CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DOCENCIA ECONÓMICAS, A.C.

CIDE

EXISTENCIA DEL EQUILIBRIO DE NASH QUE DA VENTAJA AL JUGADOR CON EL PRIMER TURNO

TESINA

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN ECONOMÍA

PRESENTA

JUAN CARLOS GUAPILLA SALAMANCA

ASESOR DE TESIS: DR. VÍCTOR GERARDO CARREÓN RODRÍGUEZ

MÉXICO, D.F. A 16 DE MAYO DE 2013

DEDICATORIAS

En el momento en que estamos ante un evento solemne, por lo regular nos dan ganas de detenernos a reflexionar en lo importante que han sido las personas que nos han acompañado y apoyado a lo largo de cada uno de los días en que nos hemos esforzado por alcanzar una meta; y es el mismo momento que queremos reconocerlos y agradecerles. Sin embargo, es mejor mostrar, con la misma cotidianidad, ese reconocimiento a esos seres que nos quieren, nos ayudan y nos acompañan. Agradezco a cada persona que me ha enseñado, y a quien le he aprendido, algo en mi vida. Solo el día de hoy puedo decir que su enseñanza, poca o mucha, es invaluable. Dedico este trabajo a:

Mi hija, Iris Sofia Guapilla Q.

El esfuerzo que muestro en este trabajo tiene la intención de ser ejemplo de tenacidad y constancia. Espero no lo olvides, o que al menos lo consideres cuando los momentos difíciles lleguen a tu vida y te pueda servir de referencia. Tiempo atrás me preguntaba hasta cuánto nos podemos permitir dejar caernos en nuestra rutina o problemas cotidianos, y con esto encontrar el pretexto perfecto para no seguir avanzando en el camino a nuestra metas. Creo que no debería haber tolerancia alguna al respecto. En efecto, las circunstancias nos pueden obligar a hacer pausas momentáneas, y aunque el momento puede ser largo, lo importante es no olvidarse de regresar al camino a la meta. Espero comprendas todo lo que esto significa mí, y "*... aunque todo esto te resulte muy difícil, al final comprendas que nada malo podrá haber nunca en el estudio de la economía, lo mismo que nunca te dejaré de querer.*"

Mi familia

Además de agradecer el apoyo que en ocasiones parece ser infinito y continuo. El desarrollo de nuestra vida aparenta ser efectivo, solo quizá, en el entorno de las actividades simples, sencillas y cotidianas. Solo de esa manera es posible levantar el espíritu al más alto grado posible.

Mis amigos y compañeros, escolares y laborales

Porque sin proponerlo nos volvemos en los mejores "*hermanos*", en los mejores confidentes y, en innumerables ocasiones, en los verdaderos incondicionales. Día a día se aprende entre nosotros todo lo necesario para hacerle frente a cualquier adversidad ante la vida, sea cual sea la magnitud de esta. Gracias a todos.

Mis profesores del CIDE

En especial al Dr. Víctor G. Carreón R. y al Dr. César L. Guerrero L. El esfuerzo que mostramos como alumnos prospera óptimamente a la "*vista*" y el "*cuidado*" de nuestros maestros. Agradezco a todos y cada uno de ellos, me siento orgulloso de pertenecer al CIDE.

CONTENIDO

EXISTENCIA DEL EQUILIBRIO DE NASH QUE DA VENTAJA AL JUGADOR CON EL PRIMER TURNO

- *Antes que nada ser verídico para contigo mismo. Y así, tan cierto como que la noche sigue al día, hallarás que no puedes mentir a nadie.*
- *El destino es el que baraja las cartas, pero nosotros somos los que jugamos.*

W. SHAKESPEARE

INTRODUCCIÓN

Uno de los conceptos más importantes en el estudio de la Teoría de Juegos es el equilibrio de Nash. En su tesis doctoral, John F. Nash (1951) define el equilibrio que lleva su nombre; sin embargo, con más de cien años de anterioridad ya había comenzado el desarrollo de este concepto.

El matemático y economista francés, Augustin Cournot (1838), fue el primero en aplicar métodos matemáticos para obtener analíticamente la solución, con un adecuado lenguaje algebraico, de un problema puramente económico como lo es el planteamiento de la competencia entre dos empresas por establecer un nivel óptimo de producción. La solución propuesta por Cournot para este modelo fue posteriormente considerada, como lo que actualmente se conoce, un equilibrio de Nash.

Un equilibrio como el de Cournot es aplicable a juegos estáticos, es decir, a juegos en que los jugadores toman sus decisiones de manera simultánea y a partir de la combinación de decisiones se obtienen los pagos para cada uno de ellos; esto se conoce como juegos en forma estratégica o normal.

Por otra parte, existen juegos que se llevan a cabo en más de una etapa, es decir, los jugadores deciden sus acciones por turnos. A esto se le conoce como juegos de forma extensiva, en los que, para aplicar el concepto de equilibrio de Nash, se define el juego de forma estratégica asociado.

Como se podrá ver a lo largo de este documento, el resultado obtenido en algunos equilibrios de Nash para el juego en forma estratégica asociado a un juego en forma extensiva no necesariamente refleja predicciones del comportamiento de los jugadores, por lo que se hace necesario considerar un refinamiento a la definición hecha por Nash. El concepto de EQUILIBRIO DE NASH DE PERFECTO EN SUBJUEGOS consiste en excluir equilibrios en los que las estrategias de los jugadores no son acordes a las de un jugador que desea optimizar su ganancia. En este tipo de estrategias, si el pago que obtiene un determinado jugador no es el óptimo, se dice que este jugador hace una amenaza no creíble.

En este documento se establece una proposición en la cual se afirma que, para un juego de dos etapas con dos jugadores, el jugador que tiene el primer turno consigue un pago mayor o igual optando por una estrategia de EQUILIBRIO PERFECTO EN SUBJUEGOS en comparación del pago que obtendría si optara por una estrategia de equilibrio que no es perfecto en subjuegos, es decir, por una estrategia de equilibrio basado en amenazas no creíbles.

El documento contiene, a manera de marco teórico, algunas definiciones proposiciones y lemas, todas ellas basadas en Osborne, M. &. Rubinstein A. (1994). Las demostraciones que aparecen después de cada proposición o lema son solo comentadas; para una revisión más profunda se sugiere revisar la misma obra.

En el apartado I se define el concepto del Equilibrio de Nash para juegos en forma estratégica. Después, en el apartado II, se revisa el mismo concepto para juegos en forma extensiva, además de introducir el concepto de Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos (ENPS) y el planteamiento de la hipótesis. En el apartado III se desarrolla la hipótesis del documento, presentando 2 ejemplos y un contraejemplo a la hipótesis. Posterior a esto, en el apartado IV se elabora la proposición de la formalización de la hipótesis y se lleva a cabo la demostración bajo las condiciones necesarias. Por último, en el apartado V, se revisan las conclusiones del trabajo. Se presentan también, un apéndice en el que se revisan dos ejemplos más que apoyan la hipótesis sugerida y con la bibliografía utilizada se cierra este documento.

I. EQUILIBRIO DE NASH PARA JUEGOS EN FORMA ESTRATÉGICA

Para definir un ENPS es necesario revisar algunos conceptos previos, tales como juego en forma estratégica, equilibrio de Nash, además de las condiciones para su existencia, y juego en forma extensiva, los cuales serán de suma importancia para el desarrollo de este trabajo.

En primer lugar, es necesario definir una estructura que permita modelar un juego. En esta estructura se debe representar la interacción de las decisiones tomadas por jugadores, quienes eligen su plan de acción en un solo momento para todo el juego y de manera simultánea. El concepto de juego en forma estratégica provee tal estructura, en la cual sus elementos describen las características necesarias para modelar una situación de conflicto entre dos o más jugadores.

DEFINICIÓN 1: Un JUEGO EN FORMA ESTRATÉGICA, denotado por $\Gamma = \langle N, (A_i), (\succsim_i) \rangle$, consiste en:

i) Un conjunto de jugadores, N.

ii) Un conjunto de acciones disponibles para cada jugador $i \in N$, no vacío, A_i.

iii) Una relación de preferencia para cada jugador $i \in N$, $\succsim_i$, sobre el conjunto de combinaciones de acciones del juego $A = \underset{j \in N}{\times} A_j$.

Si el conjunto de acciones A_i de cada jugador $i \in N$ es finito entonces se dice que el juego es FINITO.

A partir de un juego en forma estratégica es posible predecir un tipo de resultado el cual se basa en el supuesto de que cada jugador actúa de manera racional, y que asume que el resto de los jugadores hace lo mismo; así, cada jugador tiene una expectativa correcta de las acciones de los demás. Este concepto de solución es de de mayor uso actualmente dentro de la teoría de juegos, y es el de equilibrio de Nash.

DEFINICIÓN 2: Sea $\Gamma = \langle N,\ (A_i),\ (\succsim_i) \rangle$ un juego en forma estratégica. La combinación de acciones, $a^* \in A$, es un EQUILIBRIO DE NASH si para toda $i \in N$

$\left(a_{-i}^*, a_i^*\right) \succsim_i \left(a_{-i}^*, a_i\right)$, para toda $a_i \in A_i$

donde $a_{-i}^* = \left(a_1^*, a_2^*, \ldots, a_{i-1}^*, a_{i+1}^*, \ldots, a_N^*\right)$

Así, si a^* es equilibrio de Nash debe ocurrir que ningún jugador i tiene una acción que le genere un mejor resultado del que se produce cuando elige a_i^*, dado que cualquier otro jugador j elige su acción de equilibrio a_j^*. En otras palabras, ningún jugador tiene incentivos a desviarse de su acción de equilibrio, dada las acciones del resto de los jugadores.

La siguiente definición será útil para establecer las condiciones de existencia de un equilibrio de Nash, también es útil en el sentido de que es una forma alterna de definirlo.

DEFINICIÓN 3: Sea $\Gamma = \langle N,\ (A_i),\ (\succsim_i) \rangle$ un juego en forma estratégica, dado $a_{-i} \in A_{-i}$ se define el conjunto de MEJOR RESPUESTA del jugador *i* por

$$B_i(a_{-i}) = \{a_i \in A_i : (a_{-i}, a_i) \succsim_i (a_{-i}, a'_i),\ \forall a'_i \in A_i\}$$

El conjunto de mejor respuesta permite una alternativa a la Definición 2. Así es posible definir un equilibrio de Nash como una combinación de acciones, $a^* \in A$ tal que

$a_i^* \in B_i(a_{-i})$ para todo $i \in N$

Dado lo anterior, cabe preguntarse por las condiciones necesarias de un juego bajo las cuales el conjunto de equilibrios de Nash es no vacío. Con el objetivo de mostrar que para un juego existe un equilibrio de Nash, es suficiente con mostrar que existe un vector de acciones $a^* \in A$ tal que $a_i^* \in B_i(a_{-i})$ para todo $i \in N$. Si se define la función de mejor respuesta $B : A \to A$ por $B(a) = \underset{i \in N}{\times} B_i(a_{-i})$ entonces, se puede decir que $a^* \in A$ es un equilibrio de Nash si $a^* \in B(a^*)$.

Los diversos teoremas de punto fijo dan condiciones para *B* bajo las cuales, en efecto, existe una combinación de acciones $a^* \in A$ tal que $a^* \in B(a^*)$. En este caso se utiliza el Teorema de punto fijo de Kakutani, llamado así en honor al matemático japonés Shizuo Kakutani quien lo demostró en 1941, y que es una generalización del teorema del punto fijo de Brouwer.

LEMA 1. Teorema de punto fijo de Kakutani. Sea X un subconjunto compacto y convexo de R^n y sea $f : X \to X$ una función de conjunto de valores para la cual

- para toda $x \in X$ el conjunto $f(x)$ es no vacío y convexo
- la gráfica de f es cerrada (i. e. para todo par de sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ tales que $y_n \in f(x_n)$ para toda n, $x_n \to x$, y $y_n \to y$, entonces $y \in f(x)$)

Entonces existe $x^* \in X$ tal que $x^* \in f(x^*)$

Para utilizar el teorema de Kakutani, es necesario que X sea un conjunto COMPACTO y CONVEXO, también que $f(x)$ sea CONVEXO para cada $x \in X$ y que tenga una GRÁFICA CERRADA. También es necesario definir una relación de preferencias $\succsim_i$ sobre A, que sea CUASICÓNCAVA en A_i si para cada $a^* \in A$ el conjunto $\{a_i \in A_i : (a^*_{-i}, a_i) \succsim_i a^*\}$ es CONVEXO.

Así, suponiendo que se cumplen las condiciones descritas anteriormente, la Proposición 1 permite plantear las condiciones de existencia de un equilibrio de Nash.

PROPOSICIÓN 1: El juego en forma estratégica $\langle N, (A_i), (\succsim_i) \rangle$ tiene un equilibrio de Nash si para toda $i \in N$

i) el conjunto A_i de acciones del jugador i es un subconjunto no vacío, compacto y convexo de un espacio eucludiano

ii) la relación de preferencias $\succsim_i$ es continua y cuasicóncava en A_i

La demostración de esta proposición se basa en la definición de B (ver Definición 3). Utilizando los hechos de que, para cada $i \in N$, el conjunto $B_i(a_{-i})$ es no vacío, dado que $\succsim_i$ es continua y A_i es compacto y convexo, debido a que $\succsim_i$ es cuasicóncava en A_i; entonces B tiene una gráfica cerrada, por el mismo supuesto de que $\succsim_i$ es continua. Así, por la Proposición 1 (Teorema de Kakutani), B tiene un punto fijo; y que como se había apuntado previamente, cualquier punto fijo es un equilibrio de Nash del juego.

II. Equilibrio de Nash y Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos para juegos en forma extensiva y planteamiento de la hipótesis

El concepto de juego en forma extensiva, a diferencia del concepto de juego en forma estratégica, involucra la no simultaneidad en la decisión de los jugadores; es decir, describe situaciones de conflicto en el cual el turno de los jugadores se realiza en distintos momentos. El concepto describe de forma detallada de la estructura secuencial de las decisiones tomadas por los jugadores dentro de una situación estratégica. Se entenderá que hay información perfecta en un juego si para cada jugador, que tiene el turno de jugar, está completamente informado de los eventos que han ocurrido previamente.

DEFINICIÓN 4: Un JUEGO EN FORMA EXTENSIVA, CON INFORMACIÓN PERFECTA, denotado por $\Gamma^{ex} = \langle N,\ H,\ P,\ (\succsim_i) \rangle$, consiste en:

i) Un conjunto de jugadores, N.

ii) Un conjunto H (finito o infinito) de sucesiones con las siguientes propiedades:

a) $\phi \in H$.

b) Si $(a^k)_{k=1,\ldots,K} \in H$, ($K$ puede ser infinito) y $L < K$, entonces $(a^k)_{k=1,\ldots,L} \in H$.

c) Si $(a^k)_{k=1,2,\ldots} \in H$, entonces, $(a^k)_{k=1,\ldots,L} \in H$ para todo valor L entero positivo.

d) Si para cualquier sucesión $(a^k)_{k=1,\ldots}$ se tiene que $(a^k)_{k=1,\ldots,L} \in H$, para todo $K \geq 1$, entonces $(a^k)_{k=1,\ldots} \in H$.

Cada elemento del conjunto H es llamado HISTORIA, cada componente de una historia se le llama ACCIÓN tomada por un jugador. Una historia $(a^k)_{k=1,\ldots,K} \in H$ se dice TERMINAL si es infinita o no existe a^{K+1} tal que $(a^k)_{k=1,\ldots,K+1} \in H$. Al conjunto de historias terminales se le denota por Z, por lo que el conjunto de HISTORIAS NO TERMINALES se denota por $H \setminus Z$.

iii) Una función P que asigna a cada historia no terminal un elemento de N. P es la FUNCIÓN JUGADOR, $P : H \setminus Z \to N$. $P(h)$ indica al jugador *«que tiene el turno»* después de la historia h.

iv) Una relación de preferencias $\succsim_i$ sobre Z para cada jugador $i \in N$.

Si el conjunto H es finito, se dice que el JUEGO es FINITO. Si el tamaño de cada elemento de H es finito, entonces se dice que el Juego tiene HORIZONTE FINITO. Después de cualquier historia no terminal h el jugador $P(h)$ elige una acción del conjunto

$A(h) = \{a \mid (h, a) \in H\}$.

En un juego en forma extensiva, la secuencia de acciones que sigue un jugador define la táctica que emplea con sus contrincantes. Las combinaciones de las distintas secuencias seguidas por todos los jugadores determinan la historia y resultado del juego. De ahí la importancia de definir la estrategia de un jugador, la cual indica las acciones de manera secuencial que toma un jugador, y que depende a su vez de las secuencias de acciones del resto de los jugadores.

DEFINICIÓN 5: Una ESTRATEGIA para el jugador $i \in N$, en un juego en forma extensiva con información perfecta, Γ^{ex}, es una función que selecciona un elemento de $A_i(h)$, conjunto de acciones disponibles para el jugador $i \in N$ que depende de la historia h, para cada $h \in H \setminus Z$, donde $P(h) = i$.

Una estrategia para un jugador puede ser vista como un plan de acción completo, de forma contingente, es decir, el jugador tiene prevista su decisión para cada caso que le toque su turno.

Para cada vector de estrategias $s = (s_i)_{i \in N}$, en el juego extensivo $\Gamma^{ex} = \langle N, \ H, \ P, \ (\succsim_i) \rangle$ se define el RESULTADO $O(s)$ inducido por la historia terminal que sea arrojada del hecho de que cada jugador $i \in N$ siga la estrategia s_i. Esto es, $O(s)$ es la historia (posiblemente infinita) $(a^1, a^2, \ldots, a^K) \in Z$ tal que para $0 \leq k \leq K$ se tiene que $s_{P(a^1, a^2, \ldots, a^K)}(a^1, a^2, \ldots, a^K) = a^{k+1}$.

El primer concepto de solución que se define para un juego extensivo ignora la estructura secuencial del juego; considera a las estrategias como elecciones que son hechas por todos los jugadores antes de iniciado el juego.

Con el objeto de definir un equilibrio de Nash para un juego en forma extensiva, utilizando el mismo concepto de la definición 2, es necesario considerar la forma estratégica asociada, la cual modela la secuencia de decisiones de los jugadores considerándolas de forma simultánea, aunque esto no sea así. Es aquí cuando el concepto de estrategia cobra importancia, pues visto como plan contingente de acciones, la combinación de estrategias permite modelar una estructura de juego en forma normal.

DEFINICIÓN 6: La FORMA ESTRATÉGICA ASOCIADA AL JUEGO EN FORMA EXTENSIVA CON INFORMACIÓN PERFECTA $\Gamma^{ex} = \langle N,\ H,\ P,\ (\succsim_i) \rangle$ es el juego en forma estratégica $\Gamma = \langle N,\ (S_i),\ (\succsim'_i) \rangle$ para cada jugador $i \in N$, donde:

i) S_i es el conjunto de estrategias del jugador $i \in N$ en Γ^{ex}.

ii) $\succsim'_i$ se define por $s \succsim'_i s'$ si y solo si $O(s) \succsim_i O(s')$ para todo $s \in \times_{i \in N} S_i$ y $s' \in \times_{i \in N} S_i$.

Asumiendo que Γ^{ex} es finito, cada elemento de $\times_{i \in N} S_i$ tendrá asociado un elemento de Z, es decir, cualquier combinación de estrategias dará como resultado una historia terminal. Cabe señalar que existe la posibilidad de que distintos elementos de $\times_{i \in N} S_i$ tengan asociada una misma historia terminal, esto depende de las acciones integradas en las distintas combinaciones de estrategias, las cuales, siendo diferentes, pueden hacer llegar a un mismo resultado en el juego.

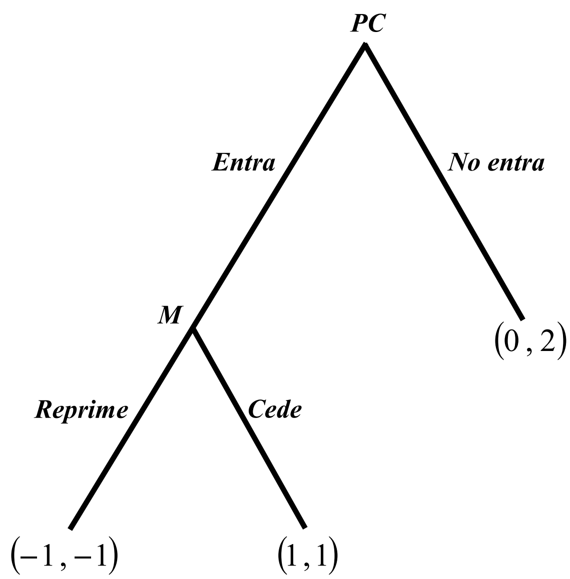
DEFINICIÓN 7: Sea Γ^{ex} un juego en forma extensiva. Un EQUILIBRIO DE NASH para Γ^{ex} es una combinación de estrategias $s \in \times_{i \in N} S_i$, el cual es un equilibrio de Nash para el juego en forma estratégica asociado a Γ^{ex}.

Dado un juego en forma extensiva, y dependiendo de su desarrollo secuencial, un jugador puede cambiar su plan de acción con la base de que deje de considerar a su estrategia original como óptima. En este caso, se dice que su estrategia incluía amenazas «ficticias». Por otra parte, si el resto de los jugadores busca una mayor ganancia entonces cada uno de ellos será capaz de anticipar tal situación y, asumiendo una respuesta racional de dicho jugador, sabrá que ese plan no se llevará a cabo. Se dice que este tipo de estrategias están basadas en amenazas carentes de credibilidad, son AMENAZAS NO CREÍBLES. La definición de equilibrio anterior puede conducir a equilibrios cuyas estrategias están basadas en amenazas no creíbles, por lo que pierden plausibilidad. Para hacer más explícita esta definición se muestra en el Ejemplo 1 la deducción de un equilibrio basado en amenaza no creíble.

EJEMPLO 1: JUEGO DE LA *CADENA DE TIENDAS* (*CHAIN-STORE GAME*)

Este juego consta de dos jugadores y dos etapas. En la primera etapa el jugador denominado Potencial Competidor (*PC*) tiene las alternativas de entrar o no al mercado de cadenas de tiendas. Si no entra, no recibe ganancia ni pérdida por ello; en tanto que el segundo jugador, el Monopolista (*M*), continúa con la misma ganancia. Si *PC* decide entrar, *M* debe decidir entre dos alternativas: o bien reprime a *PC* o cede el lugar dentro del mercado. Si *M* decide reprimir ambos tendrán pérdidas por el hecho de generar una competencia por la posesión del mercado, si *M* decide ceder ambos se repartirán la ganancia del mercado por partes iguales. En la Figura 1 se muestra el juego en forma extensiva.

Figura 1: *Juego de la Cadena de tiendas (Chain-Store Game)*



Las estrategias para cada jugador son las siguientes:

$S_1 = \{Entra, No\ entra\}$

$S_2 = \{\ Reprime, Cede\}$

La matriz de pagos de este juego se muestra en la Tabla 1.

Tabla 1. *Matriz de pagos para el juego en forma extensiva del Ejemplo 1*

		M	
		Reprime	*Cede*
PC	*Entra*	(–1, –1)	(1, 1)
	No entra	(0, 2)	(0, 2)

A partir de la Tabla 1 se obtienen dos equilibrios de Nash:

$s^1 = (Entra, Cede)$

$s^2 = (No\ entra,\ Reprime\ )$

En el equilibrio s^2, M indica que decidirá reprimir en su estrategia, lo cual le reditúa un menor pago que si decidiera ceder. Este es un caso en el cual un jugador amenaza a su contrincante de manera no creíble, por lo que esta combinación de estrategias, la cual es un equilibrio de Nash, pierde plausibilidad pues el jugador M no actúa del todo de manera racional.

Es así como se hace necesario considerar un refinamiento del concepto de equilibrio de Nash, para juegos en forma extensiva. Con las siguientes dos definiciones se tiene la intención de filtrar los equilibrios en los que cada jugador elije, en todo momento de la historia, su mejor estrategia, y con esto se dejará de tomar cuenta equilibrios en los cuales un jugador amenaza a sus contrincantes de forma no creíble. El siguiente concepto, subjuego, permite analizar un juego en partes, dependiendo de la historia que se trate, de tal manera que sea posible determinar las acciones de cada jugador en dada una historia del juego.

DEFINICIÓN 8: Sea Γ^{ex} un juego en forma extensiva con información perfecta. Sea $h \in H \setminus Z$. El SUBJUEGO de Γ^{ex} dado por h, es el juego $\Gamma^{ex}(h) = \left\langle N, H|_h, P|_h, \left(\succsim_i|_h\right)\right\rangle$ el cual satisface:

i) $H|_h$ es el conjunto de secuencias h' de acciones tales que $(h, h') \in H$.

ii) $P|_h$ está definida por $P|_h(h') = P(h, h')$ para cada $h' \in H|_h$.

iii) $\succsim_i|_h$ está definida por $h' \succsim_i|_h h''$ si y solo si $(h, h') \succsim_i (h, h'')$.

La siguiente noción de equilibrio requiere que la estrategia de cada jugador, dadas las estrategias del resto de los jugadores, sea óptima después de cualquier historia. Dada una estrategia s_i del jugador i y una historia h en un juego en forma extensiva Γ^{ex}, se denota por $s_i|_h$ a la estrategia inducida por s_i en el subjuego $\Gamma^{ex}|_h$, i. e. $s_i|_h(h') = s_i(h,h')$, para todo $h' \in H|_h$.

DEFINICIÓN 9: Sea Γ^{ex} un juego en forma extensiva con información perfecta. Un equilibrio de Nash $s \in \bigtimes_{i \in N} S_i$ de Γ^{ex} es un EQUILIBRIO DE NASH PERFECTO EN SUBJUEGOS para Γ^{ex} si, para todo $h \in H \setminus Z$, $s|_h = \left(S_1|_h, S_2|_h, \ldots, S_N|_h\right) \in \bigtimes_{i \in N} S_i|_h$ es un equilibrio de Nash para $\Gamma^{ex}(h)$.

Así, dado que en cada subjuego, "sobreviven" únicamente los equilibrios de Nash para los jugadores involucrados, el concepto de ENPS excluye de manera definitiva a los equilibrios de Nash basados en amenazas no creíbles.

Como se había comentado anteriormente, la acción que indica una amenaza no creíble de parte de un determinado jugador es vista, como se indica en la misma definición de estrategia, como parte de un plan contingente, lo cual no necesariamente ocurre. Los equilibrios de Nash para un juego en forma extensiva, que no son perfectos en subjuegos, son equilibrios en la forma estratégica asociada al juego en forma extensiva, pero para los cuales un determinado jugador, dada su estrategia de equilibrio, no elegiría de manera racional ya que elegiría una acción que induciría a una historia terminal tal que le dé un pago menor que si elige en ese mismo punto otra acción. Es así como es que este tipo de equilibrios pierde plausibilidad, pues aunque las combinaciones de estrategias que de ellos se derivan arrojen historias terminales, cuyos pagos son de equilibrio, dichas combinaciones no serán de equilibrio para un determinado jugador que le toque tirar en una determinada historia.

III. DESARROLLO DE LA HIPÓTESIS: EJEMPLOS Y CONTRAEJEMPLO

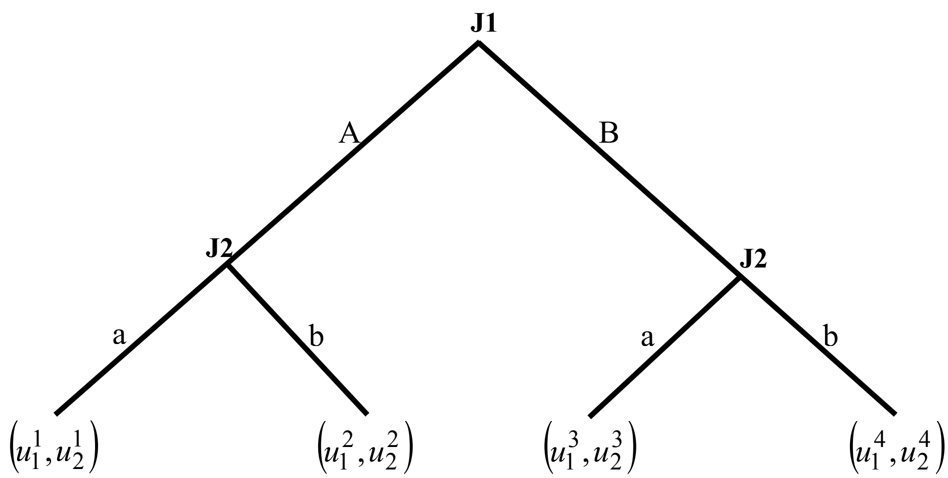
La hipótesis que se presenta en este documento se enfoca en el pago obtenido por el jugador que tiene el primer turno. Supóngase que en un juego en forma extensiva con información perfecta, la combinación de estrategias s^P es ENPS y que J1 es tal que $P(\phi)=1$. El pago obtenido para J1, en s^P es al menos igual al obtenido por alguna combinación de estrategias s que sea un Equilibrio de Nash que no es perfecto en subjuegos, es decir, que está basado en amenazas no creíbles. La situación del jugador que tiene su turno seguido de J1, es que solo puede amenazar al primer jugador haciéndolo obtener un menor pago, lo que lo llevaría a que él también disminuya su ganancia, lo cual no es su estrategia de equilibrio; por lo que solo le queda a este jugador seguir, en cualquier momento de la historia, su estrategia de equilibrio.

Para apoyar esta hipótesis se presentarán a continuación dos ejemplos. El primero tiene la finalidad de detectar las condiciones que hacen que la hipótesis sea verdadera. El juego que se propone se muestra en forma extensiva, a partir del cual se elaboran las funciones jugador y de pagos además del juego en forma estratégica asociado a éste.

EJEMPLO 2: JUEGO CON 2 JUGADORES Y 2 ACCIONES CADA UNO

Considere un juego en el cual participan dos jugadores con dos acciones disponibles para cada uno. J1 tiene el primer turno y puede elegir entre A o B, en tanto que J2 elige sólo después de J1, y sus acciones disponibles, independientemente de cuál haya sido la elección de J1, son a y b. Los pagos para cada jugador están representados de manera general, con el fin de establecer y deducir las condiciones de existencia de los equilibrios de Nash, tanto el que no es ENPS como el que sí lo es, de manera respectiva. La Figura 2 muestra la forma extensiva de este juego, y a partir de esto se deducen el conjunto de jugadores, los conjuntos de historias, las funciones jugador y de pagos, además de construir la forma estratégica asociada.

Figura 2: *Juego en forma extensiva con equilibrio de Nash basado en amenaza no creíble.*



Así, de acuerdo con la Definición 4, los elementos de este juego son los siguientes:

i) $N = \{1,2\}$

ii) $H = \{\phi, A, B, Aa, Ab, Ba, Bb\}$, $Z = \{Aa, Ab, Ba, Bb\}$. Entonces $H \setminus Z = \{\phi, A, B\}$

iii) Función jugador

$P: H \setminus Z \to N$
$\phi \mapsto 1$
$A \mapsto 2$
$B \mapsto 2$

iv) Funciones de pagos

$u_1 : Z \to \mathbf{R}$
$Aa \mapsto u_1^1$
$Ab \mapsto u_1^2$
$Ba \mapsto u_1^3$
$Bb \mapsto u_1^4$

$u_2 : Z \to \mathbf{R}$
$Aa \mapsto u_2^1$
$Ab \mapsto u_2^2$
$Ba \mapsto u_2^3$
$Bb \mapsto u_2^4$

Ahora, a partir de la Definición 6, se determina el juego en forma estratégica asociado. El conjunto de jugadores es el mismo, $N = \{1,2\}$. Las estrategias para cada jugador son $S_1 = \{A, B\}$, $S_2 = \{aa, ab, ba, bb\}$. Las estrategias de J2 están diseñadas como un plan contingente, de tal manera que cada entrada indica la acción que elegiría J2 dependiendo de lo que J1 elija. Así, por ejemplo, la primera estrategia, *aa*, indica que J2 elige *a* si J1 elige *A*, y *a*, si J1 elige *B*. Las relaciones de pagos para cada jugador están esquematizadas en la Tabla 2.

Tabla 2. *Matriz de pagos para el juego en forma extensiva de la Figura 1*

		J2			
		aa	*ab*	*ba*	*bb*
J1	*A*	u_1^1, u_2^1	u_1^1, u_2^1	u_1^2, u_2^2	u_1^2, u_2^2
	B	u_1^3, u_2^3	u_1^4, u_2^4	u_1^3, u_2^3	u_1^4, u_2^4

Sean $s^m \in S_1 \times S_2, \quad m = 1, 2, ..., 8$, tales que

$$s^1 = (A, aa) \qquad s^2 = (A, ab) \qquad s^3 = (A, ba) \qquad s^4 = (A, bb)$$
$$s^5 = (B, aa) \qquad s^6 = (B, ab) \qquad s^7 = (B, ba) \qquad s^8 = (B, bb)$$

El objetivo de este ejercicio es suponer la existencia de una combinación de estrategias que sean un equilibrio de Nash sin ser perfecto en subjuegos, y a partir de esto se deduce la combinación de estrategias que son un ENPS y que le de un mayor pago a J1.

Sin pérdida de generalidad, supóngase que $s^1 = (A, aa)$ es equilibrio de Nash sin ser ENPS, es decir, que está basado en amenaza no creíble[1]. Entonces se deben cumplir las tres siguientes condiciones, a las que se les llamará en adelante condiciones α :

$$\left.\begin{array}{l} u_1^1 \geq u_1^3 \\ u_2^1 \geq u_2^2 \\ u_2^4 > u_2^3 \end{array}\right\} \qquad \ldots(\alpha)$$

Las dos primeras corresponden con que s^1 sea un equilibrio de Nash en el juego en forma estratégica asociado, lo cual se puede verificar en la matriz de pagos, y la tercera corresponde con que s^1 está basado en una amenaza no creíble. Esto se comprueba con el plan contingente de J2 en s^1, el cual indica que elige *a* en caso de que J1 elija *B*. Pero dado que el pago que recibe J2 al elegir *b* es mayor que al elegir *a* ($u_2^4 > u_2^3$), hace que esta estrategia se vuelva una amenaza no creíble por parte del segundo jugador. Así, bajo estas condiciones, se aplicará el proceso de *Backward Induction* para obtener las estrategias de ENPS para ambos jugadores.

[1] Cabe hacer notar que el objetivo de este ejemplo es deducir las condiciones de existencia de un ENPS, basándose en el supuesto de la existencia de un equilibrio de Nash sin ser perfecto en subjuegos, por lo que se elige arbitrariamente una combinación de estrategias que cumpla con las condiciones. En este caso se eligió s^1, pero cualquier otra puede ser útil; y la deducción de un ENPS, que le dé un mayor pago a J1, será la misma.

Si $h = A$, entonces, por α, a J2 le conviene elegir a. En tanto que si $h = B$, a J2 le conviene elegir b. Por lo que la estrategia de J2, es ab. Ahora, ¿cuál debe ser la estrategia de J1, dadas las condiciones α y la estrategia de J2?

La estrategia de J1 depende de la relación que guardan entre sí las cantidades u_1^1 y u_1^4. Por tricotomía, se tienen tres casos: $u_1^1 > u_1^4$, $u_1^1 = u_1^4$ y $u_1^1 < u_1^4$. A continuación se analizaran cada uno de ellos.

CASO 1: Supóngase que $u_1^1 > u_1^4$, a J1 le conviene elegir *A*. Combinando esta nueva condición con α se tiene que

$$\left.\begin{array}{l} u_1^1 \geq u_1^3 \\ u_2^1 \geq u_2^2 \\ u_2^4 > u_2^3 \quad u_1^1 > u_1^4 \end{array}\right\}$$

Cabe hacer notar que las tres últimas son condiciones para que $s^2 = (A, ab)$ sea ENPS. Si bien es cierto que $u_1(s^2) = u_1(s^1) = u_1^1$, al menos se puede asegurar que J1 no tiene una mayor ganancia con la combinación de estrategias que son equilibrio sin ser ENPS.

CASO 2: Supóngase que $u_1^1 = u_1^4$, el J1 puede elegir tanto a A como a B de manera indiferenciada. Combinando nuevamente con α se tiene que

$$\left.\begin{array}{l} u_1^1 \geq u_1^3 \\ u_2^1 \geq u_2^2 \\ u_2^4 > u_2^3 \quad u_1^1 = u_1^4 \end{array}\right\}$$

las cuales son condiciones suficientes para que $s^2 = (A, ab)$ y $s^6 = (B, ab)$ sean ENPS.

Al igual que el caso anterior, estas dos combinaciones de estrategias producen un pago a J1 no menor que el que obtiene de s^1. De hecho $u_1(s^1) = u_1(s^2) = u_1^1 = u_1^4 = u_1(s^6)$.

CASO 3: Supóngase que $u_1^1 < u_1^4$, al J1 le conviene elegir B. Combinando con α se tiene que

$$\left.\begin{array}{ll} u_1^1 \geq u_1^3 & \\ u_2^1 \geq u_2^2 & \\ u_2^4 > u_2^3 & u_1^4 > u_1^1 \end{array}\right\}$$

y estas son condiciones para que $s^6 = (B, ab)$ sea ENPS. En este caso, dado que $u_1^4 > u_1^1$, se cumple que $u_1(s^6) > u_1(s^1)$, es decir, que J1 recibe un mayor pago en el ENPS existente que en el equilibrio que no es perfecto en subjuegos.

En el Ejemplo 1 se muestra que, dada una combinación de estrategias que conforman un equilibrio de Nash sin ser perfecto en subjuegos, se puede encontrar un ENPS tal que le otorga un pago mayor o igual a J1 que el que no es perfecto en subjuegos. Esto hace verdadera la hipótesis hasta el momento.

El siguiente ejemplo es un juego que no es finito, es decir, el conjunto H está conformado por una cantidad infinita de historias. De cualquier manera, es un ejemplo ilustrativo acorde con la hipótesis que se quiere probar. En este ejemplo, dos empresas que producen bienes homogéneos, compiten en cantidades de producción. Una, la empresa líder, elige en la primera etapa del juego, posteriormente la otra hace lo propio después de observar la cantidad de la primera.

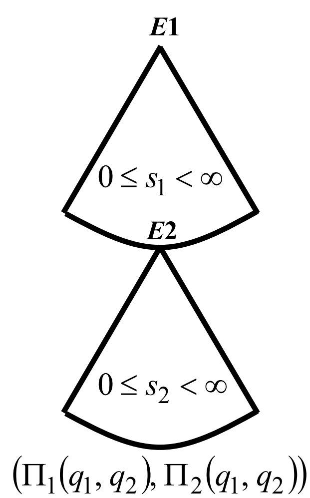
EJEMPLO 3: MODELO DE STACKELBERG

Dentro de un ambiente de oligopolio, dos empresas, las cuales producen un mismo bien idéntico (homogéneo), deben decidir la cantidad de producción. Suponga que una de las empresas puede elegir primero; la otra, al observar el nivel de producción de la primera ($q_1 \geq 0$), elige el suyo ($q_2 \geq 0$). Suponga también que el costo marginal, *c*, es constante y el mismo para ambas empresas, y que la demanda está dada por la función $P(Q) = a - Q$, donde $Q = q_1 + q_2$, y $c < a$. Los beneficios obtenidos por cada empresa, están dadas por la siguiente expresión:

$$\Pi_i(q_i, q_j) = q_i[P(Q) - c], \text{ con } i \neq j,\ i, j \in \{1, 2\}$$

La Figura 3 muestra la forma extensiva del juego dos las empresas, de acuerdo con el modelo propuesto por Stackelberg. En esta figura se indican las estrategias elegidas dentro de un rango continuo y los pagos para ambos jugadores que dependen de las cantidades optadas.

Figura 3. *Juego de oligopolio entre dos empresas*



De acuerdo con la Definición 6, el juego en forma normal asociado es:

i) El conjunto de jugadores: $N = \{E1, E2\}$

ii) Conjunto de estrategias:

$s_i \in [0,\infty)$, $s_j \in [0,\infty)$, con $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2\}$

iii) Funciones de pagos

$\Pi_i(q_i, q_j)$, con $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2\}$

El siguiente paso es determinar una solución del juego utilizando el concepto de ENPS. Es necesario precisar la estrategia de equilibrio para ambos jugadores en cada etapa del juego, en otras palabras se aplicará el método de *Backward Induction*. La decisión de $E2$ está sujeta a la estrategia elegida por $E1$, es decir, dependiendo de la cantidad q_1 elegida por $E1$, acorde con la Definición 3, $E2$ elegirá su mejor respuesta. Así, se deduce a partir de la maximización de los beneficios obtenidos por $E2$, la regla de correspondencia de mejor respuesta en función de q_1.

$E2$ resuelve:

$$\max_{q_2 \geq 0} \{\Pi_2(q_1, q_2) = q_2[a - q_1 - q_2 - c]\}$$

CPO:

$$(a - c) - q_1 - 2q_2 = 0$$

$$q_2 = \frac{a - q_1 - c}{2}$$

$$q_2^*(q_1) = \frac{a - q_1 - c}{2} \quad \ldots (1.1)$$

La cual es la correspondencia de mejor respuesta de $E2$, $R_2(q_1)$. Ahora, $E1$ maximiza sus beneficios en función de la mejor respuesta de $E2$, es decir, de la expresión (1.1).

$E1$ resuelve:

$$\max_{q_1 \geq 0} \{\Pi_1(q_1, q_2) = q_1[a - q_1 - q_2 - c]\}$$

$$\text{s. a. } q_2 = \frac{a - q_1 - c}{2}$$

Así,

$$\max_{q_1 \geq 0} \{\Pi_1(q_1, q_2) = q_1[a - q_1 - q_2 - c]\} = \max_{q_1 \geq 0} \left\{ \frac{(a - c)q_1 - q_1^2}{2} \right\}$$

CPO:

$$\frac{1}{2}[(a - c) - 2q_1] = 0$$

$$q_1^* = \frac{a - c}{2} \quad \ldots(1.2)$$

Las expresiones (1.1) y (1.2) denotan las correspondencias de mejor respuesta para cada jugador[2]. La expresión (1.2) muestra la estrategia de equilibrio de $E1$ en la primera etapa del juego, y de (1.1) se deduce la estrategia de equilibrio de $E2$ en la segunda etapa del juego.

Sustituyendo (1.2) en (1.1)

$$q_2^*(q_1^*) = \frac{a - \frac{a - c}{2} - c}{2}$$

$$q_2^*(q_1^*) = \frac{a - c}{4}$$

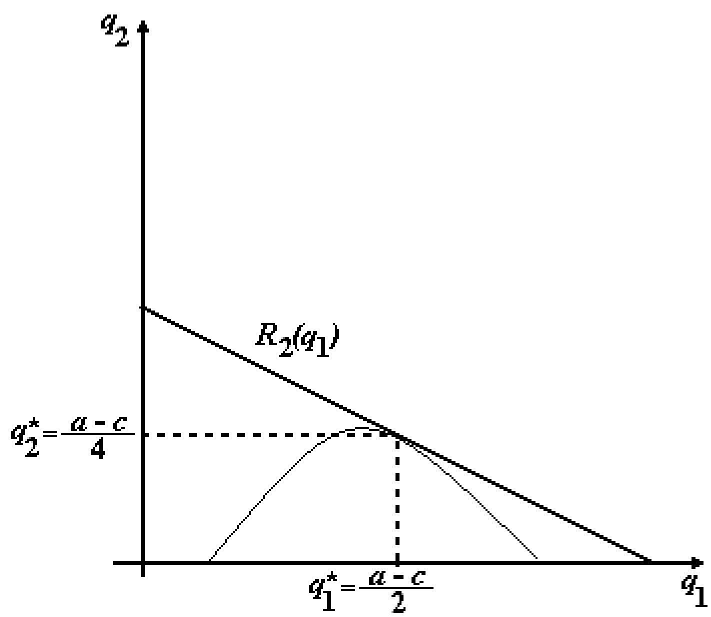
[2] Dentro de la literatura de organización industrial, tales funciones se les conoce como curvas de reacción.

Así, el Equilibrio de Nash, el cual es Perfecto en Subjuegos, para la competencia de Stackelberg, es la combinación de estrategias:

$$\left(\frac{a-c}{2}, \frac{a-c}{4}\right)$$

En la Figura 4 se muestra gráficamente la correspondencia de mejor respuesta y el equilibrio de Nash.

Figura 4. *Equilibrio de Nash en competencia de Stackelberg*



Lo anterior es válido cuando $E1$ es considerada como líder, pero ¿qué sucede cuando la empresa seguidora, $E2$, no reconoce a $E1$ como líder? Para responder esto habría que suponer que no hay líder en el juego, y que ambas empresas eligen simultáneamente sus cantidades de producción. Bajo esta nueva condición, el juego que se desarrolla es el propuesto por Cournot en 1838. Con el objetivo de deducir el equilibrio de Nash $\left(q_1^*, q_2^*\right)$ cada empresa debe resolver:

$$\max_{q_i \geq 0} \left\{q_i \left[a - \left(q_i + q_j^*\right) - c\right]\right\} \text{ con } i = 1, 2 \text{ e } i \neq j$$

Suponiendo que $q_j^* < a - c$, por CPO:

$$(a-c) - q_j - 2q_i = 0$$

$$q_i^* = \frac{a - q_j^* - c}{2}$$

con $i = 1, 2$ e $i \neq j$

Entonces:

$$q_1^* = \frac{a - q_2^* - c}{2} \ldots (1.3)$$

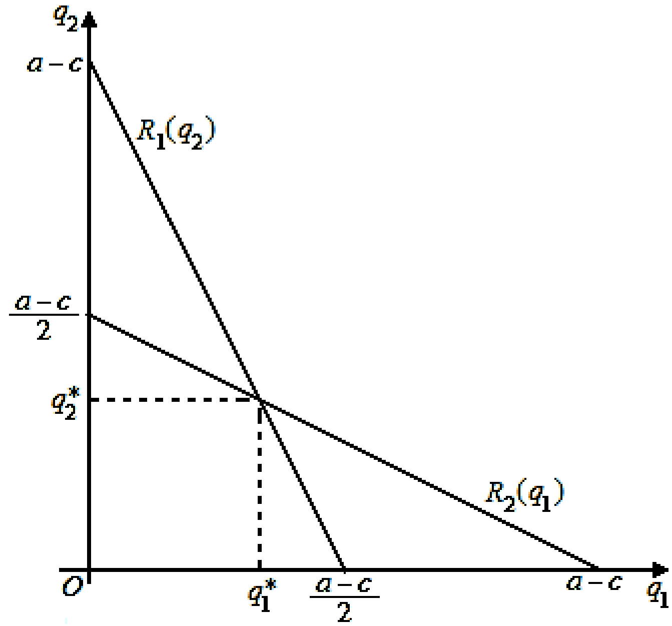
$$q_2^* = \frac{a - q_1^* - c}{2} \ldots (1.4)$$

Como se puede notar, las expresiones (1.3) y (1.4) son funciones de una variable, y son para el caso de la competencia en Cournot, las correspondencias de mejor respuesta, $R_1(q_2)$ y $R_2(q_1)$. Resolviendo (1) y (2) para (q_1^*, q_2^*), se obtiene que:

$$q_1^* = q_2^* = \frac{a-c}{3}$$

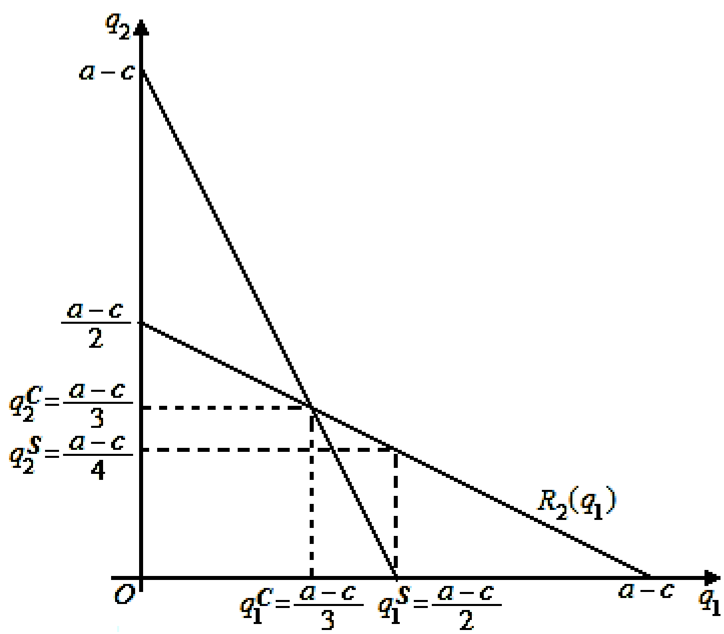
En la Figura 5 se muestra la gráfica de ambas curvas de reacción. El punto de intersección representa el equilibrio de Nash.

Figura 5. *Equilibrio de Nash en competencia de Cournot*



En la Figura 6 se muestra gráficamente un comparativo de ambos equilibrios, Cournot y Stackelberg, en esta gráfica se puede notar que $q_1^S > q_1^C$ y $q_2^S < q_2^C$.

Figura 6. *Comparativo de los Equilibrios de Nash en Cournot y Stackelberg*



El equilibrio de Cournot es válido dentro de un contexto de juego estático, es decir, cuando ambas empresas eligen de manera simultánea. Dadas las cantidades de equilibrio en ambos tipos de competencia, Stackelberg y Cournot, es posible representar el juego propuesto en la Figura 3 no con un rango continuo de opciones para cada jugador, sino discretizarlo de tal manera que cada empresa tenga dos opciones a elegir. En la primera etapa del juego, $E1$ puede elegir entre el nivel de producción de equilibrio en Stackelberg o bien el correspondiente a Cournot. En la segunda etapa, $E2$ tiene las mismas opciones. La Figura 7 presenta el juego en forma extensiva donde las acciones de ambos jugadores son las cantidades de equilibrio en ambas competencias, los pagos de los jugadores en este juego se obtienen de calcular los beneficios tanto de $E1$ como de $E2$ combinando las dos acciones de cada uno de ellos, Stackelberg (S) y Cournot (C). Así, si ambas empresas eligen sus respectivos niveles de producción en Stackelberg, entonces los pagos se calculan de la sigiente manera:

Para $E1$

$$
\begin{aligned}
\Pi_1\left(q_1^S, q_2^S\right) &= q_1^S\left[a-\left(q_1^S+q_2^S\right)-c\right] \\
&= \left(\frac{a-c}{2}\right)\left[a-\left(\frac{a-c}{2}+\frac{a-c}{4}\right)-c\right] \\
&= \left(\frac{a-c}{2}\right)\left[a-\frac{3}{4}(a-c)-c\right] \\
&= \left(\frac{a-c}{2}\right)\left[\frac{1}{4}(a-c)\right] \\
&= \frac{1}{8}(a-c)^2
\end{aligned}
$$

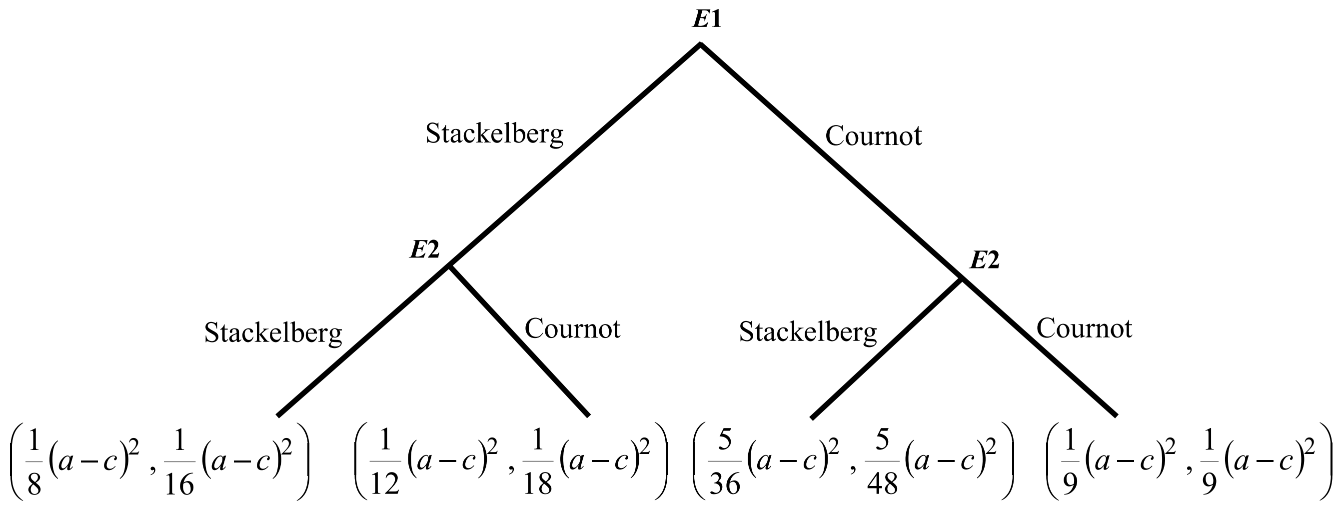
Para *E2*

$$\Pi_2\left(q_1^S, q_2^S\right) = q_2^S\left[a - \left(q_1^S + q_2^S\right) - c\right]$$
$$= \left(\frac{a-c}{4}\right)\left[a - \left(\frac{a-c}{2} + \frac{a-c}{4}\right) - c\right]$$
$$= \left(\frac{a-c}{4}\right)\left[\frac{1}{4}(a-c)\right]$$
$$= \frac{1}{16}(a-c)^2$$

De la misma forma se calculan los pagos para resto de combinaciones de acciones, de tal manera que:

- $\Pi_1\left(q_1^S, q_2^C\right) = \frac{1}{12}(a-c)^2$
- $\Pi_2\left(q_1^S, q_2^C\right) = \frac{1}{12}(a-c)^2$
- $\Pi_1\left(q_1^C, q_2^S\right) = \frac{5}{36}(a-c)^2$
- $\Pi_2\left(q_1^C, q_2^S\right) = \frac{5}{48}(a-c)^2$
- $\Pi_1\left(q_1^C, q_2^C\right) = \frac{1}{9}(a-c)^2$
- $\Pi_2\left(q_1^C, q_2^C\right) = \frac{1}{9}(a-c)^2$

Figura 7. *Juego en forma extensiva cuando las empresas eligen entre los niveles de equilibrio de Stackelberg o Cournot*



Y, de acuerdo con la definición 6, el juego en forma estratégica asociado consta del conjunto de jugadores, $N = \{E1, E2\}$. Las estrategias para cada jugador, $s_1 = \{S, C\}$, $s_2 = \{SS, SC, CS, CC\}$. La matriz de pagos se presenta en la Tabla 3.

Tabla 3. *Matriz de pagos para el juego en forma extensiva de la Figura 7*

		$E2$			
		SS	SC	CS	CC
$E1$	S	$\left(\frac{1}{8}(a-c)^2, \frac{1}{16}(a-c)^2\right)$	$\left(\frac{1}{8}(a-c)^2, \frac{1}{16}(a-c)^2\right)$	$\left(\frac{1}{12}(a-c)^2, \frac{1}{18}(a-c)^2\right)$	$\left(\frac{1}{12}(a-c)^2, \frac{1}{18}(a-c)^2\right)$
	C	$\left(\frac{5}{36}(a-c)^2, \frac{5}{48}(a-c)^2\right)$	$\left(\frac{1}{9}(a-c)^2, \frac{1}{9}(a-c)^2\right)$	$\left(\frac{5}{36}(a-c)^2, \frac{5}{48}(a-c)^2\right)$	$\left(\frac{1}{9}(a-c)^2, \frac{1}{9}(a-c)^2\right)$

A partir de la información de la Tabla 3, se verifica que los equilibrios de Nash son:

$s^1 = (S, SC)$

$s^2 = (C, CC)$

Resolviendo por *Backward Induction*, se obtiene que s^1 es ENPS en tanto que s^2 es un equilibrio que no es ENPS debido a que está basado en amenaza no creíble, basta con verificar que en esta estrategia *E*2 elige *C* si *E*1 elige *S*, pero esta acción le otorga un pago menor a *E*2 que si eligiera *S*.

El asunto particular de interés es el beneficio obtenido del jugador que elige primero, en este caso la empresa 1.

Beneficios de *E*1 en s^1:

$$\Pi_1\left(q_1^S, q_2^S\right) = \frac{1}{8}(a-c)^2$$

Beneficios de *E*1 en s^2:

$$\Pi_1\left(q_1^C, q_2^C\right) = \frac{1}{9}(a-c)^2$$

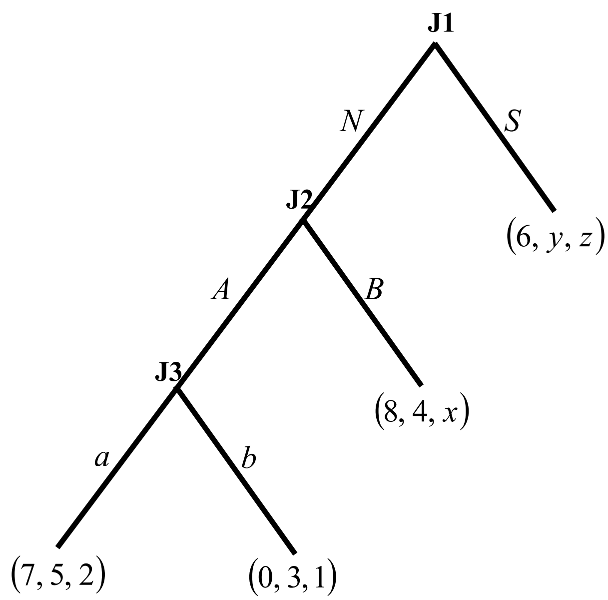
Así, como $\Pi_1\left(q_1^S, q_2^S\right) = \frac{1}{8}(a-c)^2 > \frac{1}{9}(a-c)^2 = \Pi_1\left(q_1^C, q_2^C\right)$, *E*1 obtiene una mayor ganancia en el ENPS, que en uno que no lo es, el cual está basado en amenaza no creíble.

Nuevamente se ha probado como cierta la hipótesis. En el apéndice de este documento, se presentan tres ejemplos más en los que se prueba el mismo resultado. En el primero se parte de un equilibrio que no es perfecto en subjuegos y se encuentra un ENPS que dan un pago mayor o igual al jugador que tiene el primer turno, J1, es semejante al Ejemplo 2. En el segundo caso se retoma el Ejemplo 1, juego de la *Cadena de Tiendas* (*Chain-Store Game*) pero ahora se prueba como cierta la hipótesis. El tercero se refiere al juego clásico de Negociación en el que dos jugadores se reparten 1 dólar, en este caso se asume que el juego termina en la segunda etapa y se elaboran estrategias de valor discreto para el primer jugador. En estos tres juegos, ya sea por construcción, Ejemplo 5, o por cotejo, se verifica como cierta la hipótesis de este documento; sin embargo, en todos estos ejemplos solo se prueba la hipótesis para juegos con cantidades finitas de historias. No se ha probado con un número generalizado y tampoco se ha puesto a prueba la hipótesis en un juego que tenga más de dos etapas; al respecto se propone el siguiente ejemplo con tres etapas y tres jugadores.

<u>EJEMPLO 4: CONTRAEJEMPLO A LA HIPÓTESIS. 3 JUGADORES CON 2 ACCIONES CADA UNO, EN 3 ETAPAS</u>

Se presenta a continuación un juego de tres etapas en el que participan 3 jugadores con dos acciones cada uno. Este es un ejemplo que muestra como falsa la hipótesis para juegos de más de 2 etapas. En este juego se obtendrán 3 equilibrios de Nash, uno de ellos ENPS y dos más basados en amenaza no creíble. Uno de éstos produce un pago mayor a J1 que el que obtendría en el ENPS. La Figura 8 muestra la forma extensiva del juego.

Figura 8. *Juego en forma extensiva del Contraejemplo a la hipótesis.*



Donde los valores de x, y y z pueden ser cualesquiera. El juego en forma estratégica asociado es el siguiente: conjunto de jugadores, $N = \{1, 2, 3\}$. Las estrategias para cada jugador son:

$S_1 = \{N, S\}$

$S_2 = \{AA, AB, BA, BB\}$

$$S_3 = \{aaaa, aaab, aaba, abaa, baaa, aabb, abab, abba, baab, baba, bbaa, abbb, babb, bbab, bbba, bbbb\}$$

Para efectos de simplificación, dado que la historia $h = S$ es una historia terminal las estrategias de J2 y J3, vistas como planes contingentes, pierden efecto. Pueden considerarse sus estrategias como las propias acciones que tienen al momento que tienen su turno. Así, simplificando los conjuntos de estrategias, se tiene que: $S_2 = \{A, B\}$ y $S_3 = \{a, b\}$, S_1 es el mismo. Las matrices de pagos están representadas en las Tablas 4 y 5.

Tabla 4. *Matriz de pagos para el juego en forma extensiva de la Figura 8, cuando J3 elige a*

J3 elige *a*

		J2	
		A	B
J1	N	$(7, 5, 2)$	$(8, 4, x)$
	S	$(6, y, z)$	$(6, y, z)$

Tabla 5. *Matriz de pagos para el juego en forma extensiva de la Figura 8, cuando J3 elige b*

J3 elige b

		J2	
		A	B
J1	a	$(0, 3, 1)$	$(8, 4, x)$
	b	$(6, y, z)$	$(6, y, z)$

A partir del juego en forma estratégica asociado se obtiene tres equilibrios de Nash:

$$s^1 = (N, A, a)$$

$$s^2 = (N, B, b)$$

$$s^3 = (S, B, b)$$

Por *Backward Induction* se obtiene que s^1 es ENPS. Con la forma estratégica asociada a este juego, se deduce que s^2 y s^3 son Equilibrios de Nash basados en amenazas no creíbles (basta con verificar que en ambos, J3 elige *b*, lo que le ofrece un pago menor que si elige *a*). Ahora, se comparan en particular los pagos obtenidos para J1 en los equilibrios s^1 y s^2:

$$u_1\left(s^1\right) = 7 < 8 = u_1\left(s^2\right)$$

Como podemos notar, lo anterior hace falsa la hipótesis debido a que s^1 es ENPS en tanto que s^2 está basado en amenaza no creíble. De esta manera se reduce la hipótesis a juegos finitos con información perfecta de dos etapas.

IV. Demostración de la hipótesis bajo las condiciones necesarias: Proposición 3

La enunciación formal de la hipótesis se establece en la Proposición 3 de este documento. Para su demostración es necesario revisar una definición más, un lema y una proposición previa. En la Definición 10 se determina el concepto de longitud de un juego, lo que permitirá utilizar la notación cuando se demuestre la Proposición 3 que considera únicamente juegos de dos etapas, o cuya longitud sea de dos. El Lema 2, conocido como propiedad de una desviación, es preciso para probar la existencia del ENPS en todo juego finito en forma extensiva con información perfecta, Proposición 2. Como se podrá ver, para la demostración de la Proposición 3 es necesario el supuesto de existencia de ENPS.

DEFINICIÓN 10: Para un juego de forma extensiva Γ^{ex}, se denota por $\ell\left(\Gamma^{ex}\right)$ a la longitud de la historia más larga en Γ^{ex}; se dice, entonces que $\ell\left(\Gamma^{ex}\right)$ es la LONGITUD de Γ^{ex}.

LEMA 2. Propiedad de una desviación: Sea $\Gamma^{ex} = \left\langle N,\ H,\ P,\ \left(\succsim_i\right)\right\rangle$ un juego en forma extensiva de horizonte finito y con información perfecta. La combinación de estrategias s^* es un ENPS de Γ^{ex} sólo si para todo $i \in N$ y para todo $h \in H$, para la cual $P(h) = i$ se tiene que

$$O_h\left(s_{-i}^*\Big|_h, s_i^*\Big|_h \right) \succsim_i O_h\left(s_{-i}^*\Big|_h, s_i \right)$$

para cualquier estrategia s_i del jugador i en el subjuego $\Gamma^{ex}(h)$ que difiere de $s_i^*\Big|_h$ solo de la acción señalada después de la historia inicial de $\Gamma^{ex}(h)$.

En la demostración de este lema la primera implicación se obtiene directamente de la definición de ENPS, en tanto que la implicación de regreso supone inicialmente que s^* no es ENPS y que el jugador *i* obtiene un mayor beneficio al desviarse en el subjuego $\Gamma(h')$. Así, existe un vector de estrategias s_i del jugador *i* que le brinda un mayor beneficio dentro de $\Gamma(h')$, tal que $s_i(h) \neq \left(s_i^*\Big|_{h'} \right)(h)$ para un número de historias no más largas que la longitud de $\Gamma(h')$. Ahora, de todas las desviaciones convenientes del jugador *i* en $\Gamma(h')$ se elige a la estrategia s_i tal que el número de historias h sea el mínimo, con $s_i(h) \neq \left(s_i^*\Big|_{h'} \right)(h)$. Se define h^* como la historia de mayor longitud de $\Gamma(h')$, para la cual se cumple que $s_i(h) \neq \left(s_i^*\big|_{h'} \right)(h)$. Entonces, la historia inicial de $\Gamma(h^*)$ es la única historia en $\Gamma(h^*)$ a partir de la cual la acción inducida por s_i difiere de la inducida por $s_i^*\big|_{h'}$. Además, se puede notar que $s_i^*\big|_{h^*}$ es una desviación conveniente en $\Gamma(h^*)$, pues de lo contrario habría una desviación conveniente en $\Gamma(h')$ que diferiría de $s_i^*\big|_{h'}$ después de algunas historias de lo que ocurre con s_i. Así, $s_i\big|_{h^*}$ es una desviación conveniente en $\Gamma(h^*)$ que difiere de $s_i^*\big|_{h^*}$ solo en la acción que es inducida después de la historia inicial de $\Gamma(h^*)$.

El Lema 2 indica que un ENPS provee una estrategia que es preferible al resto, para cualquier jugador, siempre que tenga el turno, y para cualquier historia. También el regreso es válido, es decir, la estrategia preferible a las demás, para un jugador que tenga el turno, para cualquier historia, conformará una combinación de estrategias que sea un ENPS. Esta modelación del equilibrio permite utilizar el método de *Backward Induction* que es utilizado en la demostración de la Proposición 3. Esta proposición indica que para todo juego finito en forma extensiva con información perfecta existe un ENPS. Este resultado es conocido como el Teorema de Kuhn.

PROPOSICIÓN 2: Todo juego finito en forma extensiva con información perfecta tiene un ENPS.

La demostración se hace de manera constructiva recreando el método de inducción hacia atrás (*Backward Induction*), además de utilizar el resultado del Lema 2. Se define una función *R* que asocia a toda historia $h \in H$ una historia terminal, la cual se muestra como un ENPS derivado del subjuego $\Gamma(h)$. Si $\ell(\Gamma(h)) = 0$, es decir que *h* sea una historia terminal, entonces $R(h) = h$. En caso contrario se busca la historia h^* tal que $\ell(\Gamma(h^*)) = k+1$, para alguna $k \geq 0$ y $P(h^*) = i$. Dado el conjunto de acciones disponibles de *i* en h^*, $A(h^*)$, se define $s_i(h^*)$ como el operador que maximiza las preferencias de *i*, en $R(h^*, a)$, sobre sus acciones disponibles $a \in A(h^*)$, y se define $R(h^*) = R(h^*, s_i(h^*))$. Esto define un vector de estrategias *s* en Γ, y por el Lema 2, este vector es un ENPS de Γ.

El resultado anterior es importante debido a que especifica las condiciones bajo las cuales existe un ENPS. Estas condiciones son consideradas en los supuestos de la Proposición 3, con el fin de garantizar la existencia del equilibrio para la elaboración de la demostración.

Como ya se había comentado, la Proposición 3 formaliza la hipótesis de que el jugador que tiene el primer turno recibe un pago mayor con una combinación de estrategias de ENPS que con una que sea un equilibrio basado en amenaza no creíble. Ésta hipótesis está restringida a juegos de longitud 2. La demostración recurre a una construcción de estrategias que conformen un ENPS, a partir de un equilibrio que no es perfecto en subjuegos.

PROPOSICIÓN 3: Sea $\Gamma^{ex} = \langle N,\ H,\ P,\ (\succsim_i) \rangle$ un juego finito en forma extensiva con información perfecta. Supóngase que $\ell(\Gamma^{ex}) = 2$ y que $P(\phi) = 1$. Sea $s^A \in \times_{i \in N} S_i$ equilibrio de Nash, supóngase que s^A no es ENPS para Γ^{ex}. Entonces, existe $s^P \in \times_{i \in N} S_i$ ENPS de Γ^{ex} tal que

$$O(s^P) \succsim_1 O(s^A)$$

Dem. Sea Γ^{ex} un juego finito en forma extensiva con información perfecta. Sea $s^A \in \times_{i \in N} S_i$ equilibrio de Nash. Supóngase que $\ell(\Gamma^{ex}) = 2$ y que $P(\phi) = 1$. Supóngase además que s^A no es ENPS para Γ^{ex}.

Como $s^A \in \times_{i \in N} S_i$ es equilibrio de Nash de Γ^{ex}, entonces es equilibrio para el juego en forma estratégica asociado a Γ^{ex}, el cual, de acuerdo con la Definición 6, de define a partir de los elementos de Γ^{ex}, y que es $\Gamma = \langle N,\ (S_i),\ (\succsim_i) \rangle$. Entonces, para cada $i \in N$.

$$O(s_i^A, s_{-i}^A) \succsim_i O(s_i, s_{-i}^A) \text{ para toda } s_i \in S_i$$

Si s^A no es ENPS, entonces existe $h \in H \setminus Z$ tal que $s^A\big|_h$ no es equilibrio de Nash para $\Gamma^{ex}(h)$.

Dado que $\ell(\Gamma^{ex}) = 2$ y $P(\phi) = 1$, se tiene que, $\forall h \in H - \{\phi\},\ P(h) \neq 1$. Es decir, J1 sólo tiene su turno al inicio del juego y no vuelve a jugar más. De lo anterior se deduce que $S_1 = A_1(\phi) \subset H$. Entonces, o $s_1 \in H \setminus Z$, o bien $s_1 \in Z$. Implica también que

$(H \setminus Z) - \{\phi\} \subset S_1$, lo que equivale a decir que toda historia no terminal, excepto ϕ, es un elemento del conjunto de estrategias de J1.

Considere $h \in S_1$, Dado que $\ell\left(\Gamma^{ex}\right) = 2$, entonces $\ell\left(\Gamma^{ex}(h)\right) \leq 1$ y $P(h) = j$ con $j \in N - \{1\}$. Como Γ^{ex} un juego finito y con información perfecta entonces, para todo $h \in S_1$, $\Gamma^{ex}(h)$ es también finito y con información perfecta, y, por Proposición 2, existe $\left.s_{-1}^{*}\right|_{h} \in \left.\bigtimes_{j \in N} S_j\right|_{h}$ equilibrio de Nash para $\Gamma^{ex}(h)$. Cabe hacer notar que la notación de la estrategia incluye el subíndice "–1" con lo que se quiere resaltar que esta es una combinación de estrategias de todos los jugadores excepto de J1. Ahora, si $h \in S_1$ es tal que $\left.s_{-1}^{A}\right|_{h}$ no es equilibrio de Nash para $\Gamma^{ex}(h)$, y dado que existe $\left.s_{-1}^{*}\right|_{h}$, entonces, para cualquier historia $h \in S_1$ se puede construir una combinación de estrategias que considere la estrategia de equilibrio únicamente. Es importante hacer notar que, dado $h \in S_1$ $P(h) = j$ implica que $j \in N - \{1\}$. Por lo que la estrategia que se construirá a continuación es para todo jugador, excepto J1, en el juego.

Sea $\left.s_{-1}^{P}\right|_{h}$ una combinación de estrategias, con $h \in S_1$, definida por:

$$\left.s_{-1}^{P}\right|_{h} = \begin{cases} \left.s_{-1}^{A}\right|_{h}, & \textit{si h es tal que } s^{A} \textit{ es equilibrio de Nash en } \Gamma^{ex}(h) \\ \left.s_{-1}^{*}\right|_{h}, & \textit{si h es tal que } s^{A} \textit{ NO es equilibrio de Nash en } \Gamma^{ex}(h) \end{cases}$$

Entonces, $s_{-1}^{P}\big|_{h}$ es un equilibrio de Nash de $\Gamma^{ex}(h)$, para todo $h \in S_1$. En particular, para todo $h \in (H \setminus Z) - \{\phi\}$, y, por definición, lo es también para el juego en forma estratégica $\Gamma(h)$ asociado a $\Gamma^{ex}(h)$. Como $\ell(\Gamma^{ex}(h)) \leq 1$, entonces $s_{-1}^{P}\big|_{h}$ es ENPS de $\Gamma^{ex}(h)$, debido a que en rigor ya no hay subjuegos después de *h*.

Considere ahora la historia inicial $hi = \phi$, dada $s_{-1}^{P}\big|_{h}$ combinación de estrategias de todos los jugadores excepto 1, y dado que $P(\phi) = 1$, puede ocurrir que la combinación $\left(s_1^A,\ s_{-1}^{P}\big|_{h}\right)$ ya no sea un equilibrio de Nash para J1; es decir, el posible cambio de estrategias de $s_{-1}^{A}\big|_{h}$ a $s_{-1}^{P}\big|_{h}$ pueden generar cambios en la decisión de J1. Así, si la combinación $\left(s_1^A,\ s_{-1}^{P}\big|_{h}\right)$ no es un equlibrio de Nash para J1. Por Proposición 2, existe $s_1^* \in S_1$ equilibrio de Nash para $\Gamma^{ex}(\phi)$, tal que

$$O\left(s_1^*,\ s^{P}\big|_{h}\right) \succsim_1 O\left(s_1^A,\ s^{P}\big|_{h}\right)$$

Sea s_1^P una combinación de estrategias en la historia inicial $hi = \phi$, definida por:

$$s_1^P = \begin{cases} s_1^A, & si\left(s_1^A, s_{-1}^{P}\big|_{h}\right) es\ equilibrio\ de\ Nash\ para\ J1 \\ s_1^*, & si\left(s_1^A, s_{-1}^{P}\big|_{h}\right) NO\ es\ equilibrio\ de\ Nash\ para\ J1 \end{cases}$$

Así, en la historia inicial $hi = \phi$

$$O\left(s_1^P, s_{-1}^{P}\big|_{h}\right) \succsim_1 O\left(s_1, s_{-1}^{P}\big|_{h}\right) \text{ para toda } s_1 \in S_1$$

Entonces s_1^P es la estrategia de equilibro de Nash de J1 para el juego en forma estratégica asociado a $\Gamma^{ex}(\phi)$, $\Gamma(\phi)$. Así, $s^P = \left(s_1^P, s_{-1}^P \Big|_h \right)$, es equilibrio de Nash para Γ^{ex} para $hi = \phi$ y para todo $h \in (H \setminus Z) - \{\phi\}$, i. e. s^P es equilibrio de Nash de Γ^{ex} para todo $h \in H \setminus Z$, de lo cual implica que s^P es ENPS. Dado que s^P es ENPS, entonces es equilibrio en el juego en forma estratégica, $\Gamma = \langle N,\ (S_i),\ (\succsim_i) \rangle$, asociado a Γ^{ex}, entonces, para cada $i \in N$ se tiene que:

$$O(s^P) \succsim_i O(s) \text{ para toda } s \in \bigtimes_{i \in N} S_i$$

En particular, si $i = 1$ y $s = s^A$

$$O(s^P) \succsim_1 O(s^A)$$

QED

Con esto se demuestra como cierta la hipótesis de este documento; más adelante, en el Apéndice, se verán tres ejemplos más que la refuerzan. Se retomará el Ejemplo 1 *Juego de la Cadena de tiendas* (*Chain-Store Game*) en el que se verifica el resultado. También en último ejemplo, que es el juego clásico de la repartición de 1 dólar, se verificará de la misma manera como válido.

En general, la aplicación de este resultado es válida para cualquier juego en dos etapas, y el jugador que tiene el primer turno le bastará con elegir su estrategia de equilibrio y esperar que su o sus contrincantes hagan lo mismo. Si no es el caso, de cualquier manera el primer jugador obtendrá al menos un pago igual al producido por la combinación de estrategias en la que alguno del resto de los jugadores le amenace de manera no creíble. Y puede ocurrir que este pago sea mayor, no sólo igual.

En una situación en la que haya una confrontación de dos decisores, donde estrictamente elija uno primero y el otro después, y dado que hay información perfecta, el jugador que elije primero tiene la ventaja de obtener al final un pago que le reditúe más simplemente por el hecho de elegir su estrategia de equilibrio. En tanto que a su contrincante sólo le queda amenazar, con lo que él obtendría un pago menor, que si elige de igual manera su estrategia de equilibrio, pero que a final de cuentas de daría un pago igual o mayor al primer jugador.

V. CONCLUSIONES

Aunque la hipótesis inicial se redujo a juegos finitos con información perfecta de no más de dos etapas; cabe señalar que el resultado de la Proposición 3 no restringe la cantidad de jugadores. Si hay más de 2 jugadores, cada jugador sería un contrincante del primero, dependiendo de la estrategia que éste decida. De cualquier forma, se puede pensar en la aplicación del resultado de este documento a juegos con dos jugadores, la forma más básica de un juego en forma extensiva es la que se desarrolla en dos etapas y en el que intervienen dos jugadores. Este tipo de juegos modelan situaciones de la interacción de decisiones de dos jugadores donde necesariamente uno de ellos decide primero. Dada la simplicidad de este esquema, existe una gran cantidad de situaciones que se ajustan a esta forma de juegos y, por tanto, es posible aplicar el resultado a todas estas situaciones. Se han visto a manera de ejemplos el juego de *la Cadena de tiendas* (*Chain-Store Game*) y los modelos de Stackelberg y Cournot; y en general, basta con considerar una situación de conflicto entre dos jugadores donde uno de ellos tiene la oportunidad de elegir primero su acción.

En general, el jugador que decide primero tiene incentivos a elegir su estrategia de equilibrio, asumiendo que su contrincante también jugará con estrategias de equilibrio, las cuales pueden estar o no basadas en amenazas ficticias. El primer jugador sabe que su contrincante no tiene incentivos para llevar a cabo sus amenazas, en tanto que si tiene incentivos a jugar estrategias que optimicen su pago en cualquier subjuego, es decir, a jugar con estrategias de subjuego perfecto. Si es el caso, el primer jugador recibiría un pago mayor o igual que el que reciba en cualquier equilibrio que esté basado en amenazas no creíbles. Lo anterior describe una ventaja que tiene el jugador que *«tira»* primero en una competencia desarrollada en dos etapas, en tanto que el jugador contrincante solo ve reducida la posibilidad de hacer ganar menos al primer jugador llevando a cabo una amenaza, en una estrategia de equilibrio, la cual en realidad no se realizará debido a que solo es parte de un plan contingente.

Por otro lado, como se pudo ver en el Ejemplo 4, se muestra que no es posible generalizar este resultado a un juego cuya extensión sea mayor a dos etapas. En este caso, el primer jugador no necesariamente obtiene una ganancia mayor en un ENPS que en un equilibrio basado en amenaza no creíble, esto se debe principalmente que su estrategia se ve condicionada a las estrategias de otros dos jugadores antes de llegar al resultado final. Con el fin de obtener una mejor ganancia en equilibrio, la estrategia de un jugador sólo tiene influencia directa sobre la del que juega inmediatamente después, y no sobre las estrategias de los subsecuentes jugadores.

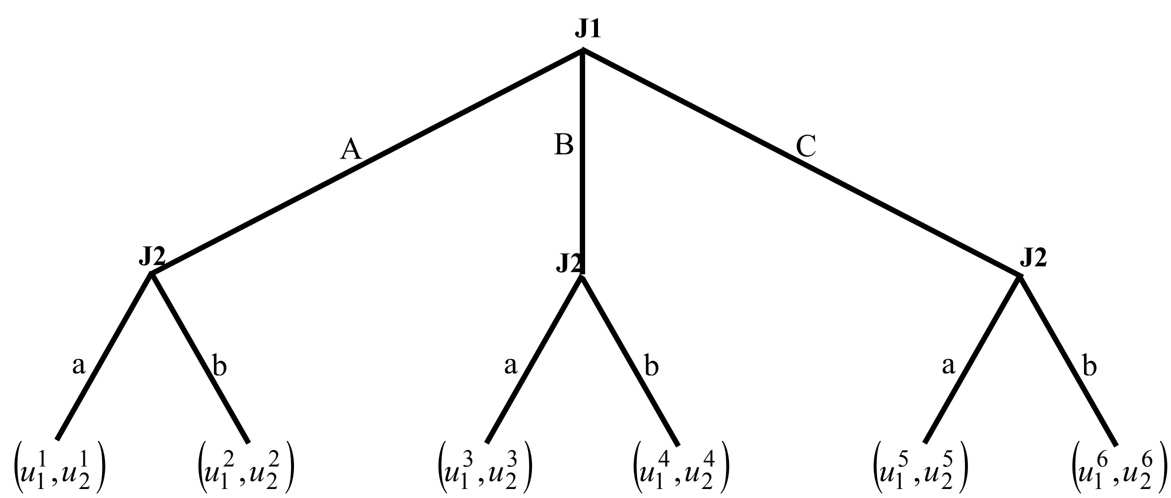
Aún con lo anterior, un juego de dos etapas puede ser visto como parte de un juego de mayor extensión. En un juego finito, con información perfecta, cuya longitud sea mayor a 2, el resultado de la Proposición 3 es aplicable a los subjuegos de longitud 2, cuya historia esté necesariamente inducida por una estrategia de equilibrio. Así, el penúltimo jugador que *«tira»* tiene la ventaja sobre el último, pero solo considerando los pagos de éstos dos jugadores, no es aplicable considerando los pagos ni las acciones del resto. Lo anterior puede verificarse con el juego presentado en el ejemplo 4, basta con considerar el subjuego donde inicia J2 y tomar en cuenta solo los pagos de J2 y J3. Esta última afirmación puede proponerse de manera generalizada como un resultado derivado de la Proposición 3, y de la misma forma se puede llevar a cabo su demostración.

APÉNDICE

EJEMPLO 5: JUEGO CON 2 JUGADORES EN EL QUE HAY 3 ACCIONES PARA J1 Y 2 PARA J2

Este es un juego similar al del Ejemplo 2, participan también dos jugadores, pero en este caso el primero tiene tres acciones disponibles *A*, *B* o *C*, en tanto que las acciones disponibles de J2, quien elige sólo después de J1, son *a* y *b*. Al igual que el Ejemplo 2, los pagos para cada jugador están representados de manera general, con el fin de establecer y deducir las condiciones de existencia de los equilibrios de Nash, tanto el que no es ENPS como el que sí lo es, de manera respectiva. La Figura 9 muestra la forma extensiva de este juego, del cual se deducen el conjunto de jugadores, los conjuntos de historias, las funciones jugador y de pagos, además de construir la forma estratégica asociada.

Figura 9. Segundo e*jemplo de juego en forma extensiva con equilibrio de Nash basado en amenaza no creíble.*



Así, de acuerdo con la Definición 4, los elementos de este juego son los siguientes:

i) $N = \{1,2\}$

ii) $H = \{\phi, A, B, C, Aa, Ab, Ba, Bb, Ca, Cb\}$, $Z = \{Aa, Ab, Ba, Bb, Ca, Cb\}$. Entonces $H \setminus Z = \{\phi, A, B, C\}$

iii) Función jugador

$P: H \setminus Z \to N$
$\phi \mapsto 1$
$A \mapsto 2$
$B \mapsto 2$
$C \mapsto 2$

iv) Funciones de pagos

$u_1 : Z \to \mathbf{R}$
$Aa \mapsto u_1^1$
$Ab \mapsto u_1^2$
$Ba \mapsto u_1^3$
$Bb \mapsto u_1^4$
$Ca \mapsto u_1^5$
$Cb \mapsto u_1^6$

$u_2 : Z \to \mathbf{R}$
$Aa \mapsto u_2^1$
$Ab \mapsto u_2^2$
$Ba \mapsto u_2^3$
$Bb \mapsto u_2^4$
$Ca \mapsto u_2^5$
$Cb \mapsto u_2^6$

A partir de la Definición 6, se determina el juego en forma estratégica asociado. Así, el conjunto de jugadores es, $N = \{1,2\}$. Las estrategias para cada jugador son $S_1 = \{A, B, C\}$ y $S_2 = \{aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb\}$. La matriz de pagos de este juego se muestra en la Tabla 6.

Tabla 6. *Matriz de pagos para el juego en forma extensiva de la Figura 9*

		J2							
		aaa	*aab*	*aba*	*abb*	*baa*	*bab*	*bba*	*bbb*
J1	*A*	u_1^1, u_2^1	u_1^1, u_2^1	u_1^1, u_2^1	u_1^1, u_2^1	u_1^2, u_2^2	u_1^2, u_2^2	u_1^2, u_2^2	u_1^2, u_2^2
	B	u_1^3, u_2^3	u_1^3, u_2^3	u_1^4, u_2^4	u_1^4, u_2^4	u_1^3, u_2^3	u_1^3, u_2^3	u_1^4, u_2^4	u_1^4, u_2^4
	C	u_1^5, u_2^5	u_1^6, u_2^6	u_1^5, u_2^5	u_1^6, u_2^6	u_1^5, u_2^5	u_1^6, u_2^6	u_1^5, u_2^5	u_1^6, u_2^6

Sean $s^m \in S_1 \times S_2, \quad m = 1, 2, ..., 24$, tales que

$$
\begin{array}{lll}
s^1 = (A, aaa) & s^9 = (B, aaa) & s^{17} = (C, aaa) \\
s^2 = (A, aab) & s^{10} = (B, aab) & s^{18} = (C, aab) \\
s^3 = (A, aba) & s^{11} = (B, aba) & s^{19} = (C, aba) \\
s^4 = (A, abb) & s^{12} = (B, abb) & s^{20} = (C, abb) \\
s^5 = (A, baa) & s^{13} = (B, baa) & s^{21} = (C, baa) \\
s^6 = (A, bab) & s^{14} = (B, bab) & s^{22} = (C, bab) \\
s^7 = (A, bba) & s^{15} = (B, bba) & s^{23} = (C, bba) \\
s^8 = (A, bbb) & s^{16} = (B, bbb) & s^{24} = (C, bbb)
\end{array}
$$

Sin pérdida de generalidad, suponga que $s^1 = (A, aaa)$ es equilibrio de Nash sin ser ENPS, basado en amenaza no creíble. Entonces $u_1^1 \geq u_1^3$, $u_1^1 \geq u_1^5$ y $u_2^1 \geq u_2^2$. Además, como s^1 está basado en amenaza no creíble debe cumplirse al menos una de las siguientes condiciones $u_2^4 > u_2^3$, $u_2^6 > u_2^5$.

CASO A: Se asume que $u_2^4 > u_2^3$ pero sin que ocurra que $u_2^6 > u_2^5$, es decir, $u_2^5 \geq u_2^6$.

Así, las condiciones α son las siguientes

$$\left.\begin{array}{ll} u_1^1 \geq u_1^3 & \\ u_1^1 \geq u_1^5 & u_2^4 > u_2^3 \\ u_2^1 \geq u_2^2 & u_2^5 \geq u_2^6 \end{array}\right\} \qquad \ldots(\alpha)$$

Dada la historia $h = A$, y por las condiciones α, a J2 le conviene elegir a. En tanto que si $h = B$, a J2 le conviene elegir b. Y si $h = C$, a J2 le conviene elegir a. Así, la estrategia de J2 es *aba*. De igual manera que en el primer juego cabe preguntarse ¿cuál debe ser la estrategia de J1, dadas las condiciones α y la estrategia de J2? Esto depende de la relación que guarden entre sí las cantidades u_1^1, u_1^4 y u_1^5. Por las condiciones α se sabe que $u_1^1 \geq u_1^5$, dicho de otra manera, no debe ocurrir que $u_1^1 < u_1^5$. A partir de lo anterior se desprenden ocho subcasos para analizar:

(A.1) $u_1^1 = u_1^4 = u_1^5$

(A.2) $u_1^1 = u_1^4 > u_1^5$

(A.3) $u_1^1 > u_1^4 = u_1^5$

(A.4) $u_1^1 > u_1^4 > u_1^5$

(A.5) $u_1^1 = u_1^5 > u_1^4$

(A.6) $u_1^1 > u_1^5 > u_1^4$

(A.7) $u_1^4 > u_1^1 = u_1^5$

(A.8) $u_1^4 > u_1^1 > u_1^5$

CASO A.1: $u_1^1 = u_1^4 = u_1^5$. Combinando con condiciones α se tiene que:

$$\left.\begin{array}{lll} u_1^1 \geq u_1^3 & & \\ u_1^1 = u_1^5 & u_2^4 > u_2^3 & \\ u_2^1 \geq u_2^2 & u_2^5 \geq u_2^6 & u_1^1 = u_1^4 \end{array}\right\}$$

En este caso, para J1 le es indistinto elegir *A*, *B* o *C*, las tres son igual de atractivas para él.

Con lo anterior se obtienen tres ENPS: $s^3 = (A, aba)$, $s^{11} = (B, aba)$ y $s^{19} = (C, aba)$, con

$$u_1\left(s^3\right) = u_1^1$$

$$u_1\left(s^{11}\right) = u_1^4$$

$$u_1\left(s^{19}\right) = u_1^5$$

Por condiciones del caso que se analiza se tiene que

$$u_1\left(s^3\right) = u_1\left(s^{11}\right) = u_1\left(s^{19}\right)$$

Y dado que $u_1\left(s^1\right) = u_1^1$, se obtiene que J1 no recibe, en los tres ENPS, un pago menor que el equilibrio que no es perfecto en subjuegos.

CASO A.2: $u_1^1 = u_1^4 > u_1^5$. Combinando con condiciones α se tiene que:

$$\left.\begin{array}{lll} u_1^1 \geq u_1^3 & & \\ u_1^1 > u_1^5 & u_2^4 > u_2^3 & \\ u_2^1 \geq u_2^2 & u_2^5 \geq u_2^6 & u_1^1 = u_1^4 \end{array}\right\}$$

A J1 le es indistinto elegir entre *A* y *B*, pero no *C*, le conviene elegir cualquiera de las dos primeras. Así, se obtienen dos ENPS: $s^3 = (A, aba)$ y $s^{11} = (B, aba)$, con

$$u_1\left(s^3\right) = u_1^1$$

$$u_1\left(s^{11}\right) = u_1^4$$

Por condiciones del caso que se analiza, se tiene que

$$u_1\left(s^3\right) = u_1\left(s^{11}\right)$$

Y dado que $u_1\left(s^1\right) = u_1^1$, se obtiene que J1 no recibe, en los dos ENPS, un pago menor que el equilibrio que no es perfecto en subjuegos.

CASO A.3: $u_1^1 > u_1^4 = u_1^5$. Combinando con condiciones α se tiene que:

$$\left.\begin{array}{lll} u_1^1 \geq u_1^3 & & \\ u_1^1 > u_1^5 & u_2^4 > u_2^3 & \\ u_2^1 \geq u_2^2 & u_2^5 \geq u_2^6 & u_1^4 = u_1^5 \end{array}\right\}$$

A J1 le es indistinto elegir entra *B* y *C*, pero no *A*, en este caso, de acuerdo con las condiciones, le conviene elegir *A*. Así, se obtiene un ENPS: $s^3 = (A, aba)$, con

$$u_1\left(s^3\right) = u_1^1$$

Y dado que $u_1\left(s^1\right) = u_1^1$, se obtiene que J1 no recibe en el ENPS un pago menor que el equilibrio que no es perfecto en subjuegos.

CASO A.4: $u_1^1 > u_1^4 > u_1^5$. Combinando con condiciones α se tiene que:

$$\left.\begin{array}{lll} u_1^1 \geq u_1^3 & & \\ u_1^1 > u_1^5 & u_2^4 > u_2^3 & \\ u_2^1 \geq u_2^2 & u_2^5 \geq u_2^6 & u_1^4 > u_1^5 \end{array}\right\}$$

Bajo estas condiciones, a J1 le conviene elegir *A*. El ENPS que se obtiene es: $s^3 = (A, aba)$, con

$$u_1\left(s^3\right) = u_1^1$$

Y dado que $u_1(s^1) = u_1^1$, se obtiene que J1 no recibe en el ENPS un pago menor que el equilibrio que no es perfecto en subjuegos.

Ahora, el CASO A.5: $u_1^1 = u_1^5 > u_1^4$ es análogo y se obtiene el mismo resultado que el CASO A.2, y lo mismo ocurre para el CASO A.6: $u_1^1 > u_1^5 > u_1^4$ con el CASO A.4.

CASO A.7: $u_1^4 > u_1^1 = u_1^5$. Combinando con condiciones α se tiene que:

$$\left.\begin{array}{lll} u_1^1 \geq u_1^3 & & \\ u_1^1 = u_1^5 & u_2^4 > u_2^3 & \\ u_2^1 \geq u_2^2 & u_2^5 \geq u_2^6 & u_1^4 > u_1^1 \end{array}\right\}$$

A J1 le es indistinto elegir entra A y C, pero no B, en este caso, de acuerdo con las condiciones, le conviene elegir B. Así, se obtiene un ENPS: $s^{11} = (B, aba)$, con

$$u_1(s^{11}) = u_1^4$$

Y dado que $u_1(s^1) = u_1^1$, se obtiene que J1 recibe en el ENPS un pago mayor que el equilibrio que no es perfecto en subjuegos.

CASO A.8: $u_1^4 > u_1^1 > u_1^5$. Combinando con condiciones α se tiene que:

$$\left.\begin{array}{lll} u_1^1 \geq u_1^3 & & \\ u_1^1 > u_1^5 & u_2^4 > u_2^3 & \\ u_2^1 \geq u_2^2 & u_2^5 \geq u_2^6 & u_1^4 > u_1^1 \end{array}\right\}$$

Bajo estas condiciones, a J1 le conviene elegir *B*. El ENPS que se obtiene es: $s^{11} = (B, aba)$, con

$$u_1(s^{11}) = u_1^4$$

Y dado que $u_1(s^1) = u_1^1$, se obtiene que J1 recibe en el ENPS un pago mayor que el equilibrio que no es perfecto en subjuegos.

CASO B: Se asume que $u_2^4 > u_2^3$ y simultáneamente $u_2^6 > u_2^5$.

Así, las condiciones α son las siguientes

$$\left.\begin{array}{ll} u_1^1 \geq u_1^3 & \\ u_1^1 \geq u_1^5 & u_2^4 > u_2^3 \\ u_2^1 \geq u_2^2 & u_2^6 > u_2^5 \end{array}\right\} \qquad (\alpha)$$

Repitiendo el análisis hecho en el caso A, se tiene que dada la historia $h = A$, y por las condiciones α, a J2 le conviene elegir a. En tanto que si $h = B$, a J2 le conviene elegir b. Y si $h = C$, a J2 le conviene elegir b. Así, la estrategia de J2 es *abb*. ¿Cuál debe ser la estrategia de J1, dadas las condiciones α y la estrategia de J2? Esto depende de la relación que guarden entre sí las cantidades u_1^1, u_1^4 y u_1^6. Así, se deben analizar los siguientes 13 subcasos:

(B.1) $\quad u_1^1 = u_1^4 = u_1^6$

(B.2) $\quad u_1^1 = u_1^4 > u_1^6$

(B.3) $\quad u_1^1 > u_1^4 = u_1^6$

(B.4) $\quad u_1^1 > u_1^4 > u_1^6$

(B.5) $u_1^1 = u_1^6 > u_1^4$

(B.6) $u_1^1 > u_1^6 > u_1^4$

(B.7) $u_1^4 > u_1^1 = u_1^6$

(B.8) $u_1^4 > u_1^1 > u_1^6$

(B.9) $u_1^4 = u_1^6 > u_1^1$

(B.10) $u_1^4 > u_1^6 > u_1^1$

(B.11) $u_1^6 > u_1^1 = u_1^4$

(B.12) $u_1^6 > u_1^1 > u_1^4$

(B.13) $u_1^6 > u_1^4 > u_1^1$

Como se puede notar cada uno de estos subcasos guardan analogía con los correspondientes del primer caso. Se puede verificar, al analizaros, que ahora los ENPS son $s^4 = (A, abb)$, $s^{12} = (B, abb)$ y $s^{20} = (C, abb)$, y que en ninguno de ellos, dadas las condiciones α, en conjunto con las de cada subcaso, el J1 obtiene un pago menor que en $s^1 = (A, aaa)$ el cual se asume como equilibrio de Nash sin ser ENPS.

<u>EJEMPLO 6: JUEGO DE LA *CADENA DE TIENDAS* (*CHAIN-STORE GAME*)</u>

Considere el mismo juego del Ejemplo 1, la intención ahora es probar la hipótesis. La descripción es la misma, y a partir de la Figura 1 se deducen de los elementos del juego y los del juego en forma estratégica asociado.

Los elementos del juego en forma extensiva son:

i) $N = \{PC, M\}$

ii) $H = \{\phi, Entra, No\ entra, Entra - Reprime, Entra - Cede\}$

$Z = \{No\ entra, Entra - Reprime, Entra - Cede\}$

Entonces $H \setminus Z = \{\phi, Entra\}$

iii) Función jugador

$P : H \setminus Z \to N$
$\phi \mapsto PC$
$Entra \mapsto 2$

iv) Funciones de pagos

$u_1 : Z \to \mathbf{R}$
$No\ entra \mapsto 0$
$Entra–Reprime \mapsto -1$
$Entra - Cede \mapsto 1$

$u_2 : Z \to \mathbf{R}$
$No\ entra \mapsto 2$
$Entra–Reprime \mapsto -1$
$Entra - Cede \mapsto 1$

Las estrategias para cada jugador son las siguientes: $S_1 = \{Entra, No\ entra\}$ y $S_2 = \{\ Reprime, Cede\}$. La matriz de pagos de este juego se muestra en la Tabla 7.

Tabla 7. *Matriz de pagos para el juego en forma extensiva de la Figura 1*

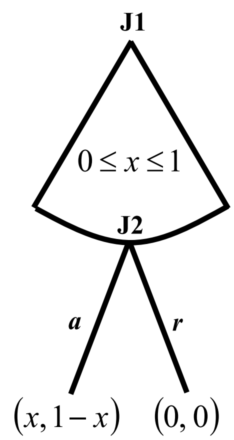
		M	
		Reprime	*Cede*
PC	*Entra*	(–1, –1)	(1, 1)
	No entra	(0,2)	(0,2)

A partir de la Tabla 7 se obtienen dos equilibrios de Nash. $s^1 = (Entra, Cede)$ y $s^2 = (No\ entra,\ \ Reprime)$, pero resolviendo por el método de *Backward Induction*, se deduce que s^1 es ENPS, en tanto que s^2 es un equilibrio basado en amenaza no creíble que emite *M* cuando elige la acción *Reprime*. Los pagos para *PC*, el jugador que tiene el primer turno, en estos dos equilibrios son $u_1(s^1) = 1$ y $u_1(s^2) = 0$, con lo que se verifica como cierta la hipótesis para el *Juego de la Cadena de Tiendas*.

EJEMPLO 7: REPARTICIÓN DE 1 DÓLAR ENTRE DOS JUGADORES

El ejemplo que a continuación se analizará es un juego de negociación. Dos jugadores, J1 y J2, negocian la repartición de 1 dólar. En la primera etapa, J1 ofrece una cantidad x, $0 \leq x \leq 1$, el cual representa el valor de la proporción con que él planea quedarse. En la segunda etapa, J2 elige entre Aceptar (a) o Rechazar (r) la oferta; si acepta, el pago para cada uno será la distribución derivada del valor de x, $(x, 1-x)$, y si rechaza los pagos son cero para cada uno.

Figura 10. *Juego de Negociación, repartición de 1 dólar*



Como se puede observar en la Figura 10, las estrategias de J1 están formadas por intervalo continuo, por lo que hay una cantidad infinita de historias en el juego. Con el fin de ejemplificar, se tomarán valores discretos de este intervalo, haciendo particiones regulares de este. Las particiones permitirán elaborar el juego en forma estratégica asociado, dependiendo del número de estrategias de cada jugador. La Figura 11 muestra los juegos en forma extensiva para las dos primeras particiones del intervalo.

Sea $n = 1, 2, 3, \ldots$ el número de subintervalos en el que se divide al intervalo (0, 1), de tal manera que las estrategias de J1 están dadas por la expresión $1 - \frac{i}{n}$, con $i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$. Esto implica que el número de estrategias de J1 es $n+1$. Las estrategias de J2 dependen también de éste número, por principio de cuentas la longitud de las estrategias, visto como un plan contingente, es también $n+1$, pues es el número de distintas acciones que J1 puede tomar al inicio del juego. Como J2 tiene para elegir entre "*a*" o "*r*", después del ofrecimiento de J1, entonces la cantidad de estrategias que tiene J2 se calcula por medio del número de permutaciones con repetición de 2 en $n+1$, que es 2^{n+1}. Así, por ejemplo, si $n = 1$, J1 tiene dos estrategias, $1 - \frac{i}{n}$, con $i = 0, 1$, y que son 1 y 0. Ahora, J2 tiene $2^{1+1} = 4$ estrategias, de longitud 2, las cuales son: *aa*, *ar*, *ra* y *rr*. Si $n = 2$, J1 tiene 3 estrategias, $1 - \frac{i}{n}$, con $i = 0, 1, 2$, que son: 1, 0.5 y 0; en tanto que J2 tiene $2^{2+1} = 8$ estrategias, de longitud 3, las cuales son: *aaa*, *aar*, *ara*, *raa*, *arr*, *rar*, *rra* y *rrr*.

Figura 11. *Juego de Negociación, repartición de 1 dólar. Primeras dos particiones*

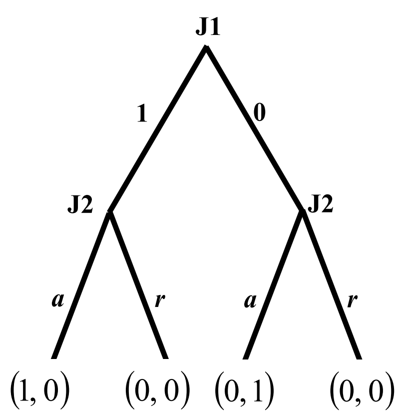


Figura 11.a. *Partición* $n = 1$

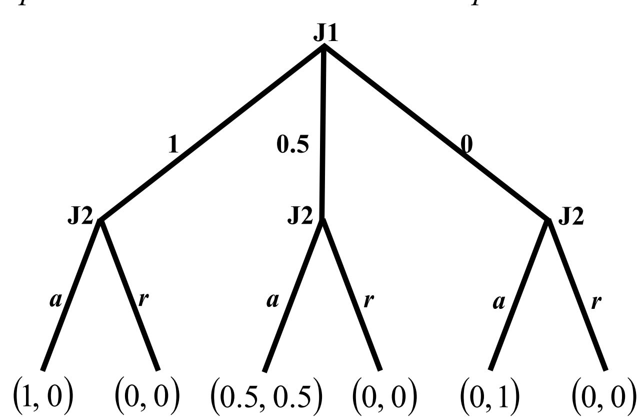


Figura 11.b. *Partición* $n = 2$

Al aplicar el método de *Backward Induction* a los juegos presentados en la Figura 11 se obtienen los ENPS. Como se puede observar, J2 tiene dos estrategias de equilibrio en ambos juegos; en 11.a son *aa* y *ra*, en tanto que en 11.b son *aaa* y *raa*, esto se debe a que cuando J1 elige 1, J2 es indiferente a elegir "*a*" o "*r*". Por lo anterior, las estrategias de equilibrio de J1 son 1, para las estrategias *aa* y *aaa* de J2, y 0 o 0.5, para las estrategias *ra* y *raa* de J2, respectivamente. Por lo que se concluye que ambos juegos tienen al menos dos ENPS. En el caso generalizado, para cualquier valor de *n*, las combinaciones de estrategias $(1, aaaa\ldots a)$ y $\left(1-\frac{1}{n}, raaa\ldots a\right)$ son ENPS, por las mismas razones deducidas a partir del método de *Backward Induction*.

Cabe preguntarse ahora por el total de equilibrios de Nash que tienen estos juegos. En las Tablas 8.a y 8.b se encuentran las matrices de pagos de los juegos en forma estratégica asociados a los juegos de la Figura 11. De la Tabla 8.a se deducen en total 5 equilibrios de Nash, cuyas combinaciones de estrategias son: (1, *aa*), (1, *ar*), (1, *ra*), (1, *rr*) y (0, *ra*). Las primera y última combinaciones, como se había deducido antes, son ENPS. Basta con identificar que el pago en el primer ENPS para J1 es mayor o igual que el correspondiente pago del resto de los equilibrios, donde están los equilibrios basados en amenazas no creíbles, para verificar que la hipótesis es verdadera. Así, para la partición en $n = 1$, el pago para el primer jugador es mayor en un ENPS que el correspondiente en un equilibrio basado en amenaza no creíble.

Tabla 8.a. *Matriz de pagos para el juego en forma extensiva de la Figura 11.a*

		J2			
		aa	***ar***	***ra***	***rr***
J1	**1**	(1, 0)	(1, 0)	(0, 0)	(0, 0)
	0	(0, 1)	(0, 0)	(0, 1)	(0, 0)

Ahora, para la Tabla 8.b se deducen en total nueve equilibrios, cuyas combinaciones de estrategias son: (1, *aaa*), (1, *aar*), (1, *ara*), (1, *arr*), (1, *rra*), (1, *rrr*), (0.5, *raa*), (0.5, *rar*) y (0, *rra*). Análogamente, las combinaciones (1, *aaa*) y (0.5, *raa*) son ENPS, y basta con el primero de ellos para saber que J1 siempre recibe un pago mayor en ENPS que en alguno que no lo sea, como es el resto de equilibrios en este caso, lo que hace verdadera la hipótesis.

Tabla 8.b. *Matriz de pagos para el juego en forma extensiva de la Figura 11.b*

		J2							
		aaa	***aar***	***ara***	***raa***	***arr***	***rar***	***rra***	***rrr***
	1	(1, 0)	(1, 0)	(1, 0)	(0, 0)	(1, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)
J1	**0.5**	(0.5, 0.5)	(0.5, 0.5)	(0, 0)	(0.5, 0.5)	(0, 0)	(0.5, 0.5)	(0, 0)	(0, 0)
	0	(0, 1)	(0, 0)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 1)	(0, 0)

Para el caso generalizado, es decir, para cualquier valor de *n*, el total de equilibrios para un juego de partición *n* es $2^{n+1}+1$, en los que ya están incluidos los dos ENPS. Lo importante, para fines de este documento es que el ENPS, correspondiente a la combinación de estrategias de la forma $(1, aaaa\ldots a)$, otorga un pago mayor o igual a J1 que el respectivo pago en el resto de los equilibrios, en los que se encuentran los que están basados en amenazas no creíbles. Por lo que se da como verdadera la hipótesis para el Juego de Negociación en dos etapas, con estrategias discretas, y no continuas, de J1.

BIBLIOGRAFÍA

ARIAS, C. (Enero de 2010). TEDI: *Tema 3. Teoría de Juegos.* Recuperado el 31 de Mayo de 2011, de Tema 3 Teoría de Juegos: **http://www3.unileon.es/personal/wwdeecas/clasesW/tediW/OLD/TEDI_tema3.pdf**

GIBBONS, R. (1992). *Game Theory for Applied Economists.* New Jersey: Princeton University Press.

OSBORNE, M. &. Rubinstein A. (1994). *A Course in Game Theory.* Londres: The MIT Press.

SAMUELSON, L. (1997). *Evolutionary games and equilibrium selection.* Londres: The MIT Press.

VEGA REDONDO, F. (2000). *Economía y Juegos.* Barcelona: Antoni Bosch, Editor.