresarse como U(**x**), haciendo primero que $\mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$ y, después, que $\mathbf{z} = \mathbf{BA}^{-1}\mathbf{x}$. En estas circunstancias, las propiedades convencionales sobre las preferencias se mantendrían puesto que solo habría una manera óptima de elegir entre dos colecciones $\mathbf{x}_i$ de bienes.

La situación cambiaría si $r \neq m$, $r \neq n$, o $m \neq n$, en virtud de que en estos casos habría diferentes grados de libertad para escoger **y** y, por lo tanto, habría diferentes elecciones de **z** para un **x** dado. La selección óptima no tendría una trayectoria única y, en consecuencia, no es seguro que se mantendría la validez de los supuestos convencionales sobre las preferencias[8]. Podrían, por ejemplo, presentarse "traslapes" en los atributos de varios bienes que harían que el consumidor escogiera indistintamente cualquier bien (por ejemplo, si $r < m$ y $m > n$), lo cual impediría garantizar la existencia de insaciabilidad local o de monotonicidad fuerte.

La segunda condición requerida para optimizar el sistema (3) es la homogeneización de los espacios de unidades. Mientras que la función objetivo U(**z**) está definida en un espacio de atributos, la restricción **px** $\leq y$ se expresa en un espacio de bienes. La homogeneización puede hacerse transformando U(z) al espacio de bienes o, bien, siguiendo el proceso inverso: operando en el espacio de atributos mediante la conversión de la restricción presupuestaria (Lancaster, 1966). En ambas situaciones existirían nuevas funciones de utilidad, ya sea en términos de bienes o de atributos, que serían generadas por una nueva ecuación de transformación **z = Bx,** que es la encargada de relacionar las r características con los n bienes. Con la utilización de esta ecuación, el modelo requeriría condiciones de optimización más complejas que en el análisis tradicional debido a la presencia de la matriz **B**.

La tercera condición se refiere, precisamente, a las características que debe reunir ésta matriz[9]. En términos generales, la optimización del consumidor será exactamente igual a la establecida por la TUT si la matriz **B** es una permutación diagonal y $r = m$. En las demás situaciones, la TUT no ofrece respuestas satisfactorias, ni siquiera manteniendo la igualdad entre r y m (dado que **B** no es una permutación diagonal), ya que en este caso los objetos de utilidad no serían bienes individuales sino

[8] Hay y Morris (1991) sostienen que en las FUMAT siempre serán válidos tres supuestos tradicionales del análisis del consumidor; a saber: 1) más características o atributos serán preferidas a menos, 2) los consumidores expresan preferencias consistentes sobre un conjunto de atributos y, 3) la tasa marginal de sustitución es decreciente a lo largo de una curva de indiferencia en el espacio de atributos. Esta afirmación debe ser matizada puesto que puede darse el caso en que no exista función de compensación para ciertos atributos y, por lo mismo, alguno de esos supuestos podrían no satisfacerse.

[9] Lancaster supone que las actividades guardan una relación uno a uno con los bienes ($m = n$), con el fin de simplificar el modelo y centrar la atención en las diferencias observadas entre el número de características y el número de actividades o bienes.

bienes compuestos. El problema se vuelve mayor si se analizan las posibles combinaciones que resultan de considerar las desigualdades entre r y m ($r > m$ o $r < m$).

La última condición que hay que tener en cuenta al optimizar (3) se refiere a las diferentes formas funcionales que puede adoptar una FUMAT. Sobre este punto, Keeney y Raiffa (1976) proponen dos conceptos básicos de independencia entre atributos que permiten simplificar la forma de las funciones de utilidad[10]. Cada concepto implica la existencia de una forma funcional distinta, por lo que es importante elegir cuidadosamente aquel que relacione mejor los atributos de los bienes bajo observación.

El primer concepto es el de *independencia en preferencias*. Keeney y Raiffa sostienen que el conjunto de atributos Y es independiente en preferencias del conjunto complementario Z, si y sólo si para alguna $\mathbf{z'}$, $[(\mathbf{y}',\mathbf{z}') \succsim (\mathbf{y}'',\mathbf{z}')] \Rightarrow [(\mathbf{y}',\mathbf{z}) \succsim (\mathbf{y}'',\mathbf{z})]$, $\forall \mathbf{z},\mathbf{y}',\mathbf{y}''$ [11]; en otras palabras, las preferencias sobre los niveles de los atributos que están en el conjunto Y no sufrirán cambios a causa de los valores de los atributos que están en su complemento, Z. El segundo concepto, llamado *condición fuerte de independencia*, asegura que si cada subconjunto de atributos es independiente en preferencias de su complemento entonces se dice que los atributos son *mutuamente independientes en preferencias* [12]. Entre más fuerte es el tipo de condición de independencia que corresponde a un subconjunto de los atributos, más simple es la forma de la función de utilidad que puede emplearse en el problema de optimización. La Tabla 1. muestra las funciones de utilidad para los dos conceptos de independencia[13].

[10] El libro de Keeney y Raiffa (1976) es el texto clásico sobre las funciones de utilidad con múltiples atributos. En él se hace una descripción de los términos fundamentales relacionados con el nuevo enfoque del consumidor y se presentan varias aplicaciones de la teoría a problemas concretos.

[11] Donde $(\mathbf{y}',\mathbf{z}') \succsim (\mathbf{y}'',\mathbf{z}')$ significa que el conjunto de atributos $(\mathbf{y}',\mathbf{z}')$ es preferido al conjunto $(\mathbf{y}'',\mathbf{z}')$.

[12] También se pueden definir condiciones de independencia incorporando loterías sobre los atributos. La *independencia en utilidad* es la condición equivalente a la *independencia en preferencias* cuando se incorporan loterías, y la *independencia aditiva* es la condición equivalente a la *independencia mutua en atributos*.

[13] Una función de utilidad aditiva es más fácil de manipular que una función separable en varios subconjuntos de atributos y ésta, a su vez, es más sencilla que la forma general, en la que no se supone ningún tipo de independencia entre atributos. Mientras que en la función aditiva hay tantos ponderadores como atributos, en la función separable hay más ponderadores que atributos debido a las interacciones entre atributos no independientes.

Tabla 1. Correspondencia entre independencia y forma funcional

Concepto de Independencia	**Forma de la Función de Utilidad**
Ninguno	Forma general $u(\mathbf{z}) = u(z_1, z_2, \ldots, z_r)$
Independencia de preferencias entre los subconjuntos $\{z_1, \ldots, z_k\}$ y $\{z_{k+1}, \ldots, z_r\}$	Función de utilidad separable $u(\mathbf{z}) = f[u_1(z_1, \ldots, z_k), u_2(z_{k+1}, \ldots, z_r)]$
Independencia mutua en preferencias	Función de utilidad aditiva $u(\mathbf{z}) = u_1(z_1) + u_2(z_2) + \ldots + u_r(z_r)$

¿Por qué surge el nuevo enfoque de la teoría del consumidor?

No obstante que las FUMAT tratan una parte neurálgica de la teoría microeconómica- la conducta del consumidor-, su origen está conectado con el funcionamiento de los mercados de competencia imperfecta. De hecho, el trabajo original de Lancaster (1966) es una propuesta alternativa al análisis de Chamberlin sobre diferenciación de productos. Como se sabe, Chamberlin exploró las condiciones de equilibrio de mercados no competitivos que presentaban curvas de demanda descendentes a causa de la existencia de productos diferenciados. Sin embargo, su análisis fue poco preciso al definir los grupos de "productos competidores", el propio concepto de diferenciación de productos y, sobre todo, al suponer que la elasticidad cruzada de la demanda es idéntica entre todos los pares de productos de un grupo (Hay y Morris,1991).

Los aportes de Lancaster (1966 y 1975) se encaminan no sólo a suplir estas deficiencias sino a dar una base coherente a la derivación de las curvas de demanda de Chamberlin.[14] En particular, Lancaster da respuesta a dos preocupaciones centrales en el análisis moderno de la competencia monopolística que, incluso Dixit y Stiglitz (1977), dejaron pendientes. La primera, parte del trabajo original de Chamberlin, y consiste en obtener curvas de demanda con pendientes negativas, aún en el caso en que el creciente numero de productos disminuye la substituibilidad entre ellos. La segunda respuesta, que es la más novedosa, supone la existencia de "efectos vecinos" entre los productos,

[14] Las dos curvas de demanda de Chamberlin son la base de la teoría de la competencia monopolística. La primera se deriva para un solo producto cuando la empresa baja su precio, manteniendo constante los otros precios. La otra es la curva generada por los cambios en los precios comunes del grupo de productos, que conducen a una substitución por otros grupos de productos.

como reconocimiento a que ciertos productos son más similares que otros en términos de sus atributos.

El camino que toma Lancaster para arribar a esas conclusiones es muy largo e inicia con el supuesto de que los bienes son divisibles entre sus atributos. En su artículo de 1966, el autor sostiene que el incremento del precio de un bien A, cuyos atributos son deseados por el consumidor, afectará la demanda de aquellos bienes, B y C, cuya combinación de atributos los convierte en vecinos cercanos de A.[15]. Cada grupo de productos que comparten características en común (lo que los hace "vecinos cercanos") es agrupado en la matriz **B**. Si ésta matriz es triangular, cada elemento de la diagonal definirá una industria para cada grupo de productos vecinos que mantienen atributos no compartidos por otros grupos de productos[16].

La critica a las discontinuidades en la curva de demanda provocadas por la existencia de "vecinos cercanos", condujo a Lancaster a eliminar el supuesto irreal de que los bienes son divisibles entre sus atributos. En su lugar, definió una curva de diferenciación de productos (CDP), que muestra todas las combinaciones posibles de atributos en un bien que es producido con una unidad de recursos, y una función de compensación h(x); ésta última es usada, siguiendo el análisis de Chamberlin, para definir la curva de demanda de cada uno de los grupos de productos diferenciados, así como de los grupos como un todo.

Lancaster (1991) considera a la CDP como una curva cuyos límites están representados por dos bienes extremos que poseen la cantidad máxima de un solo atributo, y utiliza a la función de compensación h(x) para analizar la sustitución entre productos diferenciados al interior de un grupo de referencia. La conclusión es que h(x) determina la sustitución de un producto por otro que comparte el mismo grupo de atributos, pero en distintas proporciones. Esta sustitución entre productos se realiza eligiendo la selección de atributos que brinda al consumidor la misma satisfacción por unidad de gasto. El bien elegido debe tener la combinación de atributos más cercana a la mezcla óptima de atributos para el consumidor, de acuerdo a sus preferencias. El atributo más deseado de un bien sirve para dividir a aquellos consumidores que desean las características de los bienes extremos de los que no. Pero más importante aún: sirve para delimitar la curva de demanda de un bien que no posee el atributo más deseado por los consumidores de ese segmento[17].

[15] Archibald y Rosenbluth (1975) sostienen que cuando el número de características es cuatro o más, el número de "vecinos cercanos" es, en promedio, $n/2$; donde n es el número de firmas. Esto implica que la interdependencia entre "vecinos cercanos" se verá debilitada a medida que aumente el número de firmas.

[16] Lo cual no excluye la posibilidad de substitución en el consumo entre grupo de productos, dado que se puede suponer que la tasa marginal de sustitución entre las características de un grupo es independiente de la cantidad consumida de cualquier característica fuera del grupo.

[17] En general, Lancaster (1991) sostiene que la variación en el precio de un bien con cierto atributo deseado, manteniendo otros precios constantes, producirá tres efectos: 1) un efecto ingreso, que será negativo a medida que el bien en cuestión sea normal, 2) una tendencia a sustituir unos bienes por otros a fin de compensar la satisfacción del consumidor por la mezcla de atributos más deseada y 3) cambios en la holgura del segmento de mercado debido a que el consumidor dejará de ser indiferente sobre ciertos atributos del bien que tiene menores precios relativos. Estos efectos asegurarán continuidad en la curva de demanda de productos diferenciados ya que, a

Las Extensiones del Campo de Investigación de las FUMAT

Paralelo al trabajo de Lancaster, que desde un principio buscó generalizar los resultados de las FUMAT a campos tan diversos como la economía laboral, monetaria y pública, William Baumol (1967) desarrolla su "enfoque de productos abstractos" para analizar la conducta de los consumidores que enfrentan FUMAT, usando diversos métodos de programación lineal. Pero, a diferencia de su antecesor, Baumol no llega muy lejos pues ni resuelve el funcional planteado ni indaga en las posibles aplicaciones de la teoría. De hecho, las investigaciones posteriores a Lancaster siguieron un camino poco relacionado con el *mainstream* de la teoría económica, aun cuando algunos autores insisten en resaltar los vínculos de las FUMAT con la llamada técnica hedónica[18] (Deaton y Muellbauer, 1980) o con los modelos de localización industrial (Hay y Morris, 1991).

Es mas bien en el campo de la teoria de la decisión y en los estudios de casos aplicados que las FUMAT empiezan a cobrar relevancia a partir de los años setenta[19]. Así tenemos que Keeney y Raiffa (1976) sistematizan los fundamentos de las funciones de múltiples atributos aplicando diversos resultados formales a la teoria de la decisión. Otro tanto hacen Gregory Fischer (1975), Von Winterfeldt y Fischer (1975), y Humphreys y Humphreys (1975), quienes desarrollan una *teoría de utilidad con múltiples atributos* para estudiar diversos problemas de elección con base en las FUMAT[20].

Entre los estudios de caso cabe destacar el método del análisis conjunto (*conjoint analysis*), un área muy fértil en la que el nuevo enfoque ha sido utilizado para realizar estudios de mercado y de evaluación de proyectos de inversión y en donde es imposible ignorar los atributos fundamentales que poseen los bienes. Keeney y Raiffa (1970) también mencionan la utilización de FUMAT en temas ambientales, problemas de localización, diagnóstico de enfermedades y en el área de negocios, mientras que Fischer (1975) destaca su aplicación en estudios sobre diagnóstico clínico, decisiones de inversión y gasto público.

¿Por qué insistir en la utilización de las FUMAT si es tan pobre su generalización en la Economía?

De acuerdo con Deaton y Muellbauer (1980: 244) "las 'explicaciones' ofrecidas por el [nuevo] enfoque algunas veces son formas complicadas de interpretar aspectos muy sencillos". Esta crítica, como ya vimos, es en buena medida cierta por al menos dos razones. La primera es que solo en

diferencia del primer análisis, aquí no se presenta el fenómeno de "captura" total del segmento de mercado del bien con variaciones en los precios.

[18] Esta técnica es empleada en los estudios empíricos utilizando índices de precios corregidos por la calidad para estimar los precios sombra de las características en los bienes.

[19] Ver Bell *et al* (1988) para tener una idea general sobre el concepto de elección, la relación de las creencias y la incertidumbre, los valores y la utilidad así como áreas de aplicación de las FUMAT.

[20] Los autores mencionados intervinieron en una conferencia interdisciplinaria sobre "Utilidad, Probabilidad y Toma de Decisiones" celebrada en Roma en 1973, uno de cuyos temas fue *Multi-attribute Utility Theory* o MAUT.

situaciones especiales es posible encontrar solución analítica al modelo con FUMAT utilizando la Ecuación de Bellman. La incorporación de vectores estocásticos, inherente a la modelación de incertidumbre en las preferencias requiere de un instrumental matemático sofisticado, como es el caso de la aritmetica de martingalas, cuyo uso aún es limitado en Economía[21].

La segunda razón es que no existe consenso sobre la mejor manera de representar a las FUMAT. Hay, como se sabe, dos tipos de estrategias asociadas a la selección óptima de una alternativa cuando las opciones de los consumidores son variadas: estrategias compensatorias y estrategias no compensatorias. Mientras que las primeras compensan la variación en el nivel de utilidad experimentada por el cambio de un atributo, las segundas, como su nombre lo indica, no permiten esa compensación[22]. La mayoría de los trabajos con FUMAT utilizan estrategias compensatorias que hacen imposible adoptar criterios uniformes, debido sobre todo a los distintos supuestos de independencia involucrados en las formas funcionales.

No obstante estas innegables dificultades analíticas, el nuevo enfoque del consumidor permite, a cambio, modelar las decisiones de los consumidores dentro de un marco más general que el de la TUT. Al proponer que la utilidad proviene de los atributos, y que cada bien es una mezcla de varios atributos, los modelos con FUMAT dan una idea más realista de la conducta del consumidor en la práctica. La búsqueda de la pureza, refinamiento y simplicidad de la TUT lleva, según Lancaster (1966: 132), a definir a los bienes de manera casi tautológica pues para la TUT la única propiedad de éstos es "la propiedad compartida por todos los bienes,[y] que es simplemente [de] que son bienes". La eliminación de todas las propiedades intrínsecas de los bienes, si bien ha permitido simplificar las soluciones, también ha provocado vacíos importantes dentro de la teoría económica que pueden ser parcialmente llenados por el análisis de las FUMAT.

Un vacío está representado por la pérdida de capacidad para explicar la relación que existe entre un bien y otro. Las funciones de utilidad tradicionales plantean *esencialmente* la existencia de un atributo por bien, de donde se deduce que un bien es distinto de otro si el atributo entre ambos es diferente [23]. Bajo esta óptica el análisis de la complementariedad o sustituibilidad de los bienes puede resultar muy limitado, en la medida que obvia las distancias entre los otros atributos incluidos en la mezcla, y que pueden llevar a la conclusión de que un bien sea complementario en un atributo y sustituto en otros. Para las FUMAT, los consumidores sacrifican cierta cantidad de bienes por otra sólo después de haber evaluado que tan "cercanos" o "lejanos" son sus atributos, por lo que resulta más apropiado hablar de la tasa marginal de sustitución entre los atributos.

---

[21] Lancaster (1966: 136) afirma que su modelo original, el sistema (3), con *m* actividades, *r* características y *n* bienes, es "un problema no-lineal de un tipo intratable". Baumol mismo (1967: 684), al proponer un modelo con varios bienes y atributos, destaca que la solución del problema de programación (*mixed-integer-programming*) es demasiado larga y costosa.

[22] Las estrategias compensatorias incluyen métodos de solución como la maximización con una función lineal, el método de diferencias aditivas y el método del punto ideal. Por otra parte, entre las distintas estrategias no compensatorias se encuentran la regla conjunta, la regla disjunta, la estrategia lexicográfica y la eliminación por aspectos (Harvey 1996).

[23] Esta relación uno a uno entre un bien y un atributo es un supuesto muy fuerte. En el mundo real es difícil encontrar bienes que puedan ser caracterizados por una sola dimensión; es mucho más común ver bienes con muchos atributos y, por esto mismo, el mayor realismo del nuevo enfoque es claro.

Al modelar la distancia intrínseca entre productos, este enfoque permite anticipar mejor las reacciones de los consumidores frente a bienes diferentes. Desde la perspectiva del consumidor, esto significa que si una persona se enfrenta a un bien nuevo, esto "simplemente significa la adición de uno o más actividades a la tecnología de consumo. Dada la tecnología y las características intrínsecas de la actividad asociada a cada nuevo bien, [éste] simplemente se inserta en el lugar apropiado de la tecnología, *[lográndose con esto] predecir sus consecuencias*"(Lancaster 1966: 149)[24]. Con las funciones de utilidad sobre bienes la posibilidad de tal predicción es poco probable, dada la ausencia de **B** en su cuerpo teórico.

El hecho de que en las FUMAT las relaciones entre bienes estén mucho mejor definidas que en la teoría tradicional, hace posible que las preferencias de los consumidores varien con el tiempo al ir éste obteniendo más información. Cuando se incorporan FUMAT con información incompleta y tiempo, se puede endogenizar la variedad en las preferencias y encontrar soluciones dinámicamente eficientes debido a que, despues de varios experimentos, el consumidor descubre, siguiendo a Nelson (1970), que los bienes son bienes de experiencia.

Desde la perspectiva de la oferta, es importante destacar también el apoyo que las FUMAT brindan a los productores que buscan desarrollar innovaciones con altas posibilidades de éxito en el mercado. Baumol afirma que el modelo con múltiples atributos "constituye un acercamiento al análisis de la estrategia óptima de diseño de productos y a la determinación de las características por el vendedor. Estas decisiones están, por supuesto, en el centro de la diferenciación de productos y son de las más cruciales que enfrentan los administradores de compañías" (1967: 684)[25]. La modelación de esas características permite hacer análisis más precisos sobre las estrategias competitivas desarrolladas por las empresas ante cambios en ciertos tramos de la demanda. En particular, el nuevo enfoque puede predecir el comportamiento de las empresas que se ven en la disyuntiva de capturar total o parcialmente el mercado al introducir un bien nuevo o diferenciado. La decisión dependerá del grado de sustitución (su cercanía) de los atributos del nuevo producto con respecto a los ya existentes.

Debido a estas razones, la utilización de las FUMAT se encuentra mas que justificada en el análisis económico. Los resultados que alcanzan son reveladores de aspectos más sutiles de la demanda y oferta de bienes, así como de las relaciones intrínsecas que existen entre los bienes. La Tabla 2 resume y ejemplifica los cambios que han estimulado el desarrollo de las FUMAT, a la vez que resalta las ventajas de utilizar esas funciones en lugar de las tradicionales.

[24] Asimismo, se puede considerar a un bien diferenciado típicamente como "un bien nuevo dentro de un grupo intrínseco de bienes existente, y analizar a este nuevo bien dentro de este grupo. Algunas veces aparecen bienes de un carácter más fundamental cuyas características cortan a las de los grupos existentes", (Lancaster 1966: 150).

[25] En este sentido, Baumol (1967: 674) escribió que "los modelos estándar de la firma no tratan algunos de los problemas de decisión más críticos que surgen bajo competencia monopolística. Estos modelos no nos dicen como los vendedores se enfrentan con la diversidad de gustos de consumo que caracterizan a la mayoría de los mercados reales".

Tabla 2. Comparación de resultados entre La Teoría Tradicional y El Nuevo Enfoque

Relaciones entre bienes	Ninguna razón, excepto "gustos", por la que un bien como la madera no debe ser sustituto cercano del pan en la TUT. Con FUMAT, estos bienes no son sustitutos cercanos porque sus atributos son distintos. Ninguna razón por la que un Buick rojo debe ser un sustituto más cercano a un Buick gris que la madera y el pan en la TUT. Con FUMAT, estos dos bienes pueden ser sustitutos cercanos. Ninguna razón por la que los sustitutos cercanos en un contexto lo sean en otro en la TUT. Con FUMAT, la sustitución es frecuentemente intrínseca y objetiva, y es observada en distintas sociedades y condiciones de mercado. Ninguna presunción de que los bienes que forman un grupo (definido como una división en el espectro de elasticidades cruzadas) en un contexto lo sean en otro en la TUT. Con FUMAT, en cambio, algunos grupos de bienes pueden ser intrínsecamente similares, y tal vez lo sean en cualquier contexto.
Cambios en la demanda	En la TUT, un individuo es afectado por cambios en todos los precios. Con FUMAT, un individuo no es afectado en absoluto por cambios en los precios que dejan inalterada la porción de la frontera eficiente en que se encuentra su elección.
Competencia	En la TUT, no existe una presunción de que los bienes puedan ser completamente desplazados. Con FUMAT, un bien puede ser desplazado del mercado por un nuevo bien o por cambios en los precios.

Las Bases de un Modelo de Optimización con Elecciones Estocásticas en las Preferencias del Consumidor

De la discusión anterior se desprende que una de las justificaciones más fuertes para utilizar las FUMAT es su utilidad para modelar procesos de aprendizaje en el consumo con información incompleta. A continuación se presenta un modelo general de ese tipo, con el fin de exponer en detalle cada una de sus etapas constitutivas.

Breve Descripción del Proceso Intertemporal de Consumo

En modelos de esta naturaleza es usual suponer, por simplicidad, que el consumidor compra una unidad del bien $\mathbf{x}_t$ que maximiza su utilidad esperada en cada periodo t, sujeto a una restricción presupuestaria $\mathbf{p}\mathbf{x}_t \leq y$. El bien elegido forma parte del conjunto de m bienes que son combinaciones de un mismo grupo de r atributos. Los atributos de cada bien están incluidos en la matriz **B**, de tamaño $(r \times m)$, los cuales pueden ser observados por el consumidor; el precio de $\mathbf{x}_t$ es considerado un atributo más de **B**.

Ahora bien, en virtud de que el consumidor desconoce inicialmente el valor de los parámetros α_t de su función de valor, $v_t(\mathbf{z}_t)$[26], éste no puede determinar *a priori* la utilidad esperada de cualquier bien. Él buscará, por lo tanto, elegir aleatoriamente uno de los bienes en el primer período, y derivar la utilidad que le proporciona la mezcla de atributos de ese bien. La utilidad así calculada se integra al conjunto de información (matriz **B**) que, período tras período, el consumidor buscará acumular hasta "descubrir" la combinación óptima de atributos que maximice su utilidad esperada (y que presupone una varianza nula en el ordenamiento intertemporal de sus preferencias).

El proceso de experimentación no es de ninguna manera ilimitado, ya que hay un número máximo de *T(D)* periodos que constituyen el horizonte de planeación del consumidor[27]. De hecho, los resultados sobre las posibles trayectorias de consumo y aprendizaje de los parámetros α_t de la función de utilidad, dependen críticamente de la forma de la tecnología de consumo, de los bienes que satisfacen la restricción presupuestaria y de ese horizonte de planeación.

El Funcional Objetivo y Las Ecuaciones del Sistema de Adaptación Markoviano

La representación matemática de un problema de optimización como el recién descrito requiere previamente, definir la relación entre el número de actividades de consumo y de bienes. Para efectos de simplificación no hay nada mejor que seguir la recomendación de Lancaster (1966) y suponer que hay una correspondencia uno a uno entre las actividades y los bienes, con lo cual el modelo tomaría la siguiente forma:

$$\underset{\mathbf{x}_t}{MAX}\ E \sum_{t=0}^{T(D)} U_t(v_t(\mathbf{z}_t)) \tag{4}$$

[26] Todos los parámetros que describen a los atributos están en el vector α_t. Como ya se mencionó, existe una relación entre el número de parámetros necesarios para describir una función y las condiciones de independencia que se imponen a los atributos. Para una función aditiva y lineal, el tamaño de este vector columna es $(1 \times r)$, donde r es el número de atributos, mientras que para funciones más complejas el tamaño es mayor.

[27] Estos periodos de consumo *T(D)* son una función decreciente del costo de oportunidad temporal de consumo *D* del grupo de bienes sobre el que el individuo maximiza su utilidad.

sujeto a:

1. $v_{t+1}(\mathbf{z}_{t+1}) = f_t(v_t(\mathbf{z}_t))$
1.1 $o_t = h_t(v_t(\mathbf{z}_t))$;
2. $\mathbf{px}_t \leq y$;
3. $\mathbf{z}_t = \mathbf{Bx}_t$

$x_{jt}, z_{it} \geq 0, \ \forall j = 1,\ldots,m; i = 1,\ldots,r$;

donde:

- $\mathbf{x}_t$ es la cantidad de cada bien que el consumidor representativo decide consumir en el periodo t. Es un vector columna $(m\times 1)$ que contiene un 1 en la fila del bien elegido para consumir en el periodo t, y ceros en todas las otras filas, pues se supone que el agente solo consume una unidad del bien en cada período;
- $\mathbf{z}_t$ es un vector columna $(r \times 1)$ que especifica la cantidad de los r atributos del bien elegido en el período t, $\mathbf{x}_t$;
- $v_t(\mathbf{z}_t)$: $R^r \to R$ es la función vectorial de valor estocástica sobre las cantidades de atributos en el período t, cuyos componentes se agrupan en el vector α_t;
- $U_t(\bullet)$ es una función que pondera la utilidad indirecta intertemporalmente.
- *T(D)* es el número de períodos de consumo;
- $f_t(\bullet)$ es la función vectorial de transición de $v_t(\mathbf{z}_t)$ en el período t;
- $h_t(\bullet)$ es la función vectorial de observación de $v_t(\mathbf{z}_t)$ en el período t;
- **B** es la matriz $(r \times m)$ que relaciona a los atributos con los bienes;
- y es el vector de ingreso disponible (constante) para consumo en cada período; y
- **p** es un vector fila $(1 \times m)$ que especifica el precio de los bienes.

Analizado en su conjunto el formato de (4) es muy parecido al de (3), salvo por el hecho de que la optimización ahora es dinámica. Pero, analizado con mayor detenimiento, el nuevo sistema (4) mantiene una enorme diferencia con el modelo original de Lancaster al suponer que la ecuación de movimiento $v_{t+1}(\mathbf{z}_{t+1}) = f_t(v_t(\mathbf{z}_t))$ es estocástica. Las dificultades que entraña esta modificación no son triviales porque, si bien agrega un mayor toque de realismo a los modelos de optimización con FUMAT, obliga a redefinir todo el esquema de determinación de la conducta óptima del consumidor.

En general, podemos decir que resolver este modelo de optimización estocástica con restricciones que incluyen desigualdad en la variable de control, supone tres tipos de problemas no contemplados originalmente por el nuevo enfoque del consumidor: a) la definición del funcional y la dinámica de adaptación markoviana, b) el establecimiento de las nuevas variables y de los supuestos involucrados en la optimización y, finalmente, c) las soluciones analíticas de un modelo en el que los controles son conjuntos ordenados no necesariamente convexos.

En lo que corresponde al primer tipo de problema, cabe señalar que con el abandono del supuesto de la divisibilidad de los atributos la maximización de una función objetivo $U(\mathbf{z})$ como la descrita en (3) deja de tener sentido, puesto que es poco realista sostener que el consumidor "extraerá" utilidad divisible de los atributos. De aquí que la propuesta del sistema (4) se enfoque a maximizar funciones de valor, $v_t(\mathbf{z}_t)$, que representan el ordenamiento de preferencias cardinales por unidad de gasto según el peso específico concedido por cada consumidor a determinado atributo (sobre este punto véase Keeney y Raifa, 1976).

El peso de los atributos en cada bien puede ser lineal o no lineal, seguir ordenamientos dominantes o indiferentes, o ser cambiantes para cierto grupo de bienes. La única condición importante es que el consumidor sea capaz de ponderar el peso del (los) atributo (s) de cada bien en términos del atributo (s) "más preferido (s)" según su *función de desempeño*. Esto permite conocer, tal como más tarde lo sugeriría Lancaster (1991), el número de productos "vecinos cercanos" que pueden ser adquiridos por una unidad de y, y, por lo tanto, la tasa marginal de sustitución entre esos productos y los que no tienen los atributos "más preferidos".

Ahora bien, como el consumidor "aprende consumiendo", su proceso de decisión sobre los atributos "más preferidos" no es determinístico y, en consecuencia, su problema de optimización consiste en *maximizar el valor esperado* de la utilidad que deriva de la función de valor $v_t(\mathbf{z}_t)$. Las ecuaciones que filtran sus decisiones a todo el sistema son las ecuaciones de movimiento, $v_{t+1}(\mathbf{z}_{t+1}) = f_t(v_t(\mathbf{z}_t))$, que por la naturaleza del problema son ecuaciones en diferencia estocásticas de primer orden que el consumidor deberá "resolver" (una por una) en cada periodo.

La obtención de una nueva función de valor permite al consumidor recabar mayor información sobre el ordenamiento real del resto de los atributos que están contenidos en los m bienes disponibles en el mercado por una sencilla razón: los bienes consumidos representan en sí información. La perturbación introducida por el mejor conocimiento de los atributos (cambios en α_t) modifica las funciones de valor del periodo anterior y, con ello, el conocimiento sobre la mezcla de bienes disponibles. En este sentido, el consumo de bienes asociados al periodo, digamos, $t+1$ (esto es, $\mathbf{x}_{t+1}(v_{t+1}(\mathbf{z}_t))$), ofrece al consumidor la oportunidad de elegir mejor su mezcla de atributos que en el período t (debido a que está en mejor condición de reducir la varianza de sus ordenamientos deseados).

El punto interesante es que el aprendizaje en el consumo sigue un proceso encadenado, que se traduce en tal o cual cantidad de bienes por medio de la ecuación de transformación $\mathbf{z}_t = \mathbf{B}\mathbf{x}_t$ (ecuación 3). Los bienes consumidos afectan las preferencias del consumidor, y éstas las funciones de valor, produciendo nuevas demandas de bienes en cada uno de los períodos sucesivos de planeación. Esto trae como consecuencia, que los valores de $\mathbf{x}_t$ y $\mathbf{z}_t$ sean también estocásticos y ajustados dinámicamente por la ecuación de movimiento.

Los cambios encadenados entre las variables no son homogéneos, pues tienen un componente promedio de desplazamiento (*drift*) y otro componente que se mueve con cierta distribución de probabilidad, que corresponden a la configuración propia de una ecuación estocástica como la descrita en (5). El componente promedio, $v_t(\mathrm{z}_t)$, se refiere a la trayectoria *estable* de aprendizaje que experimenta el consumidor y que se refleja en el ordenamiento de preferencias de su función de valor dado una unidad de gasto en el tiempo t (lo cual convierte a $v_t(\mathbf{z}_t)$ en una función de utilidad indirecta ajustable en cada período). El otro componente, $\theta_t(\alpha_t)$ indica las variaciones de sus preferencias respecto a esa trayectoria estable a medida que se agotan los periodos de planeación T(D).

$$v_{t+1}(\mathrm{z}_{t+1}) = v_t(\mathrm{z}_t) + \theta_t(\alpha_t) \tag{5}$$

Las características de éste segundo componente son esenciales para la optimización de (4) pues, al ser $\theta_t(\alpha_t)$ el único vector exógeno que hace que el pasaje de $v_t(\mathbf{z}_t)$ a $v_{t+1}(z_{t+1})$ sea aleatorio (aun manteniendo los controles fijos), de ellas depende todo el mecanismo de transición del sistema. Debido a esto, es importante asociarle un proceso estocástico contable a α_t que incorpore la condición encadenada de aprendizaje de los diferentes estados del sistema. La propuesta adecuada, por razones mas adelante explicadas, es considerar a α_t como una variable aleatoria que se comporta como una cadena de Markov reversible, de primer orden y con período d definido (esto es, formada exclusivamente por estados trasientes)[28]:

$$P\{\alpha_{t+1} = j / \alpha_t = i, \alpha_{t-1} = i_{t-1}, \ldots, \alpha_1 = i_1, \alpha_0 = i_0\} = P_{i,j}$$

La interpretación de esta cadena no es directa, pues de poco sirve decir que la probabilidad P_{ij} de pasar al estado α_{t+1}, dado que se está en α_t, es dependiente sólo de éste último si α_{t+1} es también dependiente de la función de valor. Mas bien lo que debe resaltarse es que la probabilidad P_{ij} de cualquier transición refleja el nivel de utilidad (o superficie de indiferencia-precio de los atributos que son cercanos) alcanzado por el consumidor con cualquier cambio en su *función de desempeño*.

Así tenemos que si P_{ij} es positivo, el consumidor podría encontrar que el ordenamiento de preferencias de su antigua función de valor es, por varios razones, susceptible de mejorarse. Bajo esa

[28] La condición de que sea reversible la cadena de Markov es importante para utilizar las técnicas de programación dinámica (en su versión "*backward induction*" u optimización "hacia atrás"). Asimismo, se requiere que la cadena sea finita porque el horizonte del consumidor también es finito. Ver Ross (1996), Feldman y Váldez-Flores (1996), Isaacson y Madsen (1976) o Williams (1979) para obtener mayor información acerca de las cadenas de Markov y sus propiedades.

condición, los estados trasientes de la cadena previos a la terminación de su período de planeación T(D) serían, desde su punto de vista, estados de equilibrios subóptimos debido a que, como se explica en Goddard y Ramírez (1998), definirían una submartingala en la selección óptima de sus atributos[29]. Del mismo modo si P_{ij} es cero, denotando la existencia de estados recurrentes en el periodo T(D), el consumidor podría concluir que la experimentación con nuevas funciones de valor no mejoraría sus expectativas de consumo, o bien, que la restricción presupuestaria sobre sus controles se habría vuelto obligatoria. En este caso el consumidor experimentaría un equilibrio estable o, dicho con mayor precisión, una martingala en la selección de sus atributos. Una cadena con probabilidad positiva de regresar a un ordenamiento anterior definiría, en este contexto, una supermartingala en su proceso de aprendizaje.

La importancia de elegir una cadena de Markov con estas características es más evidente cuando el vector de las variables de estado $v_t(z_t)$ no puede ser observada directamente sino por medio de la ecuación de información $o_t = h_t(v_t(z_t))$. Esta es la situación que se presenta cuando el consumidor elige sus atributos de acuerdo con un modelo de selección preestablecido (digamos con una función de valor lexicográfica), que no necesariamente coincide con los atributos observados en el conjunto disponible $\Omega_t = \{o^t, x^{t-1}, t\}$; donde los superscriptos indican la colección de variables consideradas, por ejemplo $x^{t-1} = \{x_0, \ldots, x_{t-1}\}$[30]. En este caso, el procedimiento para inferir $v_t(z_t)$ de o_t es, simplemente, dándole una forma funcional aditiva a 1.1 como en (6)

$$o_t = v_t(z_t) + \zeta_t \qquad (6)$$

Lo que sugiere esta ecuación es que, debido a que los atributos reales de los bienes son aleatoriamente seleccionados con arreglo a un vector de desviación ζ_t, cualquier política de control óptima del consumidor, π_t, deberá, en consecuencia, ser obtenida recursivamente. La razón es que con selecciones sesgadas por un modelo de elección de atributos es imposible calcular, como en efecto sucede cuando $v_t(z_t) = o_t$, una política óptima para cada $v_t(z_t)$. En estos casos, las políticas de control estarían definidas, mas bien, por secuencias de distribuciones de probabilidad en

[29] Un proceso estocástico es una martingala si $E[|Z_n|] < \infty$ y $E[Z_{n+1} / Z_1, Z_2, \ldots, Z_n] = Z_n$; una supermartingala si $E[Z_{n+1} / Z_1, Z_2, \ldots, Z_n] \leq Z_n$; y una submartingala si $E[Z_{n+1} / Z_1, Z_2, \ldots, Z_n] \geq Z_n$, donde Z_t (para t=1,...,n) puede ser cualquier variable de estado, como (en nuestro caso) $v_t(z_t)$. Intuitivamente esto quiere decir que si un consumidor experimenta una martingala en su utilidad esperada en el período t, sus niveles de satisfacción no cambiarán en el período $t+1$ aún con mayores adiciones de bienes consumido. En ese punto el consumidor habrá descubierto su mezcla óptima de atributos. En caso de que no sea así el necesitará probar nuevas unidades de bienes para mejorar sus niveles de utilidad (submartingala) o , bien, suspender el consumo de nuevas unidades debido a que sus niveles de utilidad sucesivos son inferiores a los registrados en el período anteriores (supermartingala). La utilidad esperada vista así puede presentar distintas situaciones de equilibrio distintas en la conducta del consumidor, que no han sido ampliamente exploradas por la TUT.

[30] Si denotamos por Ω_t al conjunto de información disponible para el consumidor en el período t, entonces se dice que $v_t(z_t)$ es observado exactamente cuando $\Omega_t = \{v_t(z_t), u \quad, t\}$, en caso contrario $\Omega_t = \{o^t, u^{t-1}, t\}$. En el primer caso $v_t(z_t) = o_t$, en el segundo $v_t(z_t)$ tiene que ser relacionado a los datos observados o_t por medio de la ecuación 1.1 del sistema (4).

las que el control en el tiempo t dependería de la colección de observaciones o^t y de los controles pasados x^{t-1}, esto es:

$$p_{\pi_t}\left(v_{t+1}(z_{t+1})/v_t(z_t),o^t\right)=p\left[v_{t+1}(z_{t+1})/v_t(z_t),x_t=\pi_t\left(o^t,x^{t-1}\right)\right] \quad (7)$$

Las condiciones para encontrar la secuencia (7), también llamada secuencia de optimización de *feedback*[31] (y no de *open loop*), parten de estimar recursivamente o^t, lo cual es factible si y solo si las densidades condicionales $p\left(v_t(z_t)/o^t,x^{t-1}\right)$ y $p\left(o_{t+1}/o^t,x^t\right)$ son disponibles, los vectores $\theta_t(\alpha_t)$ y ζ_t de las ecuaciones (5) y (6) son mutua y serialmente independientes (y además con densidades de probabilidades conocidas) y las ecuaciones 1 y 1.1 contienen sólo parámetros conocidos (Aoki, 1989). Estas condiciones, en su conjunto, son satisfechas si existe un plan o regla de Markov que garantice que o_t sea un estadístico *suficiente* de $v_t(z_t)$ o lo que es igual que haga que: $p\left(v_t(z_t)/o^t\right)=p\left(v_t(z_t)/o_t\right)$ y que $p\left(o_{t+1}/o^t,x_t\right)=p\left(o_{t+1}/o_t,x_t\right)$.

La interpretación de estos resultados es muy importante para la comprensión del fenómeno de aprendizaje. En particular, si el consumidor desconoce inicialmente el conjunto disponible de atributos que puede adquirir a través de la compra de bienes (dada su restricción presupuestaria), esto no será un obstáculo para determinar su control óptimo pues la existencia de una regla de Markov le permitirá inferir su función de valor (regulado por la ecuación 1) de la función de observación actualizada (ecuación 1.1). La forma en que el consumidor logra hacer esa inferencia, o mas formalmente derivar el control óptimo x_t^* como una función de o_t en vez de o^t, es mediante el ajuste de la secuencia (7) de las dos ecuaciones anteriores, que son llamadas ecuaciones markovianas de adaptación. Con estas ecuaciones, el consumidor estará en condiciones de realizar ajustes cada vez mas fino de su ordenamiento de preferencias, debido a que la cantidad de bienes que elige en el periodo t (de donde obtiene la mezcla óptima de atributos) contiene toda la información *observada* de los periodos $t-1$.

Cuando el modelo de selección es igual al observado y, por lo tanto no es necesaria la ecuación 1.1, los ajustes de ordenamiento de preferencias son todavía aún más rápidos. La razón estriba en que la ecuación de transición (1), garantiza que $v_{t+1}(z_{t+1})$ pueda ser obtenida de $v_t(z_t)$ y de x_t y, en consecuencia, el consumidor no tendrá la necesidad de ajustar su modelo de selección (dado por sus funciones de valor) a los datos observados (atributos de bienes ya experimentados).

La cualidad de encadenar los ordenamientos de preferencias mediante procesos estocásticos *con memoria*, hace que las ecuaciones markovianas de adaptación sean adecuadas para modelar

[31] "Conceptualmente lo que distingue a las estrategias *feedback* de las estrategias *open-loop* es que una estrategia *feedback* consiste de un plan de contingencia que indica lo que es mejor hacer para cada valor de la variable estado en cada punto del tiempo, en vez de solo hacer lo mejor para cada punto del tiempo desde el inicio [del horizonte de planeación]" Kamien y Schwartz 1991, 275)

secuencias de decisiones que requieren equilibrios intertemporales. La elección de cualquier ordenamiento de atributos con estas ecuaciones asegura que la utilidad derivada por el consumidor en un periodo determinado sea al menos igual que la de los periodos antecedentes. El conocimiento progresivo de la cantidad y tipo de bienes que garantizan la mezcla optima de atributos es un medio para eliminar la incertidumbre que experimenta el consumidor al desconocer alguna información sobre los bienes. Sin embargo, como veremos en el apartado II.4, ese conocimiento no siempre conduce a una reducción en la varianza de su ordenamiento de preferencias, por lo que es posible observar diferentes situaciones de equilibrio de las que se obtendrían con información completa.

Descripción de las Variables y Supuestos

El segundo problema que supone el tratamiento del sistema (4) se relaciona con el tipo de variables y supuestos involucrados en la optimización del modelo. En general, es necesario describir el grupo de variables y supuestos que están relacionados con: las funciones de valor y de utilidad, la tecnología de consumo, la restricción presupuestal y los períodos de consumo considerados en dicho sistema. Cada uno de estos elementos contiene particularidades que conviene comentar por separado.

Funciones de valor e información incompleta

Como ya se ha mencionado, las funciones de valor $v_t(\mathbf{z}_t)$ de un sistema como (4) están definidas sobre los atributos y no sobre los bienes. Se trata de funciones compuestas que filtran los cambios de utilidad del consumidor por unidad de gasto con base en dos supuestos cruciales. Primero, que el consumidor no es capaz de distinguir más que el nivel global de utilidad, debido a que el alto nivel de complejidad de los bienes le impide estimar la utilidad que obtiene de cada uno de los atributos[32]. Y, segundo, que existe independencia mutua entre los r atributos considerados y todos los otros atributos de bienes que no están en el grupo considerado; esto con el fin de permitir que el consumidor pueda evaluar el grupo de bienes **B** sin ocuparse de los otros bienes disponibles en los grupos restantes.

Aunque estas funciones consideran por lo general preferencias ordinales, en las que se cumple la condición de que $v(\mathbf{z}) \succ v(\mathbf{z}')$ si y solo si $z \succ z'$ las incluidas en el sistema (4) presuponen ordenamientos cardinales por unidad de gasto. La razón es que incorporan las diferencias relativas entre los bienes de **B** y, por lo tanto, poseen todas las propiedades de una escala con intervalos. En caso de utilizarse preferencias ordinales, el análisis con programación dinámica sería más complicado y el resultado sobre los parámetros sería también ordinal y no cardinal[33].

En virtud de que la selección de atributos se desarrolla con información incompleta, las funciones de valor guardan cierta relación con la varianza de las preferencias. Primero, ya que la información que necesita obtener el consumidor es mayor con bienes más complicados, la varianza crece en relación

[32] Si los consumidores pudieran obtener una descomposición de la utilidad por cada característica, solamente necesitarían consumir un bien con una mezcla de todos los atributos para poder evaluar la utilidad derivada de todos los bienes en el mercado.

[33] Es importante remarcar que este supuesto no es desatinado, pues existen estudios de preferencias en psicología aplicada que lo adoptan para evaluar bienes con atributos múltiples, (Fischer 1975).

directa con el número de atributos que caracteriza al bien; esto es: $Var(v_t(\mathbf{z}_t)) = f(r)$. Segundo, la varianza disminuye al ir aumentando el conjunto de información del consumidor a causa de que el individuo prueba bienes que no ha consumido en el pasado. Tercero, la varianza de $v_{t+1}(\mathbf{z}_{t+1})$ es, por lo general, menor o igual a la varianza de $v_t(\mathbf{z}_t)$ debido a la existencia de una martingala en el consumo de atributos ya probados. Cuarto, la varianza será igual a cero si el consumidor prueba suficientes bienes como para caracterizar totalmente su función de utilidad.

La Función de Utilidad Intertemporal

La función $U(\bullet)$ pondera las utilidades que deriva el consumidor de sus funciones de valor a lo largo de T(D), como si se tratara de funciones de utilidad indirecta de los atributos. Esta ponderación es intertemporal y depende de las formas funcionales seleccionadas (y que aparecen descritas en la tabla 1). El problema, como ya vimos, es que varias formas funcionales de relacionar los atributos que producen diferentes esquemas de optimización, por lo que es importante ser cuidadoso en la especificación de la función $U(\bullet)$.

La Tecnología de consumo

B es una matriz de tamaño $(r \times m)$ que es esencial dentro del sistema (4) porque enlaza los espacios de bienes y atributos y, por consiguiente, permite al consumidor realizar conjeturas sobre la utilidad de los bienes que no ha probado. Los bienes que el consumidor puede probar son un subconjunto del total de bienes disponibles en el mercado. En particular, son el subconjunto de bienes que, al compartir los mismos r atributos, forman una tecnología de consumo que los hace "intrínsecamente similares". Entre los atributos que comparte se encuentran el precio del bien, la calidad del mismo, y todas las otras características que en conjunto describen la naturaleza del bien, a la vez que permiten *diferenciarlo* de otros posibles sustitutos. Los atributos que son iguales para los m bienes no se incluyen en **B**[34].

Restricción presupuestal

La restricción presupuestal presentada en (4) indica, como es usual, que el precio por unidad de cada bien, **p**, multiplicado por las cantidades que el consumidor decide adquirir en cada período de los distintos bienes $\mathbf{x}_t$, debe ser menor o igual a su ingreso disponible, y. Este ingreso no es el ingreso total sino la cantidad de dinero asignada por el consumidor al gasto en el grupo de bienes analizados durante cada período. En virtud de que es el resultado de un proceso de maximización global sobre

[34] El número de atributos es una medida de la complejidad de los bienes, mientras que el número de productos mide la complejidad o diversificación que existe en el mercado. Al respecto, Lancaster señala que si la matriz de bienes fuera diagonalizable, los subconjuntos no compartirían ningún atributo y así sería fácil separar los distintos grupos. Sin embargo, dado que los atributos incluyen al precio, la calidad y otras características que probablemente comparten todos los bienes en el mercado, seguramente existirán *traslapes* entre los atributos incluidos en los subconjuntos..

Tiempo y costo de oportunidad temporal

En el sistema (4) se supone que el tiempo es discreto y, además, que el número de periodos *T(D)* es finito. La limitación en el número de periodos tiene varias justificaciones. La primera es que se necesita esta condición para que el funcional converja en caso de no existir desutilidad intertemporal; la segunda es que el número de periodos de consumo es una función decreciente del costo temporal de consumir; y la tercera es que es más realista suponer que las decisiones son hechas secuencialmente y que los individuos tienen un límite de tiempo para realizar su consumo.

También se supone que *T(D)* es una función decreciente del costo temporal de consumir, *D*, el cual incluye el tiempo de búsqueda y el tiempo necesario para consumir una unidad del bien (su durabilidad). En consecuencia, este número máximo de periodos de consumo es una medida aproximada de la frecuencia con la que se puede consumir la clase de bienes considerados en **B**[36]. Este supuesto sobre el costo temporal permite encontrar los efectos de una mayor durabilidad y costo de búsqueda sobre las trayectorias de consumo, además de que hace posible diferenciar el aprendizaje posible entre un grupo de bienes intrínsecamente similares y otro grupo[37].

Propuestas de Solución

El tercer tipo de problemas que supone el tratamiento del sistema (4) es el método de solución. Se sabe que un problema de optimización que incluye funcionales de utilidad tradicionales es regularmente resuelto tras especificar la forma analítica de estas últimas. El supuesto de que la utilidad (medida en *utiles*) es una función decreciente del consumo (medida en cantidad de bienes) opera como un poderoso instrumento para garantizar la conducta óptima del consumidor. Las técnicas de optimización dinámica permiten, en esos casos, determinar las trayectorias intertemporales de consumo para horizontes infinitos de planeación o para segmentos discretos del intervalo en los que está especificado la variable de control.

La situación cambia cuando el funcional no incluye una relación monótona decreciente entre la cantidad consumida de un bien y su utilidad reportada. La eliminación de la correspondencia

---

bien le da más información reduce sus opciones en el mercado, ya sea porque disminuye su ingreso o simplemente porque hay un número menor de bienes asequibles. Por lo tanto, es necesario diferenciar entre la tecnología de consumo que puede haber para un determinado grupo de bienes y la *tecnología de consumo asequible* que existe cuando una restricción presupuestal elimina a ciertos bienes de las opciones de consumo.

[36] El tiempo de búsqueda está relacionada con el "costo de búsqueda" de la teoría tradicional, que no es mas que el costo directo que paga el consumidor por conocer la utilidad que deriva de un bien.

[37] Aún en el caso de dos tecnologías de consumo similares (**B** de igual tamaño) los resultados pueden ser muy distintos al cambiar la durabilidad del producto y el costo de tiempo invertido en obtenerlo. En lo que concierne a este costo temporal, recuérdese que aún en un grupo de bienes de consumo frecuente, como "comidas en restaurantes", existe un impedimento temporal derivado del hecho de que un consumidor no puede probar más de un restaurante distinto en cada comida. Si el consumidor enfrenta restricciones de tiempo adicionales, como ir a trabajar o transportarse al lugar, el costo temporal de asistir a dicho restaurante podría ser aún mayor. Asimismo, la durabilidad del bien es otro factor fundamental que hay que considerar, pues un bien que no necesita ser reemplazado en mucho tiempo disminuye el tiempo de consumo al reducir la frecuencia con la que el consumidor puede probar ese bien. Por ejemplo, bienes más durables que comidas, como coches o lavadoras, tendrían un valor más bajo de *T(D)*, por su menor frecuencia de reemplazo.

inyectiva entre esas dos dimensiones supone duros retos al cálculo de las trayectorias estables de consumo, porque impide contar con una política de control $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{T(D)}\}$ válida para todo el segmento considerado. Este es el caso que se presenta al introducir FUMAT, en las que la elección de mas de un atributo en un bien produce "traslapes" en las funciones de valor del consumidor[38]. Los "traslapes" actúan, por lo general, como un formidable obstáculo para la identificación de la cantidad única de bienes que generan la máxima utilidad y, en consecuencia, para la evaluación de las trayectorias factibles que satisfacen la ecuación de Jacobi- Hamilton-Bellman[39].

Las posibles soluciones a este problema pueden encontrarse en la teoría de latices y en la programación dinámica estocástica. La primera solución es sugerida por la aplicación de la teoría de los latices que hacen Milgrom y Roberts (1990) en otra área de la Economía[40]. Mediante el uso de las estructuras algebraicas de los latices, los autores estiman los efectos de los traslapes o "sinergias" en funciones de producción conjuntas. La adaptación de esa teoría al estudio de las FUMAT puede resultar de gran importancia para identificar vectores de atributos "mas preferidos", de productos considerados "vecinos cercanos". La forma de ilustrar esta idea es relacionando, a manera de ejemplo, algunos elementos del álgebra de latices con las preferencias del consumidor.

Si un *latiz* es un conjunto ordenado en el que cualquier par de elementos a y b tiene un supremo ($a \vee b$) y un ínfimo ($a \wedge b$), entonces se puede decir que un conjunto de atributos preordenados (con base en funciones de valor) es, por definición, un *latiz (L)* . En caso de que el consumidor logre ordenar sus atributos en subconjuntos que posean individualmente un ínfimo y un supremo, entonces sus preferencias sobre los atributos de todos los bienes disponibles con su presupuesto definirán un *latiz completo*. Los bienes que son "vecinos cercanos", y que se agrupan en cada subconjunto de L forman, por su parte, los *sublatices* del consumidor. La representación dinámica del ordenamiento de sus preferencias debido a cambios en el vector de parámetros α puede observarse a través de una clase especial de latices denominado *latices modulares* o *latices* de *Dedekind* (véase Cohn 1965)

Para hacer que estos conceptos sean operativos en el problema de optimización del sistema (4), es importante definir un tipo de función que refleje las mejoras en el ordenamiento de las preferencias del consumidor sobre los atributos, a medida que éste incorpore mayor información. Al respecto, Milgrom y Roberts (1990) proponen el uso de funciones supermodulares, como las siguientes, para estudiar cualquier clase de *complementariedades* o sinergias que, como en nuestro caso, son producidas por agentes endógenos al sistema (mayor conocimiento de las preferencias).

---

[38] Los "traslapes" surgen porque atributos de distintos bienes pueden generar el mismo nivel de utilidad (o tener el mismo ordenamiento de preferencias), pero no la misma demanda de bienes. Es decir, se podría tener la misma cantidad de bienes pero diferentes niveles de utilidad. Los traslapes violan el supuesto de convexidad supuesto en el teorema del máximo de Weierstrass.

[39] Masanao Aoki (1989: 367) afirma que "los problemas de decisión secuencial generalmente no admiten soluciones analítica de forma- cerrada (*closed form*)" y que, " aún si restringimos la atención a una clase de problemas con ecuaciones lineales e índices de desempeño quadráticos, solo se pueden obtener controles Bayesianos óptimos en la forma analíticamente cerrada para casos especiales".

[40] Jonard y Yildizoglu (1997) también hacen uso de las latices en un modelo económico para medir la distancia entre firmas, en el contexto de una industria evolutiva en la que existe aprendizaje "localizado" y externalidades.

$$f\left(max(x,x')\right)-f\left(min(x,x')\right)\geq f(x)-f\left(min(x,x')\right)+\left[f(x')-f\left(min(x,x')\right)\right] \quad (8)$$

donde $x, x' \in R^n$

$x \geq x'$ si $x_i \geq x'_i \ \forall i$

Estas funciones indican que la suma de cambios producidos por incrementos conjuntos de los argumentos es mayor que la suma de los incrementos de esos argumentos por separado. Dicho en términos de nuestro problema, la ecuación expresa que la suma de la utilidad derivada por un mejor ordenamiento de preferencias es mayor con un conocimiento de los atributos (argumentos unidos) que sin él (argumentos separados).

La aplicación de estas funciones a los latices de los ordenamientos de atributos no es, sin embargo, inmediata debido a que el dominio del funcional puede presentar no convexidades. Esto acontece porque la superficie descrita por los latices de ordenamientos de productos que no son "vecinos cercanos" exhibe huecos o vacios en la elección del consumidor (con lo cual el latiz dejaría de ser completo), que hacen dudosa la aplicación de cualquier técnica de optimización. Para subsanar esto, es necesario construir un latiz de optimizadores, tal como lo sugieren Milgrom y Roberts (1990), para grupos de bienes que comparten ciertos atributos en común y, ordenar con base en él, las funciones de valor más altas o más bajas con determinada combinación de bienes (controles). Esto ayudara a decidir, en caso de múltiples soluciones, cual combinación de bienes produce un latiz modular (y por lo tanto genera el mismo nivel de utilidad para el consumidor, debido a su cercania) y cuales no.

La segunda propuesta de solución para el sistema (4) consiste en aplicar el algoritmo de la programación dinámica (PD) a los productos que son "vecinos cercanos". La idea es extraer las trayectorias estables de consumo en cada periodo t, $t = 0,1,\ldots,T(D)$, del conjunto de trayectorias factibles formado sólo por los bienes que incluyen los atributos "más preferidos". La justificación para proceder de esta manera es evitar el famoso problema de dimensionalidad (mencionado reiteradamente por Bellman) que resulta de contar con estructuras diferentes en los espacios de la variable de control $\mathbf{x}_t$, de estado $v_t(\mathbf{z}_t)$ y de perturbación α_t.

El supuesto crucial en cualquier caso es que el funcional se comporte como una variable aleatoria bien definida y, para ello, debe suponerse que para cada $\{\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_{T(D)}\}$ existe un espacio de probabilidad Ω y una medida de probabilidad de los eventos de Ω. La propuesta hecha en el apartado II.2., en el sentido de que la variable aleatoria (α_t) sigue un proceso estocástico de una cadena de primer orden y reversible de Markov, permite asegurar que los valores esperados de todos los términos del funcional en (4) existan y que son finitos para cualquier política de control admisible.

Las expresiones que se derivan de transformar (4) al algoritmo de la PD, si se adopta una solución del período *T(D)* al período *0* (*backward induction*), son:

$$J_{T(D)}\left(v_{T(D)}\left(\mathbf{z}_{T(D)}\right)\right)=0 \quad (9)$$

$$J_t\left(v_t(\mathbf{z}_t)\right)=\max_{0\leq \mathbf{z}_t \leq T(D)-1\,\alpha_t} E\left\{max\left(0, v_t(\mathbf{z}_t)\right)+J\left[max\left(0, v_{t+1}(\mathbf{z}_{t+1})\right)\right]\right\} \quad (10)$$

La explicación de estas dos ecuaciones es directa. La primera indica que el valor de desempeño o Jacobiano, $J_{T(D)}\left(v_{T(D)}\left(\mathbf{z}_{T(D)}\right)\right)$, es igual a cero porque satisface la condición final del problema. En ese punto, el período *T(D)*, el consumidor ha terminado su proceso de experimentación y, por lo tanto, ha alcanzado el mejor ordenamiento de preferencias sobre los atributos con el ingreso e información disponibles. La segunda ecuación sugiere, en cambio, que los valores de desempeño óptimo para cada período son resultado de la maximización resultante de los ordenamientos de las funciones de valor tanto en el período t como en $t+1$. Es claro que la ecuación de Bellman solo admite valores contemporáneos de los argumentos, por lo que es necesario hacer la transformación de $J_{t+1}\left(v_{t+1}(\mathbf{z}_{t+1})\right)$ a términos en t mediante la ecuación de movimiento.

La mayor dificultad técnica que supone la solución de $J_t\left(v_t(\mathbf{z}_t)\right)$ estriba en la definición de los vectores formados por la función de valor y las probabilidades que se asignan a las variables aleatorias en cada período. Si se logra estimar cuantitativamente las preferencias de los atributos en cada ordenamiento $v_t(\mathbf{z}_t)$, asociándoles sus respectivas probabilidades de transición, y además se logra dar una ponderación, también cuantitativa, a los atributos más preferidos de cada bien, entonces la solución de la Ecuación de Bellman dará en cada período la mezcla de bienes óptima que condensa los atributos más preferidos por el consumidor. En caso contrario, el proceso de solución sería caótico y no tendría ningún sentido económico.

Con las condiciones arriba descritas lo que haría falta para aplicar el algoritmo de la PD sería, primero, darle una forma funcional a $v_t(\mathbf{z}_t)$, a fin de tener los ponderadores de los atributos en cada bien α_t y, segundo, obtener los ajustes sucesivos de los ponderadores y valores de desempeño para cada vector de atributos ponderados (variable de estado)[41]. Estos resultados serían más inteligibles si el número de bienes y atributos no es muy grande.

En caso de que las decisiones de consumo se ajusten a un sistema markoviano de adaptación, esto es cuando las funciones de valor tienen que ser inferidas de las funciones de observación, la optimización se vuelve más compleja. La razón es que los valores óptimos de desempeño dependerían ahora del estadístico que resume la información observada en el tiempo t, o_t, y no de $v_t(\mathbf{z}_t)$, esto es: $J=\sum_{t=1}^{T(D)} U_t\left(o_t, x_{t-1}\right)$. A esto habría que agregar que la evaluación del valor esperado de J no se obtendría directamente sino por medio de la secuencia de medias

[41] Nótese una vez más que, aun con todas estas cvonsideraciones, de todos modos su solución intertemporal con información incompleta es, como escribe Beckmann (68: 78-79), "extremadamente difícil". Para una exposición detallada de los problemas que supone la optimización estocástica consultese a Kolbin (1977), Birge y Loveaux (1997), Arkin y Evstigneev (1987) o Aoki (1989).

condicional: $EJ = E\left(U_t / o^{t-1}, x^{t-2}\right) = \int U_t\left(v_t(z_t), x_{t-1}\right) p\left(v_t(z_t), x_{t-1} / o^{t-1}, x^{t-2}\right) dv_t(z_t), dx_{t-1}$, de la cual se genera, recursivamente, la regla de Markov para $p\left(v_t(z_t) / o^t, x^{t-1}\right)$ y $p\left(o_{t+1} / o^t, x_t\right)$.

Estas complicaciones obligan a maximizar, indirectamente, el funcional en términos de ρ_t, que es una probabilidad condicionada del control en relación al estadístico de observación, y no del control directamente, como es usual:

$$\max_{\rho_t} E\left(\sum_{t+1}^{T(D)} U_t / o^t, x^{t-1}\right) \quad (11)$$

donde

$$\rho_t(x_t) = p\left(x_t / o^t, x^{t-1}\right)$$

En consecuencia el procedimiento de solución de (11) es distinto ya que ahora hay que definir una expresión que incorpore las densidades de probabilidades asociadas a la regla de Markov. Esta expresión, descrita en (12) y (13), supone que esas densidades sean conocidas y, concretamente, que $p\left(o_t / o^{t-1}, x^{t-1}\right)$ y $p\left(v_{t-1}(z_{t-1}) / o^{t-1}, x^{t-1}\right)$ sean disponibles.

$$\gamma_t = \lambda_t + \int \gamma_{t+1}^{*} p\left(o_t / o^{t-1}, x^{t-1}\right) do_t \quad (12)$$

con:

$$\lambda_t = \int U_t\left(v_t(z_t), x_{t-1}\right) p\left(v_t(z_t), v_{t-1}(z_{t-1}), x_{t-1}\right) \times p\left(v_t(z_t) / o^{t-1}, x^{t-2}\right) d\left(v_t(z_t), v_{t-1}(z_{t-1})\right) \quad (13)$$

A diferencia de lo que acontece cuando el sistema es regido sólo por la ecuación de transición, aquí los controles se derivan computando recursivamente a γ_t, por lo que si se desea calcular el control, digamos para el período t-1, entonces hay que determinar un x_{t-1} que maximice la ecuación (12), o dicho brevemente uno que $\max_{x_{t-1}} \gamma_t = \gamma_t^{*}$. Para tal efecto se requiere de computar, primero, $p\left(v_t(z_t) / o^t, x^{t-1}\right)$ por la fórmula de Bayes para, después, sucesivamente: obtener λ_{t+1}, generar $p\left(o_{t+1} / o^t, x_t\right)$, evaluar $E\left(\gamma_{t+2}^{*} / o^t, u^t\right)$, encontrar γ_{t+1} y, finalmente, maximizar γ_{t+1} con respecto a x_t. El orden de derivación de estos controles es de adelante hacia atrás, aunque su uso es en sentido inverso. La razón es que de esta manera es posible contar en cada tiempo t con los valores *contemporáneos* de $x_0^{*}, \ldots, x_{t-1}$ y $y_0, \ldots, y_t$, que conforman la política de control $x_t^{*} = \pi_t\left(x_0^{*}, \ldots, x_{t-1}, y_0, \ldots, y_t\right)$.

La explicación a estos resultados, así como las diferencias de los dos método de optimización del sistema (4), son más claros si (13) es puesta en el formato de la ecuación de Bellman (véase ecuación 14), y se compara con (10).

$$\gamma_t(o_{t-1}) = \max_{x_{t-1}}\left[\lambda_t(o_{t-1}, x_{t-1}) + E\left(\gamma^*_{t+1}(o_t) / o_{t-1}, x_{t-1}\right)\right] \quad (14)$$

La primera observación que salta a la vista es que mientras en (10) el Jacobiano $J_t(v_t(\mathbf{z}_t))$, es maximizado como si se tratara de un sistema autoajustable, en (14) el camino es más tortuoso. En (10) el consumidor descubre sus preferencias de los atributos más cercanos con base en una ecuación de movimiento de las funciones de valor, es decir: período a período decide que atributos elegir con base en un modelo preestablecido. El modelo le permitirá ordenar sus preferencias hasta el punto en que logre probar todos los bienes asequibles a su presupuesto y su control le reporte la máxima utilidad asociada a una varianza cero en la selección de sus atributos. En (14), la funciones de valor no pueden, en cambio, por si solas ayudar a descubrir la mezcla optima de sus atributos, debido a que requieren ser construidas de acuerdo a los fragmentos de observación que él compila tras probar cada unidad. En caso de que estas observaciones no conduzcan a formular una función de valor que minimice la varianza de sus preferencias en t, entonces los controles arrojados en el período $t+1$ podrían ser mas altos que los deseados. De aquí que las varianzas de las preferencias del consumidor puedan resultar mas dispares en (14) que en (10), suponiendo constante la duración, complejidad y tecnología de los bienes asequibles.

La segunda, y última observación, es que debido precisamente a esa diferencia, las posibilidades de obtener diversos equilibrios son mayores en (14) que en (10). La explicación reside en que, contrario a lo que sucede en (10), la matriz **B** puede adoptar en (14) diversas formas de acuerdo a la calidad de la información recopilada por el consumidor. Esta matriz puede no ser construida adecuadamente si el consumidor en cuestión no elige una función de valor acorde, por ejemplo, a la durabilidad o calidad del bien. En esa situación, los fragmentos de información procesados por el consumidor podrían contaminar el sistema de ajuste markoviano y arrojar controles mayores o menores al óptimo. En (10) lo más probable es que, al coincidir las ecuaciones de observación con las de transición, la matriz **B** sea descubierta de tal suerte que le permita al consumidor reducir paulatinamente la varianza de sus preferencias. Esto, incluso, puede favorecer la aplicación de la estrategia de optimización *open loop* a diferencia de lo que ocurre con el sistema (14) que solo admite estrategias de *feedback*

Conclusiones

El trabajo ilustra la importancia de las FUMAT en el estudio de las preferencias de un consumidor que cuenta con información incompleta sobre los atributos disponibles en el mercado de bienes. El objetivo principal es plantear un modelo de optimización dinámica que determine la cesta óptima de bienes, es decir aquella que contiene la mezcla de atributos deseados, que dicho consumidor selecciona escolásticamente.

El procedimiento incluye dos secciones. En la primera se introduce el "nuevo enfoque del consumidor" con el fin de contextualizar el modelo determinístico elaborado originalmente por Lancaster. En la segunda se propone un sistema de adaptación markoviano para caracterizar el proceso de aprendizaje de un consumidor que reordena sus preferencias a medida que prueba nuevos bienes.

Entre las conclusiones más importantes del trabajo cabe destacar dos en particular: 1) que la optimización con funciones de bienes es un caso particular de la realizada con FUMAT y 2) que una manera adecuada de optimizar modelos de aprendizaje basados en FUMAT es mediante el uso de sistemas markovianos de ajuste. En cuanto a la primera conclusión poco hay que agregar, salvo que la inclusión de la matriz **B** en los sistemas (3) y (4) es el instrumento que permite obtener resultados mas generales en la determinación de los controles. La diversidad de formas de relacionar **z** y **x** a través de la matriz **B**, dado un número de r atributos, m actividades y n bienes, produce infinidad de controles óptimos no previstos por la TUT. En particular solo en el caso en que $r = m = n$ y que **A** sea invertible, la optimización de (3) será igual al propuesto por la TUT en el que hay correspondencia biunívoca entre **z** y **x**

La segunda conclusión requiere, en cambio, una respuesta más acabada. Para empezar el sistema (4) aquí propuesto no es solo una extensión del modelo original de Lancaster sino una nueva presentación, que incluye varias novedades. Una novedad es el funcional construido con funciones de valor (o funciones de utilidad indirectas ponderadas por atributos) que condensan la información recabada en cada período por el consumidor. Esa información es enviada a la matriz B y procesada como punto de partida para el ordenamiento del siguiente período. Otra novedad es que el mecanismo de traslado de esa información es filtrada por las ecuaciones markovianas (transición y observación), dependiendo de la naturaleza de la información. Si el consumidor descubre su mezcla de atributos mediante un modelo preestablecido (esto es, sólo mediante la ecuación de transición), entonces la probabilidad de obtener un control óptimo, cercano al que obtendría con información completa (o nula varianza en la selección de los atributos deseados) es mayor a medida que prueba mas bienes. Si, por el contrario, "descubre" o "construye" la matriz **B** con fragmentos de observaciones, sobre las cuales replantea sus funciones de valores (esto es usando simultáneamente las ecuaciones de transición y observación), entonces la probabilidad de seleccionar los controles óptimos es una función directa de la calidad de la información recabada. En caso de que ésta sea deficiente, en el sentido de que no agrega nada a sus niveles de utilidad, los controles obtenidos mediante el método recursivo, recién descrito, estarán muy alejados del nivel deseado (la mezcla óptima de atributos).

Una última novedad del texto es su sugerencia, no desarrollada, de que el uso de las FUMAT podría robustecer el análisis dinámico de la teoría de la utilidad esperada y de las ***loterías***. La razón es que la elección de un conjunto de bienes por parte de un consumidor que elige bajo incertidumbre no puede ser vista nada mas como una lotería en abstracto, sino más bien como una lotería sobre atributos que son ajustados período tras período. La propuesta aquí insinuada de modelar esas loterías con sistemas markovianos permitiría conocer variaciones en la conducta del consumidor, ante cambios en los parámetros (durabilidad o complejidad de los bienes) o en las condiciones iniciales (mejoras del ingreso, por ej.), que han recibido poca atención en la microeconomía tradicional y que darían un toque de mayor realismo a los procesos de aprendizaje del consumidor bajo situaciones cambiantes.

Bibliografía

Aoki, Masanao (1989), *Optimization of Stochastic Systems: Topics in Discrete-Time Dynamics*, Second edition, Academic Press, Londres.

Archibald, G.C. y G. Rosenblueth (1975), "The "New" Theory of Consumer Demand", *Quarterly Journal of Economics*, Vol. LXXXIX.

Archibald, Robert B. y Catherine S. Elliot (1989), "Trial-and-Error Learning and Economic Models", *KYKLOS*, Vol. XLII.

Arkin, Vadim I. y I.V. Evstigneev (1987), *Stochastic Models of Control and Economic Dynamics*, Academic Press, Londres.

Bala, Venkatesh y Sanjeev Goyal (1995), "A Theory of Learning with Heterogeneous Agents", *International Economic Review*, Vol. XXXVI.

Baumol, William J. (1967), "Calculation of Optimal Product and Retailer Characteristics: The Abstract Product Approach", *The Journal of Political Economy*, Vol. LXXV.

Beckmann, Martin J. (1968), *Dynamic Programming of Economic Decisions*, Springer-Verlag, Nueva York.

Bell, David E., Howard, Howard Raiffa y Amos Tversky, eds., (1988), *Decision Making: Descriptive, Normative, and Prescriptive Interactions*, Cambridge University Press, Cambridge.

Birge, John R. (1997), *Introduction to Stochastic programming* (Springer Series in Operations Research), Springer-Verlag, New York.

Cohn, P.M. (1965), *Universal Algebra*, Harper International, Londres.

Cyert, Richard M. y Morris H. De Groot, "Adaptive Utility" en Day, Richard H. y Theodore Groves, eds., (1975), *Adaptive Economic Models*, Academic Press, Londres.

Deton, Angus y John Muellbauer (1980), *Economics and Consumer Behaviour*, Cambridge University Press, Cambridge.

Dixit, A.K. y J.E. Stiglitz (1977), "Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity", *The AmericanEconomic Review*, Vol. LXVII.

Farber, Henry S. y Robert Gibbons (1991), Learning and Wage Dynamics, *NBER Working Paper #3764.*

Feldman; Richard M. y Valdez-Flores C. (1996), *Applied Probability and Stochastic Processes*, PWS Publishing Company, Boston.

Feller, William (1985), *Teoría de Probabilidades y sus Aplicaciones*, Segunda edición, Editorial Limusa, México.

Fischer, Gregory W., "Experimental Applications of Multi-Attribute Utility Models" en Wendt, Dirk y Charles Vlck, eds., (1975), *Utility, Probability, and Human Decision Making*, D. Reidel Publishing Co., Dordretch.

Gale, Douglas y Robert W. Rosenthal (1994), "Price and Quality Cycles for Experience Goods", *RAND Journalof Economics*, Vol. XXV.

Goddard, John y Ramírez, José C. (1998) *Ordenamiento de Preferencias en el Consumo ante Cambios en los Parámetros de los Atributos*, mimeo.

Harvey, John (1996), "Heuristic Judgement Theory", *Post Keynesian Thought Internet Seminar*.

Hay, Donald A. y Derek J. Morris (1991), *Industrial Economics and Organization: Theory and Evidence*, Oxford University Press, Oxford.

Humphreys, Patrick y Alison Humphreys, "An Investigation of Subjective Preference Orderings for Multi-attributed Alternatives" en Wendt, Dirk y Charles Vlek, eds., (1975), *Utility, Probability, and Human Decision Making*, D. Reidel Publishing Co., Dordretch.

Isaacson, Dean L. y Richard W. Madsen (1976), *Markov Chains, Theory and Applications*, John Wiley and Sons, Nueva York.

Jonard, Nicholas y Murat Yildizglu (1997), "Technological Diversity in an Evolutionary Industry Model with Localized Learning and Network Externalities", mimeo, Université Louis Pasteur, Strasbourg.

Kamien, Morton I. y Schwartz, Nancy L. (1991), *Dynamic Optimization (The Calculus of variations and Optimal Control in Economics and management)*, Second edition, Elsevier Science Publishers, Amsterdam.

Keeney, Ralph L. y Howard Raiffa (1976), *Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs*, John Wiley and Sons, New York.

Kolbin, Viacheslav V. (1977), *Stochastic Programming*, D. Reidel Publishing Co., Dordretch.

Lancaster, Kelvin J. (1966), "A New Approach to Consumer Theory", *The Journal of Political Economy*, Vol. LXXVI.

_____ (1975), "Socially Optimal Product Differentiation", *The American Economic Review*, Vol. LXV.

Lancaster, Kelvin J. (1991), *Modern Consumer Theory*, Edward Elgar Publishing Limited, Aldershot.

Malliaris, A. G. y W. A. Brock (1981), *Stochastic Methods in Economics and Finance*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam.

Milgrom, D. y J. Roberts (1990), The Economics of Modern Manufacturing: Technology, Strategy and Organization, *The American Economic Review*, Vol. LXXX.

Nelson, Phillip (1970), "Information and Consumer Behavior", *The Journal of Political Economy*, Vol. LXXVIII.

Ross, Sheldon (1996), *Stochastic Processes*, Segunda edición, John Wiley and Sons, Nueva York.

Von Winterfeldt, Detlof y Gregory W. Fischer, "Multi-Attribute Utility Theory: Models and Assessment Procedure" en Wendt, Dirk y Charles Vlek, eds., (1975), *Utility, Probability, and Human Decision Making*, D. Reidel Publishing Co., Dordretch.

Wilde, Louis L. (1981), "Information Costs, Duration of Search, and Turnover: Theory and Applications", *The Journal of Political Economy*, Vol. LXXXIX.

Williams, David (1979), *Diffusions, Markov Processes, and Martingales*, John Wiley and Sons, Nueva York.

Young, Alwyn (1991), "Invention and Bounded Learning by Doing", *NBER Working Paper #3712*