CIDE

NÚMERO 140

David Mayer

IMPACTO DE LA DISTRIBUCIÓN DE CAPITAL HUMANO SOBRE DEUDA Y CRECIMIENTO: UN ANÁLISIS TEÓRICO DE LOS HECHOS ESTILIZADOS EN LATINOAMÉRICA

Introducción

Para Latinoamérica, las últimas dos décadas se caracterizan por la frustración en el desarrollo económico. Hemos visto, con respecto a los sesentas y setentas, tasas de crecimiento y absorción tecnológica lentas, problemas exacerbados en la distribución del ingreso, endeudamiento, inestabilidad macroeconómica y debilidad del ahorro interno.

Uno de los focos de estos problemas se encuentra en la acumulación de capital humano. En estudios recientes, Birdsall y Sabot (1995) y Birdsall y Londoño (1997) presentan evidencia empírica de que el crecimiento económico es favorecido tanto por el nivel de la educación como por la equidad de su distribución. A la luz de sus resultados, evalúan las políticas del Banco Mundial[1], encontrando que no toman en cuenta el efecto de la inequidad en la distribución del capital humano sobre el crecimiento, y que no han tenido un impacto significativo sobre la pobreza.

El papel de la inequidad como posible freno del crecimiento ha sido estudiado teórica y empíricamente. Alesina y Rodrik (1994) y Persson y Tabellini (1994) encuentran un efecto negativo de la desigualdad sobre el crecimiento en estudios por países. Perotti (1992, 1994, 1996) pone a prueba las teorías principales. Benabou (1997) cita 23 estudios empíricos de la relación entre desigualdad y crecimiento, que encuentran consistentemente que la desigualdad inicial es dañina al crecimiento de largo plazo.

Las teorías que intentan explicar esta conexión tienen varias vertientes. En una de estas los efectos de la distribución actúan a través del balance de poder en el sistema político (Bertola, 1993; Alesina y Rodrik, 1994, Persson y Tabellini, 1994, Benabou, 1995). En estos las presiones de redistribución frenan el crecimiento. En otra vertiente, que inicia Loury (1981), una restricción de crédito en el mercado de capitales impide que los pobres inviertan las cantidades óptimas. Modigliani (1986) enfatiza el papel de la restricción de crédito en aspectos económicos diferentes a la acumulación de capital físico y da lugar a numerosos estudios empíricos que buscan verificarla en el contexto del estudio de la hipótesis del ingreso permanente y del ciclo de vida. Un ejemplo es Jappelli y Pagano (1994), en donde —sin considerar el capital humano— se encuentra que las restricciones de crédito pueden incrementar el crecimiento al favorecer la acumulación de capital. De Gregorio (1994) muestra la conclusión inversa, que la restricción de crédito puede hacer menos eficiente la acumulación del capital humano cuando hay dispersión en las habilidades. Posteriormente, (De Gregorio, 1996), en un modelo de generaciones traslapadas que no incluye la distribución ni costos en la producción de capital humano, excepto los de pérdida de ingreso, concluye que en la presencia del capital humano los efectos sobre el crecimiento pueden ser de ambos signos. Christou (1993) tiene resultados independientes similares. Buiter y Kletzer (1992) muestran que

[1] Estas tienen tres pilares: acelerar el crecimiento económico, la provisión de servicios sociales básicos dirigidos a los pobres, y la creación de sistemas de seguridad social (Banco Mundial, 1990).

la restricción de crédito disminuye la acumulación de capital humano.

En este trabajo estudiamos el efecto de la restricción de crédito en una economía en que los factores de producción son el capital humano y el capital físico y en que los agentes tienen preferencias idénticas pero riquezas diferentes. Si bien en los estados estacionarios de nuestro modelo la desigualdad no afecta el crecimiento, encontramos que la imperfección de mercado es un fuerte freno a la transición al estado estacionario y que la desigualdad lo intensifica. Mostramos por medio de la simulación numérica los cambios en las trayectorias de las variables principales que se producen cuando se modifica la restricción de crédito, la elasticidad de sustitución entre el capital físico y el humano, y si la economía se encuentra abierta al flujo de capital físico o no. Nuestro énfasis sobre el estudio detallado del la transición, que después de todo tiene en los modelos de crecimiento la extensión temporal del proceso del desarrollo, muestra que ésta es muy importante aún para explicaciones sobre la desigualdad en las que los estados estacionarios no dependan de la distribución. Un antecedente se encuentra en Barro, Mankiw y Sala-I-Martin (1995), que muestra por medio de una aproximación lineal al equilibrio estacionario que cuando el capital humano no puede utilizarse como colateral, las economías abiertas al flujo de capital muestran tasas de convergencia intermedia entre la economía cerrada y la economía abierta al flujo de capital humano.

Entre las hipótesis distintivas de nuestro modelo se encuentran:

1) El capital humano[2] es un factor importante de la función de producción.

2) El capital humano es adquirido individualmente, a través de la utilización de ciertos bienes y servicios, que tienen rendimientos decrecientes en aprendizaje, nutrición y salud.

3) La inversión en capital humano enfrenta una restricción de crédito: es difícil conseguir préstamos para la educación, la alimentación o la salud.

4) Los padres apoyan a sus hijos en la adquisisión del capital humano, aún hasta el punto de que en la vejez dependen de ellos. Este mecanismo suple los mercados de crédito en la adquisisión de capital humano.

5) El conocimiento se incrementa de forma exógena.

Una discusión a fondo de la importancia del capital humano en la función de producción rebasa el alcance de este escrito. Sin embargo, debemos mencionar que la presencia de esta hipótesis refleja un cambio técnico que diferencia las últimas dos décadas de las anteriores. Anteriormente, la producción resultaba del encuentro entre capital y trabajo. Ahora, el capital físico debe de encontrarse en cada vez mayor medida con el capital humano. Este solo hecho imprime diferencias significativas a la fisonomía del crecimiento de largo plazo, como veremos a lo largo de este escrito.

Asimismo es importante destacar el papel que juega la familia en la educación, nutrición y salud de las nuevas generaciones. Hacer esto congruentemente para un contexto en que las instituciones de crédito son débiles nos lleva a plantear un modelo de generaciones traslapadas con altruismo en una forma alternativa a la usual (Abel, 1985, 1987 y Kimball, 1987), en el que la familia es el actor principal. Además de esto.

[2] Adoptamos de forma general el punto de vista de que el capital humano incluye educación, nutrición y salud (e.g. Schultz, 1992).

incluimos poblaciones con distintos niveles de riqueza para modelar los efectos de la distribución.

Entre las conclusiones del modelo encontraremos:

1) La restricción de crédito frena la acumulación del capital humano, y por lo tanto la transición a los niveles óptimos de acumulación.

2) El freno al crecimiento es mayor entre peor sea la distribución de la riqueza.

3) El freno al crecimiento es más notorio en las economías abiertas al flujo de capital físico.

4) El producto de la economía abierta es una función del nivel de acumulación de capital humano.

5) Debido a que el rendimiento marginal de la inversión en capital humano es alto cuando su nivel es bajo, las familias con un nivel educativo bajo prefieren invertir en capital humano que ahorrar. Esto induce un ciclo de endeudamiento (financiero, hasta la restricción de crédito, e intra-familiar) que llega a su máximo cuando se logra el nivel óptimo de educación, y que eventualmente se revierte llegando al ahorro. En el caso de la economía abierta la inversión en capital humano por parte de la mayoría de la población resulta en una tendencia a un alto nivel de endeudamiento agregado, ya que el capital físico que complementa en la producción al capital humano proviene del exterior. Cuando se logra el nivel óptimo de educación, nutrición y salud, la deuda se reduce, aunque no completamente, pues también se tiende a un proceso de adelanto del consumo.

6) Políticas que relajan la restricción de crédito en la inversión en capital humano incrementan su acumulación y por lo tanto el producto y el bienestar, acortando la transición a los niveles óptimos de acumulación y así elevando el crecimiento. También incrementan el endeudamiento y adelantan el consumo.

El modelo examina, pues, el papel del capital humano en un contexto en que éste es necesario para la producción, en que una restricción de crédito dificulta su acumulación y en que una porción importante de las familias tiene acervos bajos del mismo. Al examinar el proceso de transición, es decir, la dinámica de acumulación de capital, encontramos que se producen tasas de crecimiento lentas; que si bien el ingreso de los sectores deficientes en capital humano puede crecer más rápidamente, la restricción de crédito frena este proceso; y por último, que resolver estos problemas produce endeudamiento. En conjunto, este escenario implica absorción tecnológica lenta, debilidad del ahorro interno, y una tendencia a la inestabilidad macroeconómica. Así, con unas cuantas hipótesis se reproducen algunos de los hechos básicos más importantes de la situación económica de Latinoamérica.

En las siguientes secciones presentamos las hipótesis y el modelo en detalle. Como hemos dicho, la familia es el agente. Primero mostramos la equivalencia de nuestro modelo con un modelo de generaciones traslapadas y altruismo típico. Después, mostramos un planteamiento equivalente en una sola generación, que simplifica la interpretación del modelo. Desarrollamos su solución, la de los estados estacionarios, y algunos aspectos de la economía abierta. Con estos antecedentes, presentamos los resultados de la simulación numérica del modelo, en los casos de economía abierta y cerrada al flujo de capital físico. Mostramos la evolución de las variables principales y qué sectores de la población prefieren la economía abierta o la cerrada, o políticas que relajan la restricción de crédito, de acuerdo a la distribución inicial y a la elasticidad de sustitución entre ambos tipos de capital. Finalmente, discutimos nuestros resultados y su relación al contexto Latinoamericano.

Hipótesis del modelo

En artículos seminales (Usawa [1965], Lucas [1988], Becker et al [1990] y Rebelo [1991]) se introduce el capital humano en los modelos económicos. Su producción suele ser modelada en un segundo sector de la economía. La interacción entre los dos sectores puede ser compleja y conducir a soluciones múltiples, (Caballé, Jordi y Santos [1993]). Aquí, tomamos un punto de vista alternativo. Primero, consideramos que la función agregada de producción de bienes incluye la producción de *bienes y servicios de formación de capital humano,* (libros, instrucción, vacunas, alimentación, etc.) y segundo, que quien los utiliza (para aprender, gozar de buena salud, etc.) percibe rendimientos decrecientes en estos bienes al formar su capital humano efectivo.

Respecto de la primera de estas hipótesis, no es irrealista pensar, especialmente en un contexto de subdesarrollo en que la producción del conocimiento es principamente exógena, que la esencia de la producción de capital humano no radica en la proporción de sus insumos (¿qué tan diferentes son estos en una escuela primaria o en un hospital que en una oficina o una fábrica moderna?) sino en que el producto es remunerado a través de su utilización en la producción. Esto nos evita adicionar al modelo las complicaciones de un segundo sector.

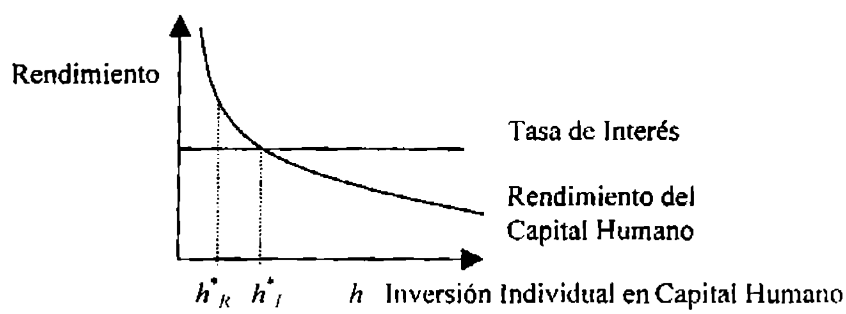


Figura 1. La decisión de inversión h en capital humano (casos restricto e irrestricto).

Respecto de la hipótesis de rendimientos decrecientes de los bienes y servicios de formación de capital humano, ésta sigue el pensamiento clásico económico. Las familias tienen a su disposición una variedad de maneras de dedicar recursos a la formación del capital humano de sus hijos, que es *individual.* De forma general, estas posibilidades, que constituyen la función de inversión individual en capital humano, tienen rendimientos decrecientes en los recursos invertidos. Esta hipótesis tiene consecuencias directas sobre la decisión del ahorro. La familia invertirá en la formación de capital humano hasta que su rendimiento iguale el de la tasa de interés (ver la Figura 1).

Antes de llegar a ese punto no ahorrará (financieramente o en capital físico), pensando a largo plazo e ignorando otros motivos del ahorro como el precaucional. El comportamiento de las familias al decidir sobre la educación y la salud de sus hijos depende de su riqueza. Si la familia cuenta con pocos recursos, posiblemente se iguale su tasa de substitución intemporal con el rendimiento de la inversión en capital humano a un nivel mayor que la tasa de interés, y por lo tanto no participe en el mercado de ahorro.

Implícitamente, este planteamiento involucra una restricción de crédito[3], pues las familias preferirían pedir prestado para financiar una mayor inversión en capital humano, ya que ésta tiene un mayor rendimiento para ellas que la tasa de interés. Una de las consecuencias es que la inversión en capital humano presenta así una función redistributiva, puesto que la inversión del sector pobre de la población, en tanto no ahorra debido a estas razones, tiene una mayor tasa de rendimiento que el del sector que sí ahorra.

La inversión de las familias en capital humano para los hijos se introduce de manera natural en los modelos de generaciones traslapadas, que serán el marco de nuestro modelo. Desde el punto de vista económico, la inversión en capital humano puede tomar dos formas, de acuerdo a si realizar la inversión implica tener que dejar de percibir un ingreso o no. En términos generales, la inversión que se realiza en los niños y jóvenes, como los gastos en alimentación, salud, educación en los primeros niveles, incluyendo por lo menos preescolar y primaria, no sustituyen trabajo. Esto es especialmente cierto cuando el capital humano es un factor importante de la producción. Estos rubros de inversión incluyen los más prioritarios para los sectores pobres de Latinoamérica en la actualidad. Nos concentramos en ellos, tanto para tratar las inversiones más prioritarias como para simplificar el modelo.[4]

Para analizar el problema de la inversión de capital humano en etapas anteriores a las del trabajo, agregamos un período de vida más al modelo de Diamond (1965), correspondiente a la etapa de la niñez y juventud. En esta etapa no hay ingresos, sino que solamente hay un consumo provisto por los adultos a sus hijos, y una inversión en capital humano. Sin embargo, en el contexto de subdesarrollo que nos ocupa no existen las instituciones financieras, estabilidad y seguridad social que garantizan el ahorro de largo plazo. En su lugar funcionan instituciones familiares. En este contexto, resulta irreal pensar que los adultos deciden simultáneamente su consumo presente y el de la vejez, por lo que no son convincentes las hipótesis del modelo de Diamond, que tienen además el sabor de un ámbito de disfuncionalidad familiar.

El altruismo es un componente esencial de nuestro modelo, pues sin éste no existirían transferencias de los adultos hacia los jóvenes que implican incluso depender de ellos en la vejez. Estas son equivalentes a préstamos de largo plazo intergeneracionales en que el colateral es sustituido por el altruismo. Proponemos un modelo de generaciones traslapadas modificado, en que se incorpora una mayor unidad familiar. Consideramos a la familia como un agente que en cada tiempo maximiza simultáneamente la utilidad de jóvenes, adultos y viejos. Esto tiene las siguientes ventajas. Primero, sitúa el

[3] Además, el ahorro precaucional puede incorporarse en la restricción de crédito.

[4] El segundo tipo de inversión en capital humano no difiere tan radicalmente si se considera que la inversión consiste de ingresos no realizados más inversión directa.

altruismo al interior de cada período, y el intercambio entre viejos y adultos (la herencia) se concibe como un proceso cotidiano. Esto resulta más real y es más atractivo como concepto sociológico, contexto al cual pertenece la discusión de los aspectos funcionales del altruismo y de la decisión agregada de la familia. Además, las decisiones de consumo de cada tiempo son independientes. Esto tiene la implicación, por ejemplo, de que pueden retomarse en el caso de shocks de productividad positivos o negativos, modificando consistentemente el consumo de los viejos. De este modo caracterizamos mejor las sociedades en que no está bien establecido el ahorro financiero de largo plazo.

Mostraremos que, en el caso de utilidad aditiva, el modelo modificado es equivalente al de generaciones traslapadas con altruismo, en que cada individuo maximiza su utilidad decidiendo simultáneamente su consumo presente y futuro, tomando en cuenta las generaciones siguientes y anteriores, como lo hacen Abel (1985, 1987) y Kimball (1987). La equivalencia de ambos modelos es interesante en si misma, pues hace relevante para cada modelo los fundamentos del otro. Recordamos por último que el altruismo es un elemento simplificador, pues elimina los problemas de sobreacumulación de capital que puede presentar el modelo de Diamond.

Es una observación fundamental que la ausencia de ahorro está intrínsecamente ligada con la desigualdad en la distribución de la riqueza. Para entender esto basta pensar que si los agentes son idénticos la tasa de interés tiene que subir al nivel al que incentive el ahorro, pues de lo contrario no habría capital. Por ello, manteniendo la hipótesis de individuos con preferencias idénticas, dividimos las familias en dos poblaciones uniformes, cada una con un nivel de riqueza diferente, y estudiamos la economía agregada.

Así, trabajaremos con un modelo de tres generaciones traslapadas y dos sectores de población. Con el objeto de simplificarlo, nuestra función de producción tendrá como insumos solamente capitales físico y humano, mas no el trabajo.

La función de inversión en capital humano es de rendimientos decrecientes, por lo cual sin considerar externalidades, que en nuestro caso incluirían la herencia social de capital humano, no se genera crecimiento mas que en el caso que sea alta la elasticidad de sustitución del capital humano por el físico, como en un modelo de Arrow. Por razones de simplificación, analizaremos una economía cuyo motor de crecimiento se encuentra en la producción del capital humano, y que éste crece exógenamente como resultado del contacto con otras economías. Esto no resulta irreal en el caso Latinoamericano.

Hemos detallado nuestras hipótesis. El modelo que definiremos no tiene una solución analítica, por lo que utilizamos una aproximación numérica para observar su comportamiento. Encontramos que, especialmente en el caso de una economía abierta al flujo de capital físico, cuando se parte de condiciones iniciales en las que un sector importante de la población carece de recursos, éste preferirá invertir en capital humano, por lo cual habrá una carencia de ahorro financiero. Si la economía es abierta, se endeudará por un largo período, hasta que su población logre el nivel de capital humano óptimo. Los sectores con menos recursos preferirán la economía abierta, especialmente si se implementan políticas que relajen la restricción de crédito y faciliten la formación de capital humano, y entre menos sea la sustituibilidad entre ambos tipos de capital.

El Modelo

Consideramos un modelo de tres generaciones traslapadas. Cada generación consiste de individuos idénticos que viven durante tres períodos. En el período t, la familia consiste de jóvenes, adultos y viejos. Los egresos de la familia son: el consumo c_{0t} de los jóvenes y el monto de la inversión en la formación de capital humano h_t; el consumo de los adultos y viejos c_{1t} y c_{2t} respectivamente; y el ahorro s_t. Cada uno de estos rubros es per cápita, y hay que recordar que debido a la tasa de crecimiento de la población ésta toma la forma de una pirámide. El ahorro lo consideramos por adulto. El ingreso de la familia es la suma de un monto $\Gamma_t s_{t-1}$, donde

$$\Gamma_t = \frac{1 + r_{Kt}}{1 + n} \tag{1}$$

representa los intereses percibidos por los ahorros de la familia en la generación anterior (corregidos a términos per cápita), y de un monto $r_{Ht}H_t$, el rendimiento del capital humano que poseen los adultos, donde $H_t = H(h_{t-1}, t-1)$ es el capital humano efectivo, resultado del aprovechamiento de la inversión en capital humano recibida por los adultos cuando eran jóvenes. La función H incluye una variable temporal porque la función de aprovechamiento va aumentando en el tiempo por razones exógenas. Respecto de la función H, suponemos que es una función con rendimientos decrecientes en h_{t-1} y que satisface las condiciones de Inada. Los bienes y servicios de formación de capital humano son producidos como cualquier otro bien por medio de capital físico y humano.

Planteamos ahora el problema de las familias en las dos formas diferentes que hemos mencionado.

Problema 1 (La familia como agente).

Sea $V_t = V(c_{0t}, c_{1t}, c_{2t})$ la función de utilidad de la familia en el período t. En cada generación, las familias resuelven el problema

$$\max_{c_{0t}, c_{1t}, c_{2t}, s_t, h_t} U_t^{PF1} = \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i (1+n)^i V_{t+i}, \tag{2}$$

$$\text{s.a. } (1+n)c_{0t} + c_{1t} + \frac{1}{1+n}c_{2t} + s_t + (1+n)h_t = \Gamma_t s_{t-1} + r_{Ht}H_t, \tag{3}$$

$$s_t \geq s_{0t}\,. \tag{4}$$

Aquí n es la tasa de crecimiento de la población, c_{0t}, c_{1t}, c_{2t} son los consumos per cápita de jóvenes, adultos y viejos en el tiempo t, h_t es la inversión per cápita en capital humano en los jóvenes, cuyo resultado es $H_{t+1} = H(h_t, t)$ unidades de capital humano cuando ellos son adultos, y s_t es el ahorro por adulto. La herencia per cápita es

$$b_t = \Gamma_t s_{t-1} - \frac{1}{1+n}c_{2t}. \tag{5}$$

Problema 2 (El individuo como agente).

Siguiendo a Abel (1987) y Kimball (1987), las decisiones son efectuadas por los adultos, cuya función de utilidad es $W_t = W(c_{0t-1}, c_{1t}, c_{2t+1})$. Ellos deciden simultáneamente su consumo como adultos y como viejos, así como el consumo presente de los jóvenes, el ahorro, la inversión en capital humano y la herencia. El problema es:

$$\max_{c_{0t}, c_{1t}, c_{2t+1}, s_t, h_t, b_{t+1}} U_t^{PF2} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \omega_i (1+n)^i W_{t+i}, \tag{6}$$

$$\text{s.a. } (1+n)c_{0t} + c_{1t} + s_t + (1+n)h_t = b_t + r_{Ht}H_t, \tag{7}$$

$$c_{2t+1} + (1+n)b_{t+1} = (1 + r_{Kt+1})s_t, \tag{8}$$

junto con la restricción de crédito (4). Aquí la variable b_t es la herencia que reciben los adultos en el tiempo t. Para simplificar el planteamiento, trabajaremos bajo el supuesto de que $\omega_i = \omega_{-i}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ Esto implica que al dar y al recibir una herencia ambas generaciones concordarán sobre el monto óptimo. Así, los adultos pueden decidir sobre una herencia negativa y no será necesario introducir las restricciones $b_{t+1} \geq 0$ y $b_{t+1} \leq 0$ en las decisiones de los adultos y viejos. Es decir, no se toma en cuenta la situación en la cuál, por ejemplo, cada generación simultaneamente desea dar o recibir de la otra. En el Apéndice se encuentran los detalles de la construcción de la función de utilidad U_t^{PF2}.

Para el siguiente teorema definimos la notación

$$V_{t,0} = \frac{\partial V_t}{\partial c_{0t}},\ V_{t,1} = \frac{\partial V_t}{\partial c_{1t}},\ V_{t,2} = \frac{\partial V_t}{\partial c_{2t}}, \tag{9}$$

$$W_{t,0} = \frac{\partial W_t}{\partial c_{0t-1}}, W_{t,1} = \frac{\partial W_t}{\partial c_{1t}}, W_{t,2} = \frac{\partial W_t}{\partial c_{2t+1}}, \tag{10}$$

$$H_{t+1,h} = \frac{\partial H}{\partial h_t} \tag{11}$$

donde $V_{t,i}$ es función de c_{0t}, c_{1t}, c_{2t}, $W_{t,i}$ es función de $c_{0t-1}, c_{1t}, c_{2t+1}$ y $H_{t+1,h}$ es función de h_t y t.

TEOREMA 1 *(1) Las condiciones de primer orden del Problema 1 de las familias son las siguientes:*

$$(1+n)V_{t,1} = V_{t,0}, \tag{12}$$

$$(1+n)V_{t,2} = V_{t,1}, \tag{13}$$

$$V_{t,1} = \rho(1 + r_{Kt+1})V_{t+1,1} + \eta_t, \tag{14}$$

$$V_{t,1} = \rho r_{Ht+1} H_{t+1,h} V_{t+1,1}, \tag{15}$$

$$\eta_t(s_t - s_{0t}) = 0, \eta_t \geq 0, s_t - s_{0t} \geq 0. \tag{16}$$

(2) Supongase que $\omega_i = \omega_{-i}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ Entonces los adultos y los viejos coinciden sobre cuál es la herencia óptima. Las condiciones de primer orden del Prob-

lema 2 de las familias son la (16) y:

$$W_{t,1} = \mu W_{t+1,0}, \tag{17}$$

$$W_{t,2} = \mu W_{t+1,1}, \tag{18}$$

$$W_{t,1} = \mu W_{t+1,1}(1 + r_{Kt+1}) + \eta_t; \tag{19}$$

$$W_{t,1} = \mu r_{Ht+1} H_{t+1,h} W_{t+1,1}. \tag{20}$$

(3) Supongase que V_t y W_t tienen la forma aditiva

$$V_t = (1+n)u(c_{0t}) + \kappa_1 u(c_{1t}) + \frac{\kappa_2}{(1+n)} u(c_{2t}),$$

$$W_t = u(c_{0t-1}) + au(c_{1t}) + bu(c_{2t+1}).$$

Entonces, los Problemas 1 y 2 de las familias son equivalentes si y sólo si

$$a = \mu\kappa_1,\ b = \mu^2\kappa_2,\ \mu = \rho. \tag{21}$$

Las condiciones de primer orden se reducen a (16) y

$$u'(c_{0t}) = \kappa_1 u'(c_{1t}) = \kappa_2 u'(c_{2t}), \tag{22}$$

$$u'(c_{1t}) = \rho(1 + r_{Kt+1})u'(c_{1t+1}) + \eta_t = \rho r_{Ht+1} H_{t+1,h} u'(c_{1t+1}).\blacksquare \tag{23}$$

Nos avocamos al caso $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$, que corresponde a $a = \rho$, $b = \rho^2$.

Las condiciones (12) y (13) establecen la relación entre la utilidad marginal de los adultos y la de sus hijos y los viejos. La condición (14) es equivalente la que obtiene Diamond pero no resuelve el problema debido a la presencia del multiplicador η_t. En su lugar queda la condición (15), que establece la tasa de crecimiento óptima de la utilidad entre generaciones en términos del rendimiento del capital humano en lugar de la tasa de interés, debido a que el primero es igual o mayor. Comparando las ecuaciones (14) y (15) obtenemos

$$\begin{aligned} \eta_{st} = 0 &\Leftrightarrow r_{Ht+1} H_{t+1,h} = 1 + r_{Kt+1}, \\ \eta_{st} > 0 &\Leftrightarrow r_{Ht+1} H_{t+1,h} > 1 + r_{Kt+1}. \end{aligned} \tag{24}$$

Es decir, mientras la capacidad económica de la familia no llegue al nivel en que su inversión en capital humano iguale el rendimiento marginal al de la tasa de interés, no ahorra, y por el contrario pide prestado si la restricción de crédito lo permite, es decir, si $s_{0t} < 0$. Por otra parte, a partir de un nivel suficiente de riqueza, su inversión consiste en una cantidad óptima dedicada al capital humano, y el resto al ahorro (ver la Figura 1).

Para simplificar la solución del Problema 1 de las familias, introducimos la función $\mathcal{V}(c_t)$, que es la utilidad de las familias en cada período, cuando éstas consumen $c_t = (1+n)c_{0t} + c_{1t} + \frac{1}{1+n}c_{2t}$.

DEFINICION 1 *Sea*

$$\mathcal{V}(c_t) = \max_{c_{0t}, c_{1t}, c_{2t}} V(c_{0t}, c_{1t}, c_{2t}) \tag{25}$$

$$s.a. \quad (1+n)c_{0t} + c_{1t} + \frac{1}{1+n}c_{2t} \leq c_t.$$

Problema 3 (La familia como agente, versión condensada)

$$\max_{c_{0t},c_{1t},c_{2t},s_t,h_t} U_t^{PF3} = \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i (1+n)^i \mathcal{V}(c_i) \tag{26}$$

$$\text{s.a.} \quad c_t + s_t + (1+n)h_t = \Gamma_t s_{t-1} + r_{Ht}H_t. \tag{27}$$

y a la restricción de crédito (4).

El Teorema 2 mostrará que la solución de este problema es equivalente a la de los problemas 1 y 2. El nuevo planteamiento muestra que los problema anteriores se reducen a uno de optimización intemporal con dos tipos de capital y una restricción de crédito. Para el caso de una economía abierta al flujo de capital físico, el primer tipo de capital es comerciable, mientras que el segundo no lo es. El segundo tiene, además, una función de producción individual.

TEOREMA 2 *(1) Supongamos que V es dos veces continuamente diferenciable, estrictamente cóncava y creciente en cada una de las variables. Existen funciones una vez continuamente diferenciables $c_i(c), i = 0, 1, 2$, que solucionan el sistema de ecuaciones derivado del problema (25),*

$$\begin{gathered} \tfrac{1}{1+n}V_{c_0}(c_0, c_1, c_2) = V_{c_1}(c_0, c_1, c_2) = (1+n)V_{c_2}, \\ c = (1+n)c_0 + c_1 + \tfrac{1}{1+n}c_2. \end{gathered} \tag{28}$$

Sea $\mathcal{V}(c) = V(c_0, c_1, c_2)$. Entonces

$$\mathcal{V}'(c) = V_{c_1}(c_0, c_1, c_2),$$

y $\mathcal{V}(c)$ es estrictamente cóncava.

(2) Las condiciones de primer orden del problema 3 de las familias son:

$$\mathcal{V}'(c_t) = \rho\mathcal{V}'(c_{t+1})(1 + r_{Kt+1}) + \eta_{t+1} = \rho\mathcal{V}'(c_{t+1})r_{Ht+1}H_{t+1,h}. \tag{29}$$

Estas son equivalentes a las condiciones de primer orden del problema 1 de las familias.

(3) La solución del problema 3 con condiciones iniciales fijas h_{-1} y s_{-1} se puede formular recursivamente, a partir de c_0, como

$$c_t = (\mathcal{V}')^{-1}\left(\frac{\mathcal{V}'(c_{t-1})}{\rho r_{Ht}H_{t,h}}\right), \quad t \geq 1, \tag{30}$$

y, para $t \geq 0$,

$$\left.\begin{aligned} h_t &= H^{-1}_{t+1,h}\left(\frac{1+r_{Kt+1}}{r_{Ht+1}}\right), \\ s_t &= \Gamma_t s_{t-1} + r_{Ht}H(h_{t-1}) - (1+n)h_t - c_t; \end{aligned}\right\} \quad si\ s_t \geq s_{0t};$$
$$\left.\begin{aligned} h_t &= \tfrac{1}{1+n}(\Gamma_t s_{t-1} + r_{Ht}H(h_{t-1}) - s_{0t} - c_t); \\ s_t &= s_{0t}; \end{aligned}\right\} \quad si\ H_{t+1,h} \geq \frac{1+r_{Kt+1}}{r_{Ht+1}}. \tag{31}$$

Aquí $H^{-1}_{t+1,h}$ *es la función inversa de* $H_h(\cdot, t)$. *Para que la solución satisfaga la condición de No-Ponzi,* c_0 *debe seleccionarse de tal forma que*

$$\lim_{t\to a}\left[s_t \prod_{i=1}^{t} \frac{1+n}{1+r_{Ki}}\right] = 0. \tag{32}$$

Los casos (31) son mutuamente excluyentes a menos que se dé la igualdad para ambas condiciones y éstos coincidan. Las soluciones al Problema 1 se obtienen escribiendo $c_{it} = c_i(c_t)$, $i = 0, 1, 2$.

TEOREMA 3 *Suponemos ahora que* $V = (1+n)u(c_0) + u(c_1) + \frac{1}{1+n}u(c_2)$, *es decir,* $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$, *y que* $u(c) = \frac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}$. *Sea*

$$\vartheta = (1+n) + 1 + \frac{1}{1+n}. \tag{33}$$

Las soluciones $c_i(c)$, $\mathcal{V}(c)$, *son las siguientes:*

$$c_0 = c_1 = c_2 = \vartheta^{-1}c; \ \mathcal{V}(c) = \frac{\vartheta^{\sigma}c^{1-\sigma} - \vartheta}{1-\sigma}. \tag{34}$$

La ecuación (30) toma la forma

$$c_t = (\rho r_{Ht} H_{t,h})^{1/\sigma} c_{t-1}, \quad t \geq 1. \tag{35}$$

La economía agregada

Describimos a continuación las funciones de producción de la economía.

Consideramos una economía que se compone de familias con preferencias idénticas divididas en poblaciones 1 y 2 de acuerdo a sus recursos iniciales. Cada población es de tamaño N_t^1 y N_t^2 respectivamente (los superíndices representarán la población a la que se esté haciendo referencia). Las familias de cada población tienen una cantidad uniforme de recursos iniciales. En la población 1, los adultos heredan en el primer período, además del resultado de una inversión en capital humano, recursos b_1^1 que consisten de los títulos de propiedad sobre el capital K_1 inicial de la economía.

El capital humano agregado es la suma de los acervos de capitales humano individuales,

$$H_t^a = N_t^1 H(h_{t-1}^1) + N_t^2 H(h_{t-1}^2). \tag{36}$$

Utilizamos una función de producción agregada

$$Y_t = F(K_t, H_t^a) - \delta K_t. \tag{37}$$

F es una función de producción neoclásica, homogénea de grado 1, y δ es la depreciación. Nuestro interés en una función general incluye investigar los efectos de la elasticidad de substitución entre K_t y H_t. Sea

$$f(k) = F(k^{-1}, 1),\ g(k) = F(1, k^{-1}). \tag{38}$$

Pueden verificarse $g'(k^{-1}) = f(k) - kf'(k)$, f'', $g'' < 0$. Ambas funciones f' y g' son invertibles. Escribiendo $k_t = \frac{K_t}{H_t^a}$, la tasa de interés y el rendimiento del capital humano, determinados por la optimización de los productores individuales, son

$$r_{Kt} = F_K(K_t, H_t^a) - \delta = f'(k_t) - \delta, \tag{39}$$

$$r_{Ht} = F_H(K_t, H_t^a) = g'(k_t^{-1}). \tag{40}$$

Por lo tanto

$$r_{Ht} = R_{HK}(r_{Kt}) =_{def} g'\left(\frac{1}{(f')^{-1}(r_{Kt} + \delta)}\right). \tag{41}$$

La función R_{HK} definida aquí tiene derivada negativa. Entre más alta es la tasa de interés, más bajo es el rendimiento del capital humano efectivo y viceversa.

Para $H(h_{t-1}, t-1)$ tomamos

$$H(h_{t-1}, t-1) = Be^{x(t-1)} h_{t-1}^{\beta}. \tag{42}$$

Hemos incorporado en la función de aprovechamiento de los bienes y servicios de formación de capital humano el crecimiento exógeno de la tecnología. Esto generará el crecimiento de la economía. Definimos también

$$K_t = N_{t-1}^1 s_{t-1}^1 + N_t^2 s_{t-1}^2, \tag{43}$$

$$N_t = N_t^1 + N_t^2, \tag{44}$$

$$N_t^1 = (1+n)^t N_0^1,\ N_t^2 = (1+n)^t N_0^2. \tag{45}$$

Consideraremos los casos de economía abiertas y cerradas al flujo de capital. Sea K_t^E la cantidad neta de capital invertida desde el extranjero (que sería cero en el caso cerrado). Como el producto neto es igual al ingreso,

$$F(K_t, H_t^a) = \sum_{i=1}^{2} N_t^i \left(r_{Ht} H(h_{t-1}^i, t-1) + \frac{r_{Kt}}{1+n} s_{t-1}^i \right) + r_{Kt} K_t^E. \tag{46}$$

Las trayectorias de crecimiento balanceado

Si bien los fenómenos que nos ocupan suceden durante la transición, durante la cual no son óptimas las asignaciones de capital físico y humano, caracterizamos aquí las soluciones estacionarias del modelo, en que r_K y r_H son constantes y las variables de consumo, ahorro, inversión y herencia crecen proporcionalmente.

TEOREMA 4 *En un estado estacionario todas las familias son ahorradoras, aunque su ahorro esté justament en la restricción. El nivel óptimo de la inversión en capital humano de las familias no depende de su riqueza. La tasa de crecimiento de la economía y los rendimientos de equilibrio son*

$$\begin{array}{ll} \gamma^* = e^{x/(1-\beta)}, & 1 + r_K^* = \rho^{-1} e^{\sigma x/(1-\beta)}, \\ k^* = (f')^{-1}(r_K^*), & r_H^* = R_{HK}(r_K^*) \end{array} \tag{47}$$

(por lo que $\Gamma^* = \frac{\gamma^{*\sigma}}{\rho(1+n)}$*). Sean*

$$s_t^i = \gamma^{*t} s_0^i, s_{0t} = \gamma^{*t} s_{\min}, c_t^i = \gamma^{*t} c_0^i, h_t^i = \gamma^{*t} h_0, i = 1, 2, \tag{48}$$

las soluciones de las trayectorias de crecimiento balanceado. Hemos incorporado una restricción de crédito estacionaria y tomado en cuenta que la inversión en capital humano de todas las familias es la misma. El consumo y el ahorro de las familias satisface la relación

$$c_0^i = \left(\frac{\gamma^{*\sigma-1}}{\rho(1+n)} - 1\right) s_0^i + \left(\frac{\gamma^{*\sigma-1}}{\rho}\frac{1}{\beta} - (1+n)\right) h_0. \tag{49}$$

La herencia satisface

$$\begin{aligned} b_0^i = & \left[\left(1 - \frac{1}{1+n}\vartheta^{-1}\right)\frac{\gamma^{*\sigma-1}}{\rho(1+n)} + \frac{1}{1+n}\vartheta^{-1}\right] s_0^i \\ & - \frac{1}{1+n}\vartheta^{-1}\left(\frac{\gamma^{*\sigma-1}}{\rho}\frac{1}{\beta} - (1+n)\right) h_0. \end{aligned} \tag{50}$$

Respecto de los parámetros s_0^i*, se tiene en el equilibrio la condición de consistencia*

$$k^* = \frac{(N_t^1 + N_t^2) h_0}{N_t^1 s_0^1 + N_t^2 s_0^2}. \tag{51}$$

Para que sean convergentes las sumas de la condición de No Ponzi (32) y de la utilidad de las familias (2) ó (26), debe satisfacerse $\Gamma > \max[1, \gamma]$.

Obsérvese que las soluciones (48) son únicas solamente hasta un factor de proporcionalidad. Por lo tanto, si escogemos h_0 arbitrariamente, y $s_0^1, s_0^2 \geq s_{\min}$ que satisfagan (51), las ecuaciones (49) y (50) proveen el resto de la solución.

Las soluciones muestran que los tipos de familias pueden parametrizarse de acuerdo a su ahorro inicial s_0^i, y que las familias que más ahorran son las que más heredan. El signo del coeficiente de h_0 en las ecuaciones (49) y (50) depende de los parámetros de la economía, pudiendo ser que familias en la restricción s_0^i que invierten el óptimo en capital humano, lo hacen con b_t mayor, igual o menor a cero.

La economía abierta

Destacamos algunos aspectos de la economía abierta.

TEOREMA 5 *Para el caso de la economía abierta, supongamos que la tasa de interés toma el valor fijo* r_K^A*. Entonces el rendimiento del capital humano y la razón de* *capital físico a capital humano toman los valores constantes*

$$r_H^A = R_{HK}(r_K^A),\ k^A = (f')^{-1}(r_K^A + \delta). \tag{52}$$

El capital físico agregado K_t se ajusta al capital humano agregado de acuerdo a la relación $K_t = k^A H_t^a$. La cantidad óptima de inversión individual en capital humano es independiente de la riqueza,

$$h_t = H_{t+1,h}^{-1}\left(\frac{1+r_K^A}{r_H^A}\right) = \left[\frac{\beta B e^{xt} r_H^A}{1+r_K^A}\right]^{\frac{1}{1-\beta}} \tag{53}$$

Los ingresos por capital humano de una familia que invierte esta cantidad son

$$r_H^A H(h_{t-1}, t-1) = \left[r_H^A B e^{x(t-1)}\right]^{\frac{1}{1-\beta}} \left[\frac{\beta}{1+r_K^A}\right]^{\frac{\beta}{1-\beta}} \tag{54}$$

El producto agregado de la economía es

$$\begin{aligned} Y_t &= F(K_t, H_t^a) - \delta K_t = \left[f(k^A) - \delta k^A\right] H_t^a \\ &= \left[f(k^A) - \delta k^A\right]\left[N_t^1 H(h_{t-1}^1) + N_t^2 H(h_{t-1}^2)\right]. \end{aligned} \tag{55}$$

El teorema muestra que la economía abierta funciona como si cada agente actúa independientemente de los demás. Su problema es uno de acumulación con dos tipos de capital, con la característica de que los rendimientos del capital físico son fijos y los del capital humano son decrecientes. El problema de la economía abierta muestra un comportamiento similar al de problemas de economía cerrada con un tipo de capital, en tanto que se presenta un período de transición en el que se acumula, en este caso, capital humano. Es importante notar que el producto agregado de la economía depende solamente de su nivel agregado de capital humano. Cuando la productividad del capital humano es suficiente para que las familias eventualmente acumulen el nivel óptimo del mismo, en el largo plazo el producto convergerá a la trayectoria

$$Y_t = N_t\left[f(k^A) - \delta k^A\right]\left[\frac{\beta r_H^A}{1+r_K^A}\right]^{\frac{\beta}{1-\beta}}\left[B e^{x(t-1)}\right]^{\frac{1}{1-\beta}}. \tag{56}$$

Así, la intensidad y la forma específica de la restricción de crédito solamente determina las características de la transición al equilibrio.

Especificación de los parámetros del modelo

En el caso de la economía cerrada el comportamiento agregado de la economía no puede expresarse analíticamente, ni puede analizarse en una gráfica bidimensional, por lo cual recurrimos al cálculo numérico. Este tiene el propósito, además, de mostrar claramente el proceso de transición.

En el apéndice describimos en forma general el método numérico que utilizamos para resolver el modelo. Para el cálculo numérico es necesario especificar el modelo completamente.

Tomamos como función de producción de bienes físicos

$$F(K,H) = A\left[\frac{1}{3}K^{\phi} + \frac{2}{3}H^{\phi}\right]^{1/\phi} \tag{57}$$

(en el caso $\phi = 0$, $F(K,H) = AK^{1/3}H^{2/3}$ mientras que si $\phi \to -\infty$, $F(K,H) \to A\min[K,H]$). La elasticidad de sustitución es $ES = \frac{1}{1-\phi}$. Utilizamos una restricción de crédito proporcional al ingreso de la forma

$$s_{0t} = s_0 r_{Ht} H_t. \tag{58}$$

Para la distribución inicial de capital, la proporción de la población 1 tomó los valores siguientes:

$$D = \frac{N_t^1}{N_t^1 + N_t^2} \in \{1, 0.2, 0.04, 0.008\}. \tag{59}$$

Los parámetros del modelo son

$$\begin{gathered} n = 1.02,\ \rho = 0.99, \sigma = 3,\ A = 3,\ B = 2,\ \alpha = 0.33, \\ s_0 \in \{0,\ 0.2, 0.4\},\ \phi \in \{-8, 0, 0.7\},\ x = 0.001,\ \beta = 0.8. \end{gathered} \tag{60}$$

Presentamos aquí n, ρ y x *anualmente*, mientras que tomamos un período intergeneraciónal de 18 años. La tasa de descuento relevante en este modelo es ρ, que representa en cuánto valora un adulto la utilidad de su hijo. ρ es pequeña puesto que representa un descuento de 1% anual. Sin embargo, si consideramos que el altruismo en realidad es resultado de una disposición ética en el que los adultos consideran el bienestar de los hijos igual de importante que el propio, $0.85 = 0.99^{18}$ no parece un coeficiente demasiado alto y por ello irrealista.

Utilizamos para el cálculo numérico un tiempo máximo de $T = 40$ generaciones. Las condiciones iniciales parten de un equilibrio en que $A = 1.5$, y las dos poblaciones de familias tienen el capital humano óptimo correspondiente. Los resultados son similares si se incrementa B ó el coeficiente $\frac{2}{3}$ que aparece en la función de producción. A la población 1 se le asignó inicialmente la propiedad de todo el capital físico. Esto significa que en el tiempo 0 la economía sufre un "shock" productivo en que se duplica la productividad de la función de producción de los bienes. Hemos observado que un aumento en B produce resultados similares.

Hicimos corridas con economía cerrada y con economía abierta. Las de economía abierta toman como la tasa mundial la tasa de interés del período 30 de la economía cerrada correspondiente. Esta tasa es algo mayor que la de nivel de equilibrio. Esto significa que la economía mundial se encuentra más adelantada en el proceso de acumulación de los niveles óptimos de capital.

Los Resultados

El modelo que utilizamos no es completamente calibrable, por lo cual los resultados son cualitativos. Sin embargo, hemos buscado que los rendimientos de ambos tipos de capital (además de los parámetros $n, \rho, \sigma, \alpha, \beta$) sean realistas. Nuestro propósito es observar los efectos de la restricción de crédito y de la distribución tanto en la economía abierta como en la cerrada. En las gráficas se mencionan la restricción y las distribuciones con los números s_0 y D.

Las variables de precios fundamentales del modelo son las tasas de interés r_K, r_H y el rendimiento marginal de los bienes de formación de capital humano, $r_H H_h$. Las variables r_K, r_H tienen una relación funcional entre sí. Esta se muestra en las trayectorias al equilibrio para economías abiertas mostradas en la Figura 2, en la que los rendimientos son a 18 años, correspondiendo al rango anual 4.7% a 6.1% para r_K y 1.023 a 1.042 para r_H. Dada una tasa de interés fija r_K, entre mayor es la elasticidad de sustitución ES entre ambos tipos de capital, mayor es el rendimiento del capital humano r_H.

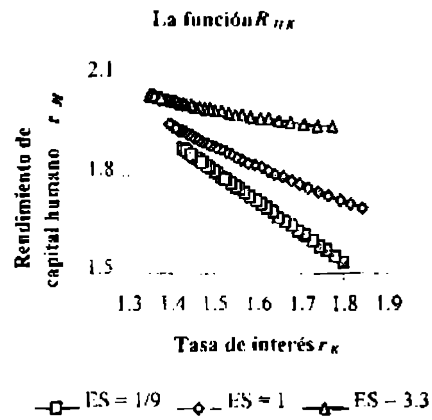


Figura 2. La función R_{HK} para diferentes elasticidades de sustitución entre K y H.

Encontramos en los resultados numéricos de la economía cerrada las trayectorias esperadas para la tasa de interés r_K después de un "shock" positivo a la productividad, con tasas mayores entre más sustituible es el capital humano con el capital físico (Gráfica I.1). Las trayectorias de r_H son las correspondientes (Gráfica I.2). En la economía cerrada, por ser más altas las tasas de interés, solamente se observa la restricción de crédito en casos extremos. Por ejemplo, si la elasticidad de sustitución es baja y hay una fuerte restricción de crédito, de hecho ahorro forzoso ($ES = 1/9$, $s_0 = -0.4$), aparece la restricción durante un período, especialmente cuando el capital está más concentrado, que es cuando mayor es la oferta de crédito (Gráfica II).

En cambio, en la economía abierta se observa claramente el efecto de la restricción. Por ejemplo (Gráfica I.3), en el caso $D = 0.04$, la población 1 logra el nivel óptimo educativo en un período para los valores de s_0 y ES considerados, mientras que (Gráfica I.4) la población 2 toma alrededor de 20 períodos en hacerlo si la restricción toma el valor $s_0 = 0$. El retraso (Gráfica I.4) se acorta a alrededor de 6 períodos si la restricción de crédito se relaja a $s_0 = 0.4$, cuando las familias pueden pedir prestado hasta 40% de su ingreso. En el caso $s_0 = 0.4$, entre más baja es ES, más tiempo dura la restricción de crédito. Aquí hay un efecto ingreso (al subir ES sube la riqueza, pues sube r_H) y un efecto sustitución, pues no solamente se invierte más, sino que también se adelanta el consumo.

En el caso $s_0 = 0$, $ES = 1/9$, observamos oscilaciones. Este tipo de oscilación se aparece más bajas son s_0 y ES, es decir, entre más rígida es la economía. Aquí el prestamo intergeneracional se da por pares. En cada par la primera generación recibe una mayor inversión en capital humano que la segunda, y el consumo es suavizado. Este sistema parece lograr un mayor adelanto del consumo.

En las Gráficas III[5] comparamos el comportamiento de economías equitativas ($D = 1$) con no equitativas ($D = 0.008$). La economía equitativa acumula más capital, produce más, y recibe una mayor proporción de inversión externa, acelerando su transición al equilibrio estacionario. La transición es más prolongada cuando la restricción de crédito es más fuerte, y en términos generales, cuando ES es mayor. Observamos además que cuando se acorta la transición se presentan picos mayores en el comportamiento de las variables.

En las Gráficas IV[6] comparamos las poblaciones 1 y 2 para $D = 0.008$. El período en que es vigente la restricción de crédito de la población 2 está marcado por su no obtención del nivel óptimo de capital humano, que es constante en la economía abierta (Gráfica IV.1). Se observa aquí también que la transición es más rápida cuando se relaja la restricción de crédito y para elasticidades de sustitución bajas. Para entender el endeudamiento, hay que recordar que la riqueza inicial de las familias se incrementa para mayor ES y s_0 pues estos incrementan el flujo de debido a la acumulación de capital humano. El endeudamiento es creciente en la riqueza de la población 2 (Gráficas IV.2 y IV.3), incorporando una mayor inversión en capital humano y un adelanto del consumo. Su máximo ocurre cuando las familias obtienen el nivel óptimo de capital humano. Observamos que, puesto que la tasa de interés de la economía abierta es algo mayor que la de equilibrio, la familias prefieren el préstamo intergeneracional (con tasa de equilibrio $\rho^{-1}e^{\sigma x/(1-\beta)}$) al mercado de crédito.

La Gráfica V[7] muestra cómo la población 2 adelanta el consumo cuando se relaja la restricción de crédito de $s_0 = 0$ a 0.4. El efecto es de mayor escala cuando la riqueza inicial es mayor. En la Gráfica VI.1 (escala logarítmica) se encuentran las trayectorias de consumo de la población 1 para varias distribuciones, y de la población 2 (para cualquiera de estas, que son equivalentes). Observamos el incremento más que proporcional en el consumo de la población 2 debido a las tasas de rendimiento mayores que experimenta cuando se encuentra sujeta a la restricción de crédito. En la Gráfica VI.2 se muestra la razón entre los activos ahorrados y el consumo de los mismos tipos de familia, pero con la restricción de crédito más relajada.

Las Gráficas VII[8] muestran los cambios en las variables principales cuando al ocurrir el "shock" de productividad se elige la economía abierta en lugar de la cerrada. para $ES = 1/9, 1, 3.3$ y para $s_0 = 0, 0.4$. La Gráfica VII.1 muestra el incremento

[5] K(D), Y(D), KE(D) representan capital físico, producto y capital físico externo para la distribución D.

[6] KH(P), B(P), S(P) representan capital humano, herencia y ahorro para la población P.

[7] C(s_0) representa el consumo para el nivel de restricción s_0.

[8] KH, B, S, C, K, Y, KE representan capital humano, herencia, ahorro, consumo, capital físico, producto y capital físico externo en la economía abierta. Adicionado un '0' la variable se refiere a la economía cerrada.

en la acumulación de capital humano. Este es mayor si no es demasiado sustituible el capital humano por el físico que proviene del exterior. En todos los casos, es mejor relajar la restricción de crédito. Incluso, si esto no se hace, *en los primeros periodos puede resultar negativa la comparación entre economía abierta y cerrada.* Las Gráficas VII.2 y VII.3 muestran como el incremento en el capital humano va acompañado de un endeudamiento, tanto intergeneracional como financiero. En la Gráfica VII.4 se observa el adelanto en el consumo de la población 2 que resulta cuando se da mayor acumulación de capital humano. En el caso contrario, disminuye el consumo. En la Gráfica VII.5 se ve como se acumula más capital físico solamente si ES es baja y si se relaja la rerstricción de crédito. En la Gráfica VII.6 se aprecia como el producto se incrementa en los casos en que se incrementa el capital humano. En las Gráficas VII.7 y VII.8 observamos que el endeudamiento es mayor entre mayor es la sustituibilidad, y más se relaja la restricción d crédito. La deuda no sobrepasa el producto (Gráfica VII.8), pero como cubre capital físico y humano se observan niveles mayores al 100% en la Gráfica VII.9. Una vez que llega a su maximo, comienza a disminuir la deuda. Esto depende de que la economía mundial se encuentre todavía en un proceso de transición de tal modo que su tasa de interés sea mayor a la de equilibrio.

Mostramos ahora las preferencias de las familias respecto de las opciones de llevar una economía abierta o de relajar la restricción de crédito. Las Tablas I.1 y I.2 muestran si la población 1, la 2, ambas o ninguna, prefieren la economía abierta para varios valores de D, ES y s_0. Aclaramos que si una población no prefiere una opción es porque prefiere la opuesta. El resultado es que solamente la población 2 prefiere la economía abierta, y eso si no es demasiado grande ES. L la población 1 prefiere la economía cerrada porque en ésta su capital percibe mayores tasas de interés. Hemos calculado que el valor presente de una unidad de capital puede ser hasta 240000 veces más en la economía cerrada ($s_0 = 0$) que en la abierta (tomando para la economía abierta la tasa de interés mínima de la trayectoria calculada). Subrayamos este efecto de la distribución de los recursos: la población 1 es rica en la economía cerrada porque vive con pobres más que por lo que tiene. En las Tablas II se muestran las poblaciones que prefieren que se relaje la restricción de crédito, a partir de dos valores de s_0. El primero es -0.4 y representa ahorro forzoso. El segundo es a partir de $s_0 = 0$. Por lo general, ninguna población prefiere el ahorro forzoso. La única excepción es la población 1 cuando es muy rica ($D = 0.008$) yES es regular a alta, que prefiere el ahorro forzoso a la relajación completa de la restricción de credito. Esta situación se extiende a más valores de D y ES cuando se parte de $s_0 = 0$ (Tabla II.2), aunque se aprecia que la relación no es lineal.

Comentamos, por último, que hemos observado, además de la solución que mostramos correspondiente a $ES = 1/9$, $s_0 = 0$, otras soluciones del modelo que inducen oscilaciones en la tasa de interés o en otras variables del modelo. Estos casos aparecen cuando se endurece la restricción de crédito y para valores pequeños de ES, es decir, para economías más rigidas. Esto no es del todo sorprendente, ya que existe una literatura sobre la posibilidad de soluciones caóticas para modelos de generaciones traslapadas (por ejemplo Benhabib, 1992; Boldrin y Montrucchio, 1985; Boldrin y Woodford, 1990; Bullard y Butler, 1993; Invernizzi y Medio, 1991; Negroni, 1992;

Nishimura, Sorger, y Yano, 1994). en nuestro caso, la relajación del crédito estabiliza las oscilaciones, como muestran las Gráficas I.4, II, III, IV y VII en el caso de la comparación entre $s_0 = 0$ y $s_0 = 0.4$ para $ES = 1/9$.

Conclusiones

Los resultados de la simulación numérica de nuestro modelo de crecimiento muestran que la restricción de crédito frena la transición al equilibrio estacionario, es decir el proceso de acumulación de los niveles óptimos de capital. Entre los conceptos centrales que explican los aspectos cualitativos de las trayectorias se encuentra el de la riqueza de las familias. Esta consiste del capital inicial y del flujo de ingreso que resulta del capital humano. El flujo se incrementa cuando se reduce la restricción de crédito, por lo cual *al aliviar este problema de mercado se incrementa la riqueza de las familias con bajos niveles de ingreso*, que son las que no cuentan con niveles óptimos de capital humano.

El proceso de transición presenta las características típicas de un modelo de crecimiento, es decir, acumulación de capital e incremento y suavización del consumo. Sin embargo, la presencia del capital humano introduce dos cambios cualitativos fundamentales, especialmente en el caso de la economía abierta. A saber, el producto se convierte en una función de la acumulación de capital humano, y aparece una fuerte tendencia al endeudamiento. Debe recordarse que en un modelo sin capital humano, todas las familias ahorrarían, y el resultado de la apertura sería una disminución de la tasa de interés y un incremento en los salarios. El capital externo formaría una parte del capital físico. En cambio, con la presencia del capital humano *el endeudamiento óptimo puede sobrepasar el monto de capital físico.*

El efecto de relajar la restricción de crédito es acelarar la etapa de transición. Si bien esto se da tanto en la economía cerrada como en la abierta, es en la economía abierta en la que más fuertemente aparece, debido a que la mayor oferta de capital físico hace más atractiva la inversión en capital humano. En la economía abierta, si se relaja suficientemente la restricción de crédito y no es demasiado alta la elasticidad de sustitución entre los dos tipos de capital, se aceleran la acumulación de capital humano, el crecimiento del producto, la entrada de capital físico y el bienestar. Paralelamente, se adelanta el consumo, y se incrementa el nivel de endeudamiento de la economía. En cuanto a la mala distribución de la riqueza, ésta frena la transición porque incrementa los efectos de la restricción de crédito.

Si en nuestro modelo incluimos como factor de producción el trabajo, obtendremos un resultado intermedio al de los dos modelos, por lo cual se producen los mismos fenómenos, a un nivel cuantitativo menor.

Podemos concluir que en una economía en que juega un papel importante el capital humano, si existe una restricción de crédito para su adquisición, la aplicación de políticas públicas que la relajen ofrece un gran potencial para acelerar la acumulación de capital y el crecimiento del producto, así como para resolver en parte los problemas de distribución del ingreso. Esto sucede especialmente en la economía abierta. Debe recordarse que abierto significa aquí al flujo de capital (no al comercio) y con tasas de interés bajas, de tal modo que suba el rendimiento del capital humano y que los créditos para invertir en él sean relativamente poco costosos. Por último, hemos mostrado ejemplos en que si no se relaja la restricción de crédito la economía abierta se compara negativamente con la abierta en los primeros períodos.

Hasta ahora hemos hablado de la restricción de crédito en forma abstracta. Dicha restricción surge entre otras razones por información asimétrica, riesgo y riesgo moral, y por la intransferibilidad del capital humano. Son varias las formas en que puede relajarse la restricción. Por ejemplo, el gobierno puede pagar la educación de un individuo en un 'préstamo' que sea pagado posteriormente, sin necesidad de un contrato específico, a través de impuestos al consumo o al ingreso. Este mismo sistema es aplicable al entrenamiento en el trabajo. De hecho, cuando los contratos de trabajo son de largo plazo, como en algunas estructuras industriales asiáticas, el patrón mismo puede tener los incentivos para otorgar el crédito o inclusive pagar por la formación del capital humano de su trabajador. Hemos visto que el ahorro forzoso, como el que ocurre en programas de retiro financiados por ley, actúa en la dirección opuesta a los requisitos de la formación de capital humano. Sin embargo estos mismos sistemas, junto con las cuentas individuales que manejan, podrían servir como fuentes de financiamiento de largo plazo para la educación. Cabe mencionar que así como al relajar la restricción de crédito se incrementa el consumo, cualquier transferencia hacia los sectores pobres aumentará simultáneamente consumo e inversión en capital humano,

Debemos advertir que no abordamos con estos comentarios los problemas de eficiencia en programas gubernamentales de educación, que son graves, ni los aspectos de bienes públicos que pueden estar envueltos. Tampoco hemos mencionado políticas cuyo impacto puede ser el de abaratar la formación del capital humano, las cuales resultan en crecimiento a través de un aumento permanente de la productividad. Cabe mencionar que, al abrirse las economías e incrementarse el rendimiento del capital humano, así como a raíz de los cambios tecnológicos que le han dado mayor importancia, surgen con mayor fuerza las necesidades de calidad en la educación, por lo que se hacen más aparentes el costo y las deficiencias de los sistemas que se encargan de la oferta de servicios educativos hasta el momento. Tampoco mencionamos el sector salud, respecto del cual es muy amplia la literatura que se dedica a sus problemas de oferta y eficiencia.

Las políticas educativas y de salud pueden aplicarse con fines redistributivos. Aquí vale la pena mencionar que en la presencia de externalidades positivas al capital humano, las cuales intensificarían los resultados aquí expuestos, los beneficios de su formación se extienden más allá de los sectores que la reciben, por lo que aún un financiamiento por parte de otros sectores puede resultar en una mejora de Pareto.

La instrumentación de políticas que relajen la restricción de crédito presenta la desventaja de conducir a un mayor endeudamiento y de adelantar el consumo. Sin embargo, aún así incrementan el producto por lo cual propician el crecimiento a través de las externalidades positivas que éste puede generar. Sin embargo, la expansión misma de la deuda puede traer consigo problemas de desconfianza e inestabilidad. Además, no hemos tratado los costos que puede tener el endeudamiento en los ámbitos en los que interviene el poder de mercado o político. Es claro que estos problemas significan que la aplicación de políticas que se propongan acortar la transición mediante la apertura al flujo de capital deben incluir cuidadosos programas de regulación del endeudamiento. Inclusive podría justificarse desalentar el consumo en comparación con la inversión, para minimizar la exposición al endeudamiento a la vez que se acelera la acumulación del capital. Por ejemplo, si un país subdesarrollado financía la acumulación de capital humano a través de un impuesto al consumo de productos de importación, estará simultáneamente impulsando la compra de bienes de capital y la inversión exterior, lo cual puede resultar aceptable a sus socios inversionistas y comerciales desarrollados.

Una consecuencia interesante del modelo es que para los sectores pobres resulta óptimo gastar todo su ingreso (en rubros que incluyen la inversión en capital humano), por lo que tienen una alta propensidad al consumo ante las fluctuaciones económicas (en nuestro modelo, la propensidad sería 1), por lo que su comportamiento se aproxima al modelo Keynesiano de consumo, mientras que los sectores ricos, que tienen incentivos para ahorrar, suavizan su consumo y por lo tanto tienden al concepto de consumo permanente de Friedman. Consecuentemente, ante las fluctuaciones, una función agregada de consumo sería una ponderación de estas dos, de acuerdo al tamaño y riqueza de las poblaciones. Esto significaría que al ir creciendo y desarrollándose una economía, el comportamiento agregado del consumo tendería a pasar del primer al segundo modelo.

Es interesante que este tipo de fluctuaciones son de mayor amplitud en economías más rígidas, por ejemplo debido a la presencia de restricciones de crédito o de baja sustituibilidad entre capitales. Este tipo de lógica podría explicar la mayor intensidad de los ciclos económicos que sufrían los países ahora desarrollados en siglos pasados, o los países ahora menos desarrollados. En este contexto, políticas que relajen la restricción de crédito también pueden estabilizar la economía,

Es claro que el endeudamiento excesivo Latinoamericano, la inestabilidad macroeconómica, inflación y devaluaciones que ha experimentado, la lenta absorción tecnológica, el empeoramiento de la distribución del ingreso, tienen toda una serie de causas institucionales y económicas que no hemos tocado. Sin embargo, estas problemáticas son consistentes con las que resultan de la dinámica de acumulación de capital humano que hemos analizado. El tipo de modelo que utilizamos es simple, por lo que solamente puede presentar una explicación parcial. Debe de interpretarse como una descripción de fuerzas económicas de largo plazo que definen una parte importante del ámbito económico.

En el contexto de apertura, globalización y libre mercado que resultan de y a su vez impulsan el cambio tecnológico de la 'revolución industrial' del capital humano, no puede ignorarse esa gran falla de mercado que es la restricción de crédito que detiene su formación. Hoy, para integrarse a la economía cada sector de la población debe antes invertir, y sin embargo su financiamiento está truncado. Es esencial encontrar los mecanismos que resuelvan este desencuentro —que seguramente no podrán circunscribirse a mecanismos de mercado— y preparar también los que acoten, racionalicen y regulen el endeudamiento consecuente.

Apéndice.

Construcción de la función U_t^{PF2}

La función de utilidad U_t^{PF2} utilizada en el Problema 2 tiene sus fundamentos en el siguiente planteamiento. La función de utilidad de los adulto contiene aspectos de altruismo que conciernen generaciones previas y futuras, de la siguiente manera:

$$U_t^{PF2} = W_t + (1+n)(1+R)^{-1}U_{t+1}^{PF2} + (1+n)^{-1}(1+\Psi)^{-1}U_{t-1}^{PF2}. \qquad (61)$$

Así, los adultos pueden hacer transferencias a los jovenes, y recibir transferencias a su vez cuando sean viejos. De acuerdo a Abel y Kimball (op. cit.), si se cumplen las condiciones

$$(1+n)(1+R)^{-1} + (1+n)^{-1}(1+\Psi)^{-1} < 1, \; (1+R)^{-1}(1+\Psi)^{-1} < \frac{1}{4},$$

entonces U_t^{PF2} toma la forma dada en (6), con

$$\omega_i = \begin{cases} A^{-1}\mu^i \text{ para } i \geq 0, \\ A^{-1}\lambda^i \text{ para } i < 0, \end{cases} \qquad (62)$$

y

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{1-4(1+R)^{-1}(1+\Psi)^{-1}}, \\ \lambda &= \tfrac{1}{2}(1+\Psi)(1+A) > 1, \\ \mu &= \tfrac{1}{2}(1+\Psi)(1-A) < 1. \end{aligned} \qquad (63)$$

Las expresiones de λ y μ han sido tomadas de Blanchard and Fisher (1989, pp. 108),

introduciendo las modificaciones debidas a la incorporación de potencias de $1+n$ en la función de utilidad.■

Demostración del Teorema 1

El lagrangiano del problema 1 es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{PF1}^t &= \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i(1+n)^i\{V_{t+i} + \Xi_{t+i}[\Gamma_t s_{t+i-1} + r_{Ht+i}H_{t+i} \\ &\quad -(1+n)c_{0t+i} - c_{1t+i} - \frac{1}{1+n}c_{2t+i} - s_{t+i} \\ &\quad -(1+n)h_{t+i}] + \eta_{t+i}(s_{t+i} - s_{0t+i})\}, \end{aligned} \qquad (64)$$

donde Ξ_{t+1} y η_{t+i} son los multiplicadores de las restricciones de presupuesto y de ahorro respectivamente. Cuando cada generación supone que las demás se comportan de la misma manera, las condiciones de primer orden obtenidas diferenciando con respecto a $c_{0t}, c_{1t}, c_{2t}, s_t, h_t$, son, para $t \geq 0$,

$$(1+n)\Xi_t = V_{t,0}, \qquad (65)$$

$$\Xi_t = V_{t,1}, \tag{66}$$

$$\frac{1}{1+n}\Xi_t = V_{t,2}, \tag{67}$$

$$\Xi_t = \rho(1+n)\Xi_{t+1}\Gamma_t + \eta_t, \tag{68}$$

$$\Xi_t = \rho\Xi_{t+1} r_{Ht+1} H_{t+1,h}. \tag{69}$$

con $H_{t+1,h} = H_h(h_t, t)$. Eliminamos Ξ_t, sustituyendo (66) en las demás ecuaciones para obtener las condiciones de primer orden.

(2) El lagrangiano del problema 2 es :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^t_{PF2} = & \sum_{i=-\infty}^{\infty} \omega_i(1+n)^i\{W_{t+i} + \varsigma_{t+i}[b_{t+1} + r_{Ht+i}H(h_{t+i-1}, t+i-1) - (1+n)c_{0t+i} \\ & -c_{1t+i} - s_{t+i} - (1+n)h_{t+i}] + \eta_{t+i}(s_{t+i} - s_{0t+i}) \\ & +\xi_{t+i}[(1+r_{Kt+i+1})s_{t+i} - c_{2t+i+1} - (1+n)b_{t+i+1}]\}.\end{aligned} \tag{70}$$

Diferenciando por cada una de las variables, excepto b_t, se obtienen las condiciones de primer orden

$$\varsigma_t = \mu W_{t+1,0}, \tag{71}$$

$$\varsigma_t = W_{t,1}, \tag{72}$$

$$\xi_t = W_{t,2}, \tag{73}$$

$$\varsigma_t = \xi_t(1 + r_{Kt+1}) + \eta_t, \tag{74}$$

$$\varsigma_t = \mu\varsigma_{t+1} r_{Ht+1} H_{t+1,h}. \tag{75}$$

En el caso de b_{t+1}, suponemos que ésta es decidida por los viejos si $b_{t+1} \geq 0$, y por los adultos si $b_{t+1} \leq 0$. Si los viejos deciden, diferenciando $\mathcal{L}^{t+1}$ con respecto a b_{t+1} obtenemos

$$\xi_t = \lambda^{-1}(1+n)^{-1}\varsigma_{t+1}. \tag{76}$$

En cambio, si los adultos deciden, diferenciando $\mathcal{L}^t$ con respecto a b_{t+1},

$$\xi_t = \mu(1+n)^{-1}\varsigma_{t+1}. \tag{77}$$

De este modo, si $\lambda^{-1} = \mu$, (76) y (77) son iguales. Tenemos (ver la primera sección del apéndice)

$$\begin{aligned}\omega_i = \omega_{-i} \ \Leftrightarrow\ & \lambda^{-1} = \mu \Leftrightarrow \tfrac{1}{4}(1+\Psi)^2(1-A)^2 = 1 \\ \Leftrightarrow\ & (1+\Psi)(1+R)^{-1} = 1 \Leftrightarrow \Psi = R.\end{aligned}$$

Después de algunas sustituciones, se obtienen de las ecuaciones (71) a (75) las condiciones de primer orden (17) a (20).

(3) Se sustituyen las definiciones de V y W en las condiciones de primer orden respectivas.■

Demostración del Teorema 2

(1) Este es un resultado estándar de Kuhn-Tucker.

(2) El Lagrangiano del problema 3 es

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^t_{PF3} &= \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i (1+n)^i \{\mathcal{V}(c_{t+i}) + \Xi_{t+i}[\Gamma_t s_{t+i-1} + r_{Ht+i} H_{t+i} - c_{t+i} \\ &\quad - s_{t+i} - (1+n) h_{t+i}] + \eta_{t+i}(s_{t+i} - s_{0t+i})\}. \end{aligned} \tag{78}$$

Diferenciando con respecto a c_t, s_t, h_t, obtenemos las condiciones de primer orden

$$\Xi_t = \mathcal{V}'(c_t), t \geq 0, \tag{79}$$

(68) y (69). Eliminando Ξ_t, obtenemos (29). La equivalencia con las condiciones (12) a (16), se obtiene utilizando las condiciones de primer orden de la maximización (26), es decir las ecuaciones (28).

(3) La ecuación (30) se sigue de la (29). Los dos casos de (31) corresponden a $\eta_t = 0$ y $\eta_t > 0$, y son obtenidos de (3), (4) y (24). Ambas soluciones no pueden existir y ser diferentes porque $s_t > s_{0t} \Rightarrow \eta_t = 0$ mientras $r_{Ht+1} H_{t+1,h} > 1 + r_{Kt+1} \Rightarrow \eta_t > 0$. Si $s_t = s_{0t}$ y $r_{Ht+1} H_{t+1,h} = 1 + r_{Kt+1}$ las soluciones son iguales.■

Demostración del Teorema 3

Las condiciones de primer orden son:

$$u'(c_0) = u'(c_1) = u'(c_2) \Leftrightarrow c_0 = c_1 = c_2. \tag{80}$$

De aquí se concluye (34). Sustituyendo,

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(c) &= (1+n)u(c_0) + u(c_1) + \frac{1}{1+n} u(c_2) \\ &= \left[(1+n) + 1 + \frac{1}{1+n}\right] \vartheta^{-(1-\sigma)} \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{1}{1-\sigma}\left[(1+n) + 1 + \frac{1}{1+n}\right] \\ &= \frac{\vartheta^{\sigma} c^{1-\sigma} - \vartheta}{1-\sigma}. \end{aligned} \tag{81}$$

De aquí, $\mathcal{V}'(c) = \vartheta^{\sigma} c^{-\sigma}$. Sustituyendo en la ecuación (30) se obtiene la (35).■

Demostración del Teorema 4

En un estado estacionario todas las familias son ahorradoras aunque su ahorro sea justamente s_{0t}. Esto se debe a que la tasa de crecimiento del consumo de ambas poblaciones debe ser igual, y por lo tanto $\eta_{st} = 0$ (ecuaciones [1], [29]). El nivel óptimo de la inversión en capital humano no depende de la riqueza por la ecuación (31) en su caso irrestricto. La inversión óptima en capital humano es

$$h^i_{t-1} = \left(\beta B e^{x(t-1)} \frac{r_H}{1+r_K}\right)^{1/(1-\beta)}, i = 1, 2. \tag{82}$$

Dividiendo la ecuación (82) en $t+1$ por la misma ecuación en t, y simplificando se obtiene la tasa de crecimiento dada en (47). Por la ecuaciones (24) y (35), la tasa de interés de equilibrio satisface

$$\gamma^* = (\rho r_H H_{t,h})^{1/\sigma} = (\rho[1+r_K])^{1/\sigma}. \tag{83}$$

Esto implica que r_K toma el valor dado en (47). Resolvemos para las demás variables. De (24) y la definición (42) de H,

$$r_H^* H(h_{t-1}^i) = r_H^* H_{t,h} \frac{h_{t-1}^i}{\beta} = (1+r_K^*)\frac{h_{t-1}^i}{\beta}. \tag{84}$$

Por lo tanto, del caso irrestricto de la ecuación (31) para s_t,

$$\gamma^{*t} s_0^i = \frac{\gamma^{*\sigma}}{\rho(1+n)}\gamma^{*t-1}s_0^i + (1+r_K^*)\frac{\gamma^{*t-1}h_0}{\beta} - (1+n)\gamma^{*t}h_0 - \gamma^{*t}c_0^i, \tag{85}$$

y su solución (49), donde se utilizó (83) para simplificar. Las herencias siguen la trayectoria $b_t^i = \gamma^{*t}b_0^i$, donde, utilizando las ecuaciones (5) y (34) y sustituyendo (49),

$$\begin{aligned} b_0^i &= \frac{\gamma^{*\sigma-1}}{\rho(1+n)}s_0^i - \frac{1}{1+n}\vartheta^{-1}c_0^i \\ &= \left[\left(1-\frac{1}{1+n}\vartheta^{-1}\right)\frac{\gamma^{*\sigma-1}}{\rho(1+n)} + \frac{1}{1+n}\vartheta^{-1}\right]s_0^i \\ &\quad - \frac{1}{1+n}\vartheta^{-1}\left(\frac{\gamma^{*\sigma-1}}{\rho}\frac{1}{\beta} - (1+n)\right)h_0. \end{aligned} \tag{86}$$

La condición de consistencia es la de la agregación del capital físico y el capital humano. Respecto de las condiciones de convergencia, la primera es obvia a partir de (32), y la segunda utiliza $(1+n)\rho\gamma^{*1-\sigma} < 1 \Leftrightarrow \gamma^* < \Gamma^*$.■

Demostración del Teorema 5

Cada una de las fórmulas se obtiene directamente por sustitución.■

El cálculo numérico

Realizar el cálculo numérico de las soluciones del modelo enunciadas en el Teorema 2 y simplificads en el Teorema 3 presenta dos problemas. El primero es encontrar el nivel de consumo óptimo. El segundo es encontrar la senda de equilibrio de la tasa de interés. El primer problema se resolvió con un método de "shooting" ad hoc imponiendo la condición (32) como condición de frontera. Utilizando números de 19 ó 20 dígitos, se logró una exactitud de aproximadamente 10^{-12} en la condición final. El segundo problema se resolvió haciendo converger la tasa de interés de demanda con la de oferta por otro método ad hoc. Las tasas convergieron hasta un error máximo extremo de 10^{-9} pero normalmente de entre 10^{-12} y 10^{-16}. El orden de error numérico puede calcularse como el producto $\prod_{t=1}^{40}\Gamma_t$, que normalmente fue del orden 10^{-5}.

Otra fuente de error es la condición de frontera. En particular, utilizamos como condición que a partir de $T+1$ la estrategia de las familias fuera constante, con $T = 40$. Las aproximaciones presentan su mayor desviación para valores de t cercanos a T debido a la singularidad del equilibrio estacionario. Lo mismo sucede con otras condiciones de frontera alternativas (ver Mayer, 1998). La distorsión introducida por este aspecto de la aproximación es visible solamente para valores $t \geq 36$, como un ajuste en los últimos períodos, debido a que el programa resuelve el modelo de optimización sujeto a la condición de frontera especificada (recuérdese el teorema de la autopista, que implica que la trayectoria se aproximará a la óptima de horizonte infinito excepto al final). Sin embargo, la transición al equilibrio termina mucho antes, y nuestras gráficas de resultados muestran solamente hasta los valores de t a partir de los cuales el comportamiento es regular.

Bibliografía

Abel, Andrew (1985), "Precautionary Saving and Accidental Bequests", *American Economic Review* 75, 4 (Sept.), 777-791.

Abel, Andrew (1987), "Operative Gift and Bequest Motives". *NBER Working Paper* 2331.

Alesina, A. y D. Rodrik (1994). "Distributive politics and economic growth", *Quarterly Journal of Economics* 109: 465-490.

Barro, R., Mankiw, G. y Sala-I-Martin, X. (1995), "Capital Mobility in Neoclasical Models of Growth", *American Economic Review* 85, 103-115.

Banco Mundial (1990), *World Development Report, 1990*, New York: Oxford University Press.

Becker, Gary S. Murphy, Kevin M. and Tamura, Robert (1990), "Human Capital, Fertility, and Economic Growth", *Journal of Political Economy* 98, 5-2 (Oct), S12-S37.

Benabou, R. (1997), "Inequality and Growth", in Ben Bernanke and Julio Rotenberg, Eds., *NBER Macroeconomics Annual*. Cambridge, MA, MIT Press, 1997, pp. 11-74.

Bénabou, R. (1995), "Unequal societies", New York: New York University, April. Mimeo. Revised May 1996, Cambridge. MA: *National Bureau of Economic Research Working Paper* 5583.

Benhabib, Jess, ed. (1992), "Cycles and chaos in economic equilibrium" *Princeton University Press*, 1992.

Bernanke, B. (1995), "Acumulation and the extent of inequality", May. London, England: *Centre for Economic Policy Research Discussion Paper* 1187.

Bertola, G. (1993), "Factor shares and savings in endogenous growth", *American Economic Review* 83:1184-1198.

Birdsall y Sabot (1995), "Inequality and Growth Reconsidered: Lessons from East Asia", *World Bank Economic Review*, September, 9(3), 477-508.

Birdsall y Londoño (1997), "Asset Inequality Matters: An Assessment of the World Bank's approach to Poverty Reduction.

Blanchard, Oliver J. and Fischer, Stanley (1989), *Lectures on Macroeconomics*, Cambridge, Mass., The MIT Press.

Boldrin, Michele, Montrucchio, Luigi (1985), "On the Indeterminacy of Capital Accumulation Paths", *University of Rochester Center for Economic Research Working Paper:* 24.

Boldrin, Michele and Woodford, Michael (1990), "Equilibrium Models Displaying Endogenous Fluctuations and Chaos", *Journal of Monetary Economics* (1990) vol.25, no.2 188-222.

Buiter, W. y Kletzer, K. (1992), "Permanent international productivity growth differentials in an integrated global economy", *NBER working papers* no. 4220.

Bullard, James and Butler, Alison (1993), "Nonlinearity and Chaos in Economic Models: Implications for Policy Decisions", *The Economic Journal*, vol. 103, no. 419, pp. 849-867.

Caballé, Jordi and Santos, Manuel S. (1993), "On Endogenous Growth with Physical and Human Capital", *Journal of Political Economy*, 1993, vol.101, no. 6, 1046-1067.

De Gregorio, José and Kim, Se-Jik (1994), "Credit Markets with Differences in Abilities: Education, Distribution and Growth", *IMF Working Paper*, WP/94/47, april.

De Gregorio, José (1996), "Borrowing Constraints, Human Capital Accumulation, and Growth", *Journal of Monetary Economics* 37 (1996) 49-71.

Diamond, Peter A. (1965), "National Debt in a Neoclassical Growth Model", *American Economic Review* 55, 5 (Dec.), 1126-1150.

Invernizzi, Sergio and Medio, Alfredo (1991), "On Lags and Chaos in Economic Dynamic Models", *Journal of Mathematical Economics* vol.20, no.6 pp.521-550.

Jappelli T. and Pagano, M. (1994), "Savings, growth and liquidity constraints", *Quarterly Journal of Economics*, 109, 83-109.

Kimball, Miles S. (1987), "Making Sense of Two-Sided Altruism", *Journal of Monetary Economics* 20, 2 (Sept.), 301-326.

Loury, G. (1981), "Intergenerational transfers and the distribution of earnings", *Econometrica* 49:843-867.

Lucas, Robert E., Jr. (1988), "On the Mechanics of Development Planning", *Journal of Monetary Economics*, 22, 1 (July), 3-42.

Mayer, D. y López, J. (1998), "Solución Numérica del Problema de Ramsey Mediante la Ecuación del Calor", Documento de Trabajo E-114, Centro de Investigación y Docencia Económicas, México.

Modigliani, F. (1986), "Life Cycle, individual thrift, and the wealth of nations", *American Economic Review* 76, 297-313.

Negroni, Georgio (1992), "Dinamiche caotiche nei modelli di equilibrio temporaneo con generazioni sovrapposte" ("Chaotic dynamics in Temporary Equilibrium Models with Overlapping Generations"), *Giornale degli Economisti e Annali di Economia*: 51(1-4) Jan-Apr 1992, 109-37.

Nishimura, Kazuo; Sorger, Gerhard and Yano, Makoto, (1994) "Ergodic Chaos in Optimal Growth Models with Low Discount Rates", *Journal of Economic-Theory* 4(5), August 1994, pages 705-17.

Peroty, R. (1992), "Fiscal policy, income distribution, and growth", Columbia University, November, *Working Paper* 636.

Persson, T., and G. Tabellini (1992), "Growth, distribution, and Politics", In *Political Economy, Growth, and Business Cycles*, A. Cuckierman, Z. Hercowitz, and L. Lederman, (Eds.). Cambridge, MA: The MIT Press.

Rebelo, Sergio (1991), "Long-Run Policy Analysis and Long Run-Growth", *Journal of Political Economy*, 99, 3 (June), 500-521.

Schultz, T. Paul (1992), "The Role of Education and Human Capital in Economic Development: An Empirical Assessment", *Yale Economic Growth Center Discussion Paper: 670*, August.

Usawa, Hirofumi (1965), "Optimal Technical Change in an Aggregative Model of Economic Growth", *International Economic Review*, 6 (January), 18-31.

Tablas I. Poblaciones que prefieren la economía abierta
(las que no aparecen tienen la preferencia opuesta)

I.1 s_0 = -0.4, 0.0 y 0.2

ES	Distribución			
	1	0.2	0.04	0.008
1/9	ninguna	ninguna	ninguna	ninguna
1	ninguna	ninguna	ninguna	ninguna
3.33	ninguna	ninguna	ninguna	ninguna

I.2 s_0 = 0.4 y 0.8

ES	Distribución			
	1	0.2	0.04	0.008
1/9	2	2	2	2
1	2	2	2	2
3.33	ninguna	ninguna	ninguna	ninguna

Tablas II. Poblaciones que prefieren que sea relajada la restricción de crédito
(las que no aparecen tienen la preferencia opuesta, economía abierta)

II.1 De s_0 = −0.4 a 0.4 ó a 0.8

ES	Distribución			
	1	0.2	0.04	0.008
1/9	ambas	ambas	ambas	ambas
1	ambas	ambas	ambas	0.4: ambas 0.8: 2
3.33	ambas	ambas	ambas	0.4: ambas 0.8: 2

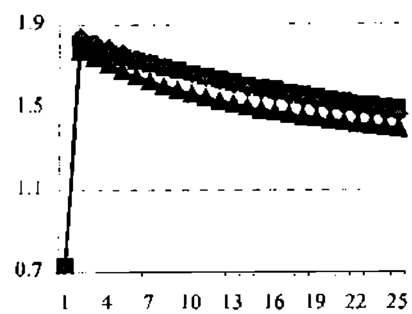
II.2 De s_0 = 0.0 a 0.2, 0.4 ó 100

ES	Distribución			
	1	0.2	0.04	0.008
1/9	ambas	ambas	2	2
1	ambas	0.2: 2 0.4: 2 100: ambas	0.2: 2 0.4: 2 100: ambas	0.2: 2 0.4: 2 100: ambas
3.33	ambas	0.2: 2 0.4: ambas 100: ambas	0.2: 2 0.4: 2 100: ambas	0.2: 2 0.4: 2 100: ambas

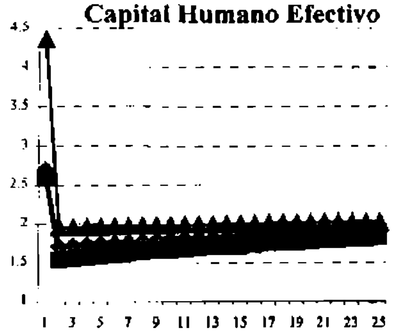
Gráficas I. Tasas de rendimiento para varias elasticidades de sustitución (ES) y para $s_0 = 0$ y 0.4

Economía cerrada, distribución 1

I.1 Tasa de Interés

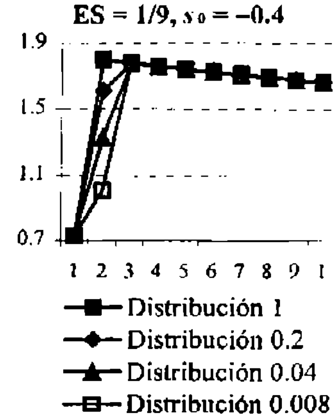


I.2 Rendimiento del Capital Humano Efectivo



Gráfica II
Tasa de Interés
(economía cerrada)

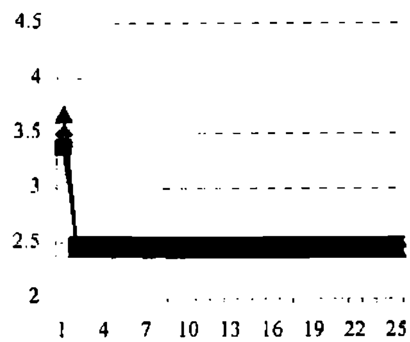
II. Tasa de Interés
ES = 1/9, $s_0 = -0.4$



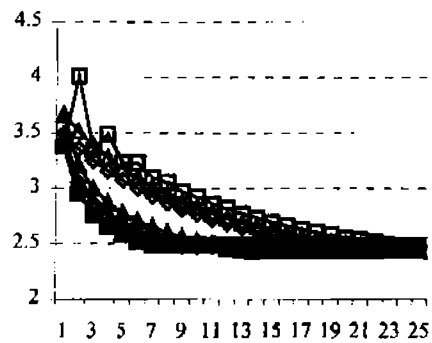
Rend. Marg. bienes de formación de capital humano

Economía abierta distribución 0.04

I.3 Población 1



I.4 Población 2

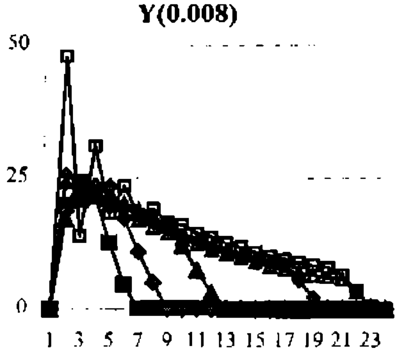


Código de las Gráficas I y III

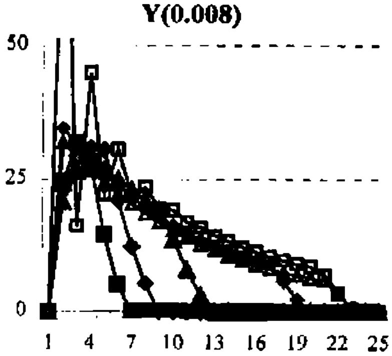
- ES = 1/9, s0 = 0.4
- ES = 1, s0 = 0.4
- ES = 3.3, s0 = 0.4
- ES = 1/9, s0 = 0
- ES = 1, s0 = 0
- ES = 3.3, s0 = 0

Gráficas III. Cambio en las variables principales al mejorar la distribución de 0.008 a 1 en la economía abierta, para varias elasticidades de sustitución (ES) y para $s_0 = 0$ y 0.4

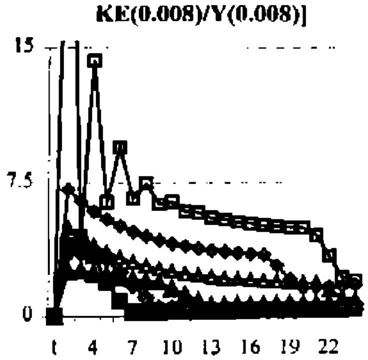
III.1 Capital
100×(K(1) - K(0.008)) / Y(0.008)



III.2 Producto
100×(Y(1) - Y(0.008)) / Y(0.008)



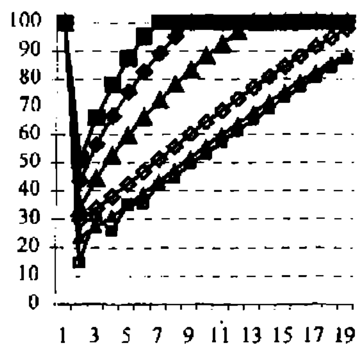
III.3 Capital Externo
100×[KE(1)/Y(1) - KE(0.008)/Y(0.008)]



Gráficas IV. Comparación de algunas variables de las poblaciones 1 y 2 para varias elasticidades de sustitución (ES) y para $s_0 = 0$ y 0.4
(Economía abierta, distribución 0.008)

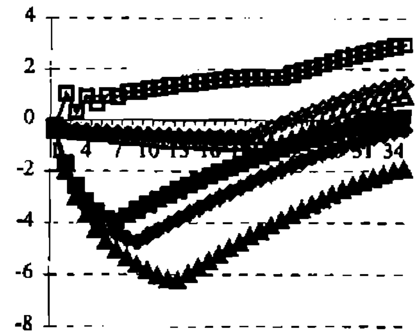
IV.1 Capital Humano

100×KH(2)/KH(1)



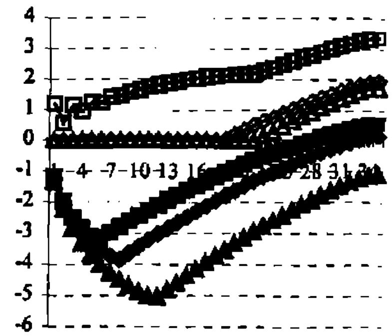
IV.2 Herencias

100×B(2)/B(1)



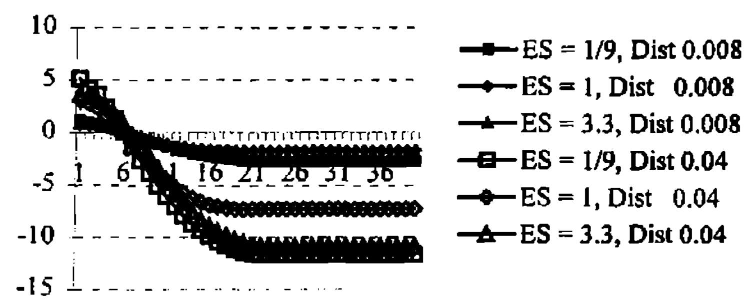
IV.3 Ahorro

100×S(2)/S(1)



Gráfica V. Cambios en el consumo de la población 2 cuando s_0 es modificado de 0 a 0.4
(varias distribuciones y elasticidades de sustitución, economía abierta)

100×(C(0.4) - C(0))/C(0)

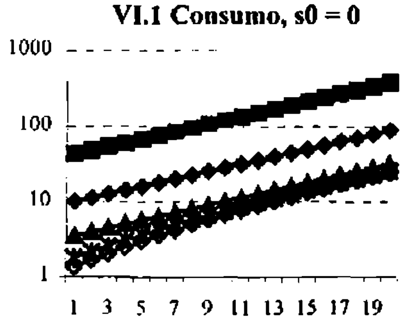


Código de las Gráficas IV

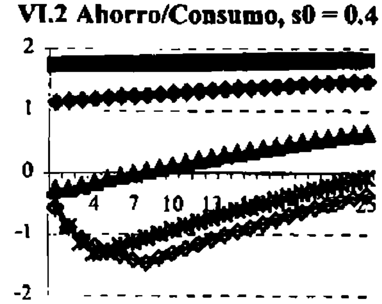
- ES = 1/9, s0 = 0.4
- ES = 1, s0 = 0.4
- ES = 3.3, s0 = 0.4
- ES = 1/9, s0 = 0
- ES = 1, s0 = 0
- ES = 3.3, s0 = 0

Gráficas VI. Distribución del consumo y del ahorro en la economía abierta

VI.1 Consumo, s0 = 0



VI.2 Ahorro/Consumo, s0 = 0.4



Código de las Gráficas VI

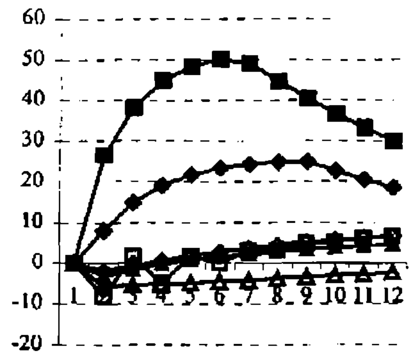
- Pob 1, Dist 0.008
- Pob 1, Dist 0.04
- Pob 1, Dist 0.2
- Pob 1, Dist 1
- Pob 2

Gráficas VII. Cambios en las variables principales al abrir la economía, para varias elasticidades de sustitución (ES) y para $s_0 = 0$ y 0.4

(Distribución 0.008)

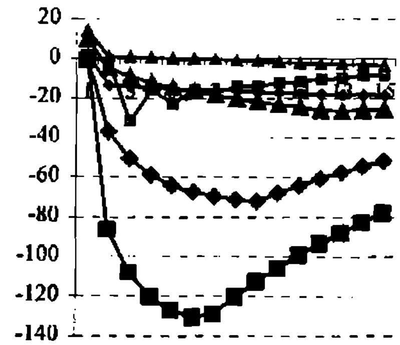
VII.1 Capital Humano

100×(KH - KH0)/Y0



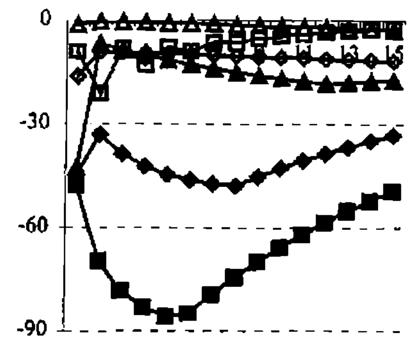
VII.2 Herencia, Población2

100×(B - B0)/Y0



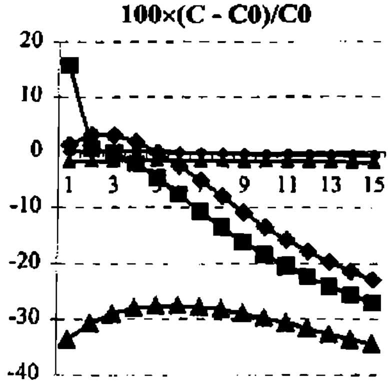
VII.3 Ahorro, Población2

100×(S - S0)/Y0



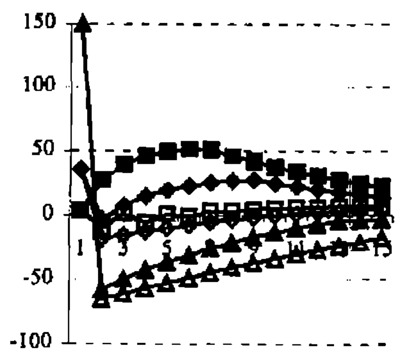
VII.4 Consumo, Población2

100×(C - C0)/C0



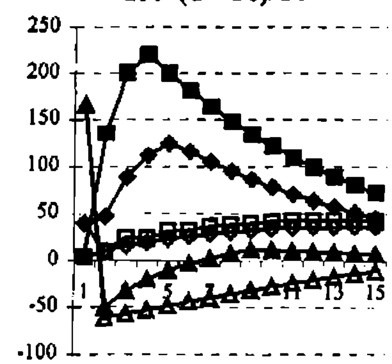
VII.5 Capital

100×(K - K0)/Y0



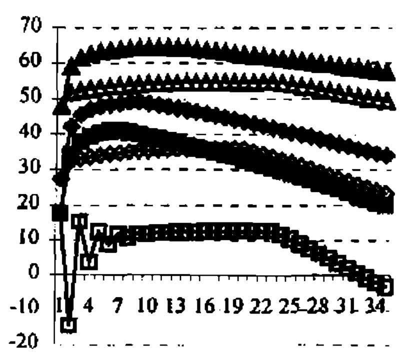
VII.6 Producto

100×(Y - Y0)/Y0



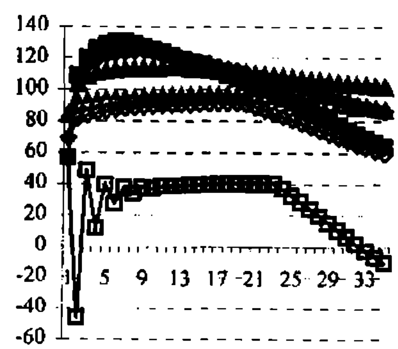
VII.7 Capital Externo

100×KE/Y



VII.8 Capital Externo

100×KE/K



Código de las Gráficas VII

- ES = 1/9, s0 = 0.4
- ES = 1, s0 = 0.4
- ES = 3.3, s0 = 0.4
- ES = 1/9, s0 = 0
- ES = 1, s0 = 0
- ES = 3.3, s0 = 0