CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DOCENCIA ECONÓMICAS, A.C.

VALUACIÓN DE DERIVADOS DE TASA DE INTERÉS: EL CASO DE LAS HIPOTECAS EN MÉXICO.

T E S I N A

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

LICENCIADO EN ECONOMÍA

PRESENTA:

MARISOL LIDIA RAMÍREZ LUNA

DIRECTOR DE LA TESINA: MTRO. RAÚL A. FELIZ ORTIZ

MÉXICO, D. F. FEBRERO 2006

A mis padres, a quienes amo,

por ser un apoyo constante en mi vida.

Agradecimientos

A mi familia por su cariño y comprensión;

A Raúl por sus enseñanzas, su paciencia y dedicación a este trabajo;

A todos los profesores del CIDE que contribuyeron a mi formación profesional, en especial a Dieguez..

Introducción …………………………………………………………………………… 5

Capítulo 1. Futuros. …………………………………………………………………... 11

Capítulo 2. Opciones……………………………………………………………………. 18

Capítulo 3. Métodos de Valuación……..……………………………………………... 27

Capítulo 4. Valuación…………………………………………………………….. 36

Capítulo 5. Conclusiones……………………………………………………….….. 44

Anexos ……………………………………………………………………………. 47

Bibliografía ……………………………………………………………………………. 50

INTRODUCCIÓN

Una hipoteca puede definirse como un instrumento legal que otorga bajo ciertas condiciones un préstamo a largo plazo para la compra de un bien raíz, pone la propiedad adquirida por el deudor en garantía, hasta que la deuda se paga. Generalmente son otorgadas por una institución financiera.

En este trabajo, se analiza y describe la estructura financiera detrás de las hipotecas a tasa fija y a tasa variable con límite superior, que se han introducido recientemente en México. Lo anterior se lleva a cabo utilizando diversos enfoques para la valuación de derivados financieros de tasa de interés.

Los derivados financieros son como su nombre lo indica instrumentos cuyo valor se infiere de otra variable llamada subyacente[1]. En las últimas décadas, los derivados han ido ganando importancia en el mundo financiero, ahora se intercambian activamente en diversos mercados especializados, entre los que destacan en los Estados Unidos, el Chicago Mercantil Exchange[2] (CME), el Chicago Board Options Exchange (CBOE), y la Chicago Board of Trade (CBOT). Recientemente, en el caso de México el Mercado Mexicano de Derivados[3] (MexDer); también se intercambian fuera de mercados centralmente organizados (bolsas) por instituciones financieras, manejadoras de fondos y corporaciones, en lo que se conoce como el mercado *over the counter,* donde se hacen operaciones no estandarizadas, hechas a la medida o exóticas; a diferencia de los mercados centralizados que se encuentran estandarizados. Los derivados suelen dividirse en dos grandes grupos, de

[1] Esta puede ser desde el precio de una acción, un índice, entre otros.
[2] Creada formalmente en 1919, únicamente ofrecía futuros de productos agrícolas.
[3] Creado por la Bolsa Mexicana de Valores, inicio sus operaciones en diciembre de 1998.

acuerdo a su patrón de pagos: 1) Contratos con pagos lineales como los futuros (forwards) y swaps; y 2) patrones de pago no lineales como es el caso de las opciones.

En esta tesina, no se aborda en detalle la historia de las hipotecas en México, simplemente se describen las condiciones actuales para la obtención de una hipoteca, para posteriormente aplicar modelos de valuación apropiados para los derivados implícitos en las mismas. Al considerar la hipoteca como una opción de inversión para el Banco, se valúa el derivado financiero correspondiente de acuerdo al tipo de hipoteca, y en base a éste se obtiene el posible rendimiento de ofrecer hipotecas para el banco.

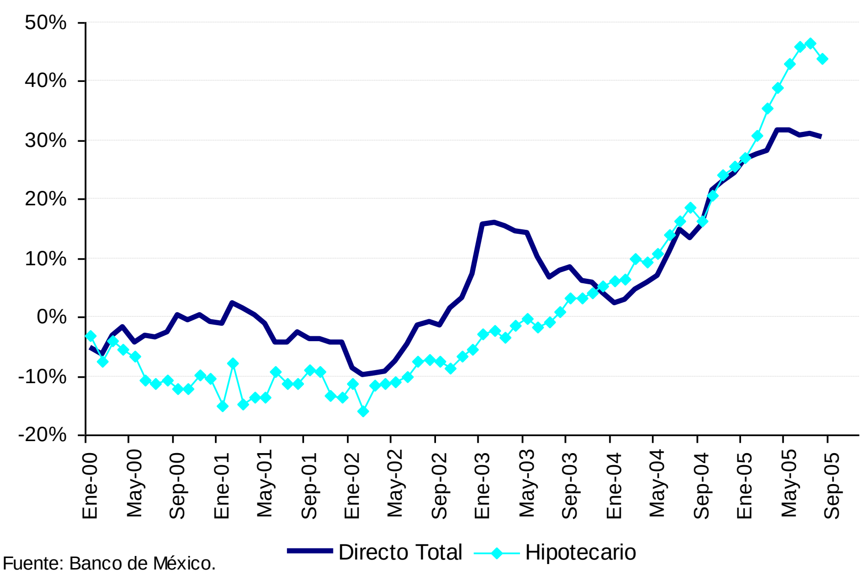
El aumento significativo en el mercado de los niveles y volatilidad de las tasas de interés desde la década de 1970-1980, ha resultado en riesgo de tasa de interés sustancialmente mayor enfrentado por las empresas, las instituciones financieras y las familias. Las consecuencias de este problema son mas serias para empresas donde la duración de los activos no coincide con la de los pasivos; éste puede ser el caso de las instituciones financieras (bancos) que ofrecen hipotecas a tasa fija y tienen sus pasivos de corto plazo a tasa variable. Así, cuando la tasa de interés de corto plazo en el mercado se eleva inesperadamente se tendría una pérdida no prevista. La introducción y desarrollo reciente de nuevos productos financieros en el mercado mexicano, como futuros, swaps[4] y opciones, son una respuesta lógica a la necesidad creciente de las empresas financieras de reducir este tipo de riesgos.

[4] Un swap es acuerdo para intercambiar flujos de efectivo en el futuro de acuerdo a una formula preestablecida; un ejemplo es el de tasa de interés donde puede intercambiarse una tasa fija por una variable o a la inversa.

Durante la época de alta inflación[5] en México, naturalmente las hipotecas eran a tasa variable debido al riesgo inherente de movimientos pronunciados en las mismas; es solo recientemente cuando se ofrecen hipotecas a tasa fija, gracias al aumento en los plazos de maduración de la deuda soberana de México, que han contribuido al desarrollo del mercado de derivados; y a un nuevo régimen de baja inflación.

Actualmente, a pesar del fuerte crecimiento del crédito a vivienda otorgado por la banca comercial (Gráfico 1) observado en últimos años, de acuerdo a Banco de México, con tasas alrededor del 35% de incremento anual, no se ha logrado recuperar los niveles de crédito hipotecario de cerca del 5.5% del PIB que se tenían antes de la crisis de 1994, a mediados de 2005 éste representó tan solo 1.2% del PIB (Gráfico 2).

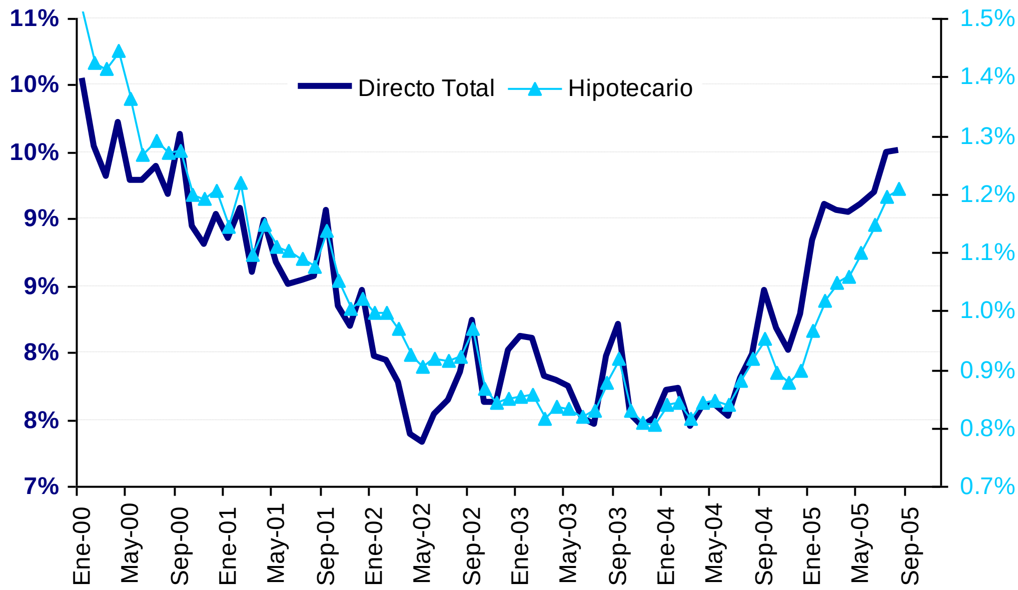
Gráfico 1. Crecimiento anual del financiamiento otorgado por la Banca Comercial al Sector Privado



Fuente: Banco de México.

[5] En Febrero de 1988 la inflación anual llegó a niveles del 180%, descendiendo posteriormente a niveles del 7% en 1994, para volver a niveles del 50% a fines de 1995, después de la crisis del peso.

Gráfico 2. Financiamiento otorgado por la Banca Comercial al Sector Privado (%PIB)



Fuente: Banco de México.

Se tienen en México fundamentalmente tres tipos de hipotecas en el mercado: 1) hipotecas a tasa variable, normalmente referenciadas a la tasa de interés interbancaria de equilibrio TIIE, re-ajustable usualmente a fin de cada mes, 2) a tasa fija, donde se establece la tasa desde el principio y esta permanece constante, y por último, 3) a tasa variable con un tope, en esta la tasa es variable (TIIE) pero no puede ser mayor a una previamente establecida.

En la tabla siguiente se encuentran las condiciones de hipotecas ofrecidas por las principales instituciones financieras dentro del país.

Tabla 1. Condiciones para el otorgamiento de hipotecas

Institución financiera	Plazo	Tasa de interés	Monto mínimo del crédito	Monto máximo del crédito	Apertura de crédito
Banamex	15-20 años	TIIE+5, tope 18%	210,000.00	10,000,000.00	2%
Banamex	15-20 años	11.75%-12.75%	210,000.00	10,000,000.00	3% + $500
Bancomer	5-20 años	11.75%	176,000.00	1,275,000.00	3.5% + 450
Bancomer	5-20 años	TIIE+4 tope 17%	176,000.00	1,200,000.00	3.5% +450
Banorte	15 años	TIIE+5 con tope de 17.9%	-	-	2.5%
IXE	5,7, 10 y 15 años	12.5%	500,000.00	-	2.5% + 500
IXE	5, 7, 10 y 15 años	TIIE+4 con tope de 15%	500,000.00	-	2.5% + 500
Inverlat	5-20años	10.90% primeros 5 años, 13.90% los restantes	250,000.00	-	2%
Inverlat	20 años	14.5% por 10 años, TIIE + 8 con tope de 22% el restante	250,000.00	-	2.5%

Fuente: Página web de las respectivas instituciones financieras (Noviembre de 2005).

Como se detallará en los capítulos posteriores, detrás de una hipoteca a tasa fija, esta una hipoteca a tasa variable más un swap de amortización, que cambia la naturaleza del activo, en este caso la tasa de interés. Por su parte, detrás de las nuevas hipotecas ofrecidas a tasa variable con un tope, hay una combinación entre una hipoteca a tasa variable y un conjunto de opciones tope (*cap)*, que actúan como un seguro para prevenir que la tasa de interés variable rebase un determinado nivel. Análogamente, puede ser también representada mediante una combinación entre una hipoteca a tasa fija y un conjunto de opciones piso (*floor*).

Dicho lo anterior, en el siguiente capítulo se desarrolla la teoría fundamental de los futuros y swaps, para luego abordar las opciones y los diferentes métodos de valuación que se consideran; se estudia la estructura detrás de las hipotecas, al valuar los derivados detrás de las mismas, para posteriormente analizar el rendimiento que le da a la institución financiera invertir en el otorgamiento de hipotecas; por último se exponen los resultados obtenidos y las conclusiones.

En el caso de las hipotecas a tasa fija, donde la estructura que hay detrás es un swap de amortización, al realizar el análisis se obtuvo que el margen bruto es de 4.8% y 5.5% para Banamex e IXE respectivamente. Es decir, el invertir en hipotecas a tasa fija les da a las instituciones un margen bruto positivo, el margen neto dependerá de sus costos de operación.

En el caso de hipotecas a tasa variable con tope, el margen bruto que se obtuvo para Banamex y Bancomer fue entre 3.8% y 5.3%. Es decir, invertir en hipotecas de éste tipo es más rentable que invertir sus recursos a tasa variable en el mercado, siempre que su margen neto sea también positivo (costos de operación menores a su margen bruto).

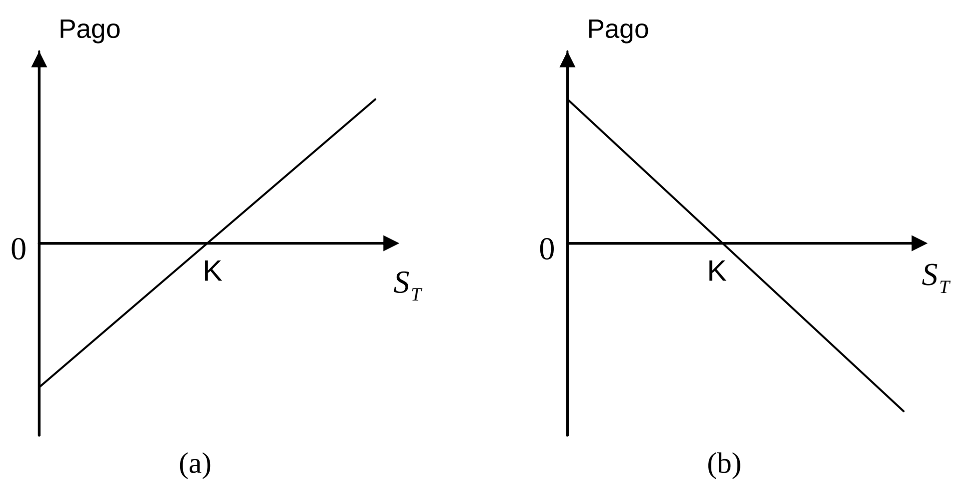
Las hipotecas a tasa fija y a tasa variable con tope pueden parecer muy distintas a simple vista, pero cuando se descomponen y se analiza la estructura detrás de ellas, puede afirmarse que para las instituciones financieras son casi el mismo producto, ya que los rendimientos obtenidos de ellas no son significativamente diferentes. Donde sí hacen una diferencia es para los clientes, al ofrecer distintos tipos de hipotecas se pueden cubrir los diversos perfiles de clientes potenciales; un cliente muy adverso al riesgo optaría por una hipoteca a tasa fija, donde esta seguro de lo que tendrá que pagar; mientras que uno menos adverso al riesgo podría optar por una con tasa tope, donde el monto de su pago no es seguro, pero a su vez si las tasas de interés bajan puede tener una recompensa, por su exposición al riesgo.

1. FUTUROS

Los futuros y los contratos adelantados o *forwards*, son instrumentos en los que el comprador se compromete a pagar en una fecha futura determinada, un precio acordado a cambio de un activo o mercancía, el vendedor se compromete a entregar dicho activo o mercancía en la fecha acordada recibiendo el pago preestablecido. Las diferencias fundamentales entre futuros y *forwards* son: el primero se encuentra estandarizado[6] cotiza a través de un mercado centralizado y reduce el riesgo crédito, a través de un sistema de cuentas de margen; en tanto que el último es mucho más flexible (puede estar hecho a la medida), y presenta problemas de riesgo de contraparte.

En un contrato de futuros, se pueden tener posiciones cortas (si se vende) o largas (si se compra). El patrón de pago de éstos se describe en las Graficas 3a (larga) y 3b (corta), cuando K es el precio de liquidación de dichos contratos, y S_T es el precio prevaleciente en el mercado spot del subyacente al vencimiento del contrato.

Gráfico 3. Pagos de una posición larga y corta en un contrato a futuro.



[6] El activo o mercancía, la fecha, la cantidad y la calidad se encuentran establecidos, lo único cambiante es el precio.

Los primeros futuros que se negociaron fueron sobre productos agrícolas, posteriormente se introdujeron los futuros financieros. En 1972 el CME creó el primer futuro financiero al introducir contratos sobre siete monedas extranjeras, la libra esterlina, el dólar canadiense, el marco alemán, el franco suizo y francés, el yen japonés y el peso mexicano. En México, el Mexder desde su inicio de operaciones en diciembre de 1998 ha tenido un rápido crecimiento, en el 2004 se ubicó a nivel mundial en 5º lugar en volumen operado de contratos de futuros.

El tipo de futuros que interesa en la valuación de hipotecas y sobre el cual profundizaré es el de tasa de interés, específicamente el de amortización. En el MexDer se opera un futuro sobre la TIIE de 28 días, él cual es muy liquido y se ubicó como el cuarto contrato con mayor volumen de operación a nivel mundial en el 2004, creciendo 27.12% respecto al 2003.

Las tasas de interés a futuro (*forwards*), son aquellas que se negocian hoy para inversiones que se realizan en una fecha futura y por un determinado período. Puede demostrarse que cuando las tasas de interés están compuestas de manera continua[7], la tasa *forward* $\left(R^F\right)$ que se aplica a inversiones entre el período T_i y T_{i+n}, con $n>0$, se obtiene de la siguiente fórmula:

$$R^F\left(t,T_{i+n},T_i\right)=\frac{R_{i+n}\,T_{i+n}-R_iT_i}{T_{i+n}-T_i} \qquad (1.0)$$

[7] El resultado es solo aproximadamente verdadero cuando las tasas no se componen continuamente.

donde R_i y R_{i+n} son las tasas cupón cero[8] en el mercado spot para los períodos T_i y T_{i+n}.

1.1 Acuerdo de Tasa a Futuro

El derivado conocido como acuerdo de tasas de interés a futuro (*Forward Rate Agreement, FRA*), es clave en la valuación de las hipotecas de tasa fija; ya que los swaps de amortización pueden valuarse a partir de un portafolio de *FRAs*. Los swaps de amortización son derivados que permiten cambiar tasa fija por tasa variable o viceversa.

El *FRA* es un contrato en el mercado *over-the-counter*[9], basado en la tasa *forward*, en el cual la parte larga del mismo se obliga a invertir cierta cantidad (nocional) a una tasa predeterminada, en una fecha futura y por un período determinado. En equilibrio, esta tasa debe ser igual a la tasa *forward*, descrita en la ecuación (1.0).

En cualquier período el valor de un FRA puede expresarse como:

$$V(t, T_i, T_{i+n}) = L(R^K - R^F)(T_{i+n} - T_i)e^{-R_{i+n}(T_{i+n}-t)} \qquad (1.1)$$

donde R^K es la tasa predeterminada del FRA, R^F la tasa *forward*, L es el valor nocional, t es el día de hoy, T_i es la fecha futura en la que se realizara la inversión, T_{i+n} es la fecha de vencimiento de esta inversión, y R_{i+n} es la tasa libre de riesgo cupón cero para el período T_{i+n}.

[8] La tasa cupón cero es la que se obtendría con un bono que no provee cupones.

[9] OTC. Mercado en el cual los participantes son generalmente instituciones financieras, corporaciones y manejadoras de fondos, en el se operan generalmente derivados no estandarizados. Son conocidos también como mercados fuera de la bolsa.

Cuando $R^K = R^F$ [10] el valor del FRA es cero, lo que sucede siempre al inicio de todo contrato, ya que en este caso las oportunidades de ganancias y perdidas de la parte vendedora y compradora son iguales.

1.2 Swaps

Un swap es un acuerdo entre dos partes para intercambiar flujos de dinero en el futuro, en general los flujos intercambiados en un swap pueden ser originados a partir de cualquier valor, activo o mercancía estandarizada. Existen dos tipos principales de swaps, los de tasa de interés y los de tipo de cambio, y de ahí se derivan un sin fin de combinaciones y especializaciones de los mismos.

El tipo de swap más común es el llamado swap de tasa de interés estándar (*plain vanilla,* nuestro análisis se centra en una pequeña variación del mismo llamada swap de amortización*;* se trata de un contrato en el que una de las partes paga intereses a tasa fija predeterminada sobre un valor nocional decreciente de acuerdo a cierta periodicidad y durante un período determinado, recibe a cambio pagos a una tasa de interés flotante sobre el mismo valor nocional. Las partes nunca intercambian el valor nocional de referencia solo los flujos de tasas de interés.

Puede demostrarse que un swap de tasa de interés equivale a un portafolio de acuerdos a futuro de tasas de interés *FRA*. La tasa fija establecida en el swap se obtiene de la siguiente fórmula:

[10] Generalmente el valor de R^K que es la tasa fija predeterminada se establece igual a R^F el valor de la tasa futura al inicio del contrato, para que este valga cero, naturalmente al transcurrir el tiempo este puede cambiar de valor en la medida que exista un diferencial entre ambas tasas.

$$R^{S} = \frac{\sum_{i=t}^{T} R^{F}(t, T_{i+n}, T_{i}) e^{-R_{i+n}(T_{i+n}-t)}}{(T-t)\sum_{i=t}^{T} e^{-R_{i+n}(T_{i+n}-t)}} \tag{1.2}$$

Poitras (2002) menciona que es difícil identificar con precisión la fecha en que empezaron a negociarse los swaps. En el siglo XVI se utilizaban ya los llamados cheques de cambio, en el lenguaje actual se podrían considerar como un acuerdo de tasas a futuro, incluso en el Código de Hammurabi se encontraban leyes concernientes al intercambio de los mismos, estos podrían ser considerados como swap rudimentarios. En el sentido actual del término, los swaps de tasa de interés empezaron a ser intercambiados a mediados de la década de los setentas, mientras que los de tipo de cambio a principios de los ochentas. El primer contrato de swap ampliamente publicitado se realizó en 1981 entre IBM y el Banco Mundial.

Actualmente el uso de swaps se ha vuelto una práctica común en los mercados fuera de la bolsa, como una herramienta eficaz de transferencia de riesgos. La Asociación Internacional de Swaps y Derivados (ISDA 2004[11]) publica anualmente un reporte del volumen de derivados financieros incluyendo swaps que se comercializan en los mercados fuera de la bolsa. En la siguiente tabla se muestran estos datos para el período 2001-2004:

[11] Esta asociación fue creada en 1985, por los principales comerciantes de derivados en los mercados fuera de la bolsa.

Tabla 2. Volumen promedio semanal de comercialización de diversos derivados financieros por institución (en número de intercambios promedio por empresa)[12]

	Todas las empresas			
Período	**2001**	**2002**	**2003**	**2004**
FRAs	59	64	66	62
Vanilla swaps	209	257	236	288
Non-vanilla swaps	80	40	51	58
Opciones de tasa de interés	33	40	51	58
Total	381	401	404	466

Fuente: *ISDA 2004 operations benchmarking survey* en www.isda.org

En la tabla 2 se identifica a los swaps de tasa de interés estándar (*vanilla swaps*) como el contrato con mayor volumen de operaciones, muy por arriba de las opciones de tasa de interés.

Como ya se mencionó, un swap puede verse como un portafolio de *FRA*; así la tasa fija puede obtenerse evaluando cada uno de los tramos del contrato por separado como un acuerdo de tasa de interés a futuro, para luego obtener la tasa fija con la cual el valor presente de los *FRA* que forman el swap sea cero; ese debe ser precisamente el valor del contrato en su inicio, de otra manera existiría la posibilidad de arbitraje, en cualquier otro período el valor del contrato puede variar de acuerdo al movimiento en el mercado spot de las tasas de interés.

El procedimiento para valuar un swap de tasa de interés es como sigue: 1) Calcular las tasas *forwards* para las tasas variables relevantes en cada uno de los intercambiados del swap. 2) Calcular los flujos que paga la parte variable del swap utilizando estas tasas *forwards*. 3) Fijar el valor del swap como el valor presente de los flujos netos de este.

[12] En total se encuestaron 67 empresas, que se clasificaron en grandes, medianas y pequeñas de acuerdo al volumen de intercambio, se puede consultar el cuadro desglosado en el anexo 1.

Como se menciono antes, con este instrumento se puede transformar una deuda a tasa variable por una a tasa fija o a la inversa. Es así como valiéndose de un swap de amortización, se analizará el costo-beneficio para las instituciones financieras de otorgar hipotecas a tasa fija.

2. OPCIONES

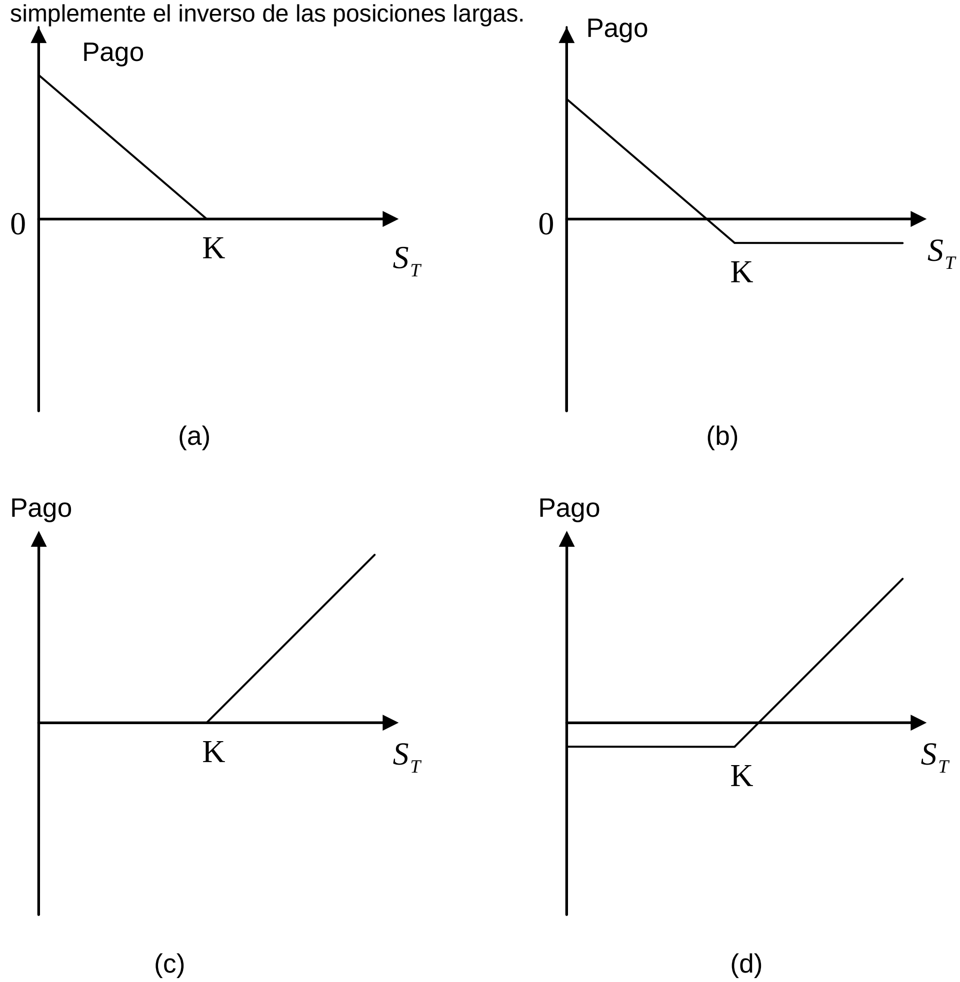
Una opción es un derivado que a diferencia de los contratos de futuros otorga el derecho más no la obligación de adquirir o vender un activo a un precio determinado, en un tiempo futuro.

Existen dos tipos fundamentales de opciones: las de compra o *calls* y las de venta o *puts*. Las opciones son americanas, si se pueden ejercer en cualquier momento hasta la fecha de maduración, o europeas si sólo pueden ejercerse en la fecha de maduración. Otra diferencia respecto a los contratos a futuro, es que el comprar una opción tiene un costo, ya que se trata de contratos asimétricos, en los que se pueden obtener ganancias ilimitadas, y perdidas limitadas, éstas últimas son iguales al costo de las opciones.

En el gráfico 4 se muestran los patrones de pagos de las diferentes posiciones en opciones de compra y opciones de venta. De acuerdo a las características mencionadas, podemos considerar a la opción como un contrato a futuro más un seguro contra perdidas.

Existen diferentes enfoques para valuar opciones, en el caso particular de ciertas opciones el modelo de Black y Scholes es fundamental, a continuación se describen sus principales características.

Gráfico 4. (a) Pagos brutos de posición larga en un *put* (b) Pagos netos de una posición larga en un *put*, (c) Pagos brutos de una posición larga en un *call*, (d) Pagos netos de posicion larga en un *call*. Los pagos de las posiciones cortas en todos los casos, son simplemente el inverso de las posiciones largas.



2.1 Modelo Black & Scholes

El modelo desarrollado a principios de la década de los setentas, a partir de un artículo clave de Fischer Black y Miron Scholes, al cual posteriormente Robert Merton hizo importantes aportaciones, es el enfoque conocido hoy como Black & Scholes. Éste fue un parteaguas para los mercados de derivados, ya que ha tenido una gran influencia en la forma de valuar y cubrir riesgos de las opciones.

Un problema fundamental que enfrentaron al realizar el modelo fue la existencia de riesgo sistemático, que trae consigo la necesidad de encontrar la tasa adecuada a la cual descontar los flujos. El argumento que permitió resolver dicha dificultad fue la implementación del concepto fundamental de portafolio **dinámico cubierto**. La característica clave del portafolio cubierto es que carece de riesgo de mercado durante un instante, lo que permite descontar los flujos utilizando la tasa libre de riesgo, a dicho portafolio se le llamará en adelante Φ. El portafolio Φ incluye la opción a valuar (O) y el subyacente (S) en la proporción adecuada, de tal forma que se logre eliminar toda posibilidad de arbitraje, así el rendimiento del portafolio cubierto será una tasa libre de riesgo (r)[13]. De tal forma que si no existen oportunidades de arbitraje, el rendimiento de este portafolio será la tasa libre de riesgo. Se debe destacar que lo anterior se logra solo por un instante de tiempo, lo que requiere que éste sea actualizado constantemente convirtiéndolo en un portafolio dinámico. Al lograr la construcción de Φ, sus rendimientos pueden ser descontados con la tasa libre de riesgo, lo que elimina el problema de encontrar el factor de descuento estocástico adecuado al riesgo del subyacente; se consigue así la posibilidad de valuación neutral al riesgo.

Si definimos μ como el retorno anual esperado del activo y σ como la volatilidad anual del precio del activo. Los supuestos del modelo[14] son los siguientes:

---

[13] La razón por la cual se puede crear un portafolio libre de riesgo es que tanto la opción como el subyacente tienen la misma fuente de riesgo (movimientos en el precio del subyacente); en un período corto de tiempo el precio del subyacente y el de la opción están perfectamente correlacionados. Así, si formamos el portafolio adecuado siempre podrán contrarrestarse las ganancias o pérdidas en la posición del subyacente con las respectivas ganancias o pérdidas en la posición de la opción, de tal manera que el valor del portafolio en un período corto de tiempo se sabe con certeza.

[14] Los supuestos 3 y 5 no son limitativos, pueden relajarse.

1. El precio del subyacente sigue un proceso de difusión geométrico: $dS = \mu S\ dt + \sigma S\ dz$.
2. No hay costos de transacción.
3. Se permiten las ventas en corto.
4. No existen dividendos durante la vida del derivado.
5. El intercambio es continuo.
6. La tasa de interés libre de riesgo (r) instantánea es constante y la misma para toda maduración.
7. No existen oportunidades de arbitraje sin riesgo.

El portafolio dinámico se define como:

$$\Phi = O(S_t, t, T) - \Delta S_t \tag{2.0}$$

donde O es la opción a valuar, S_t es el subyacente, y Δ la razón de cobertura.

Asumiendo que a través de la estrategia de portafolio se elimina el riesgo de mercado, se puede demostrar que aplicando el lema de Ito[15] se obtiene,

$$d\Phi = O_t(S_t, t, T)\, dt + \frac{1}{2} O_{SS}(S_t, t, T)\ \sigma^2 S_t^2 dt \tag{2.1}$$

donde O_t es la derivada parcial de la opción con respecto al tiempo, O_S es la derivada parcial de la opción respecto al subyacente y O_{SS} es la segunda derivada parcial de la opción respecto al subyacente.

En ausencia de arbitraje, la tasa de rendimiento del portafolio Φ por unidad de tiempo debe igualarse a la tasa libre de riesgo de acuerdo a la siguiente ecuación:

[15] Puede consultarse en Poitras 2002, pp 434-438.

$$\frac{d\Phi}{\Phi} = rdt \qquad (2.2)$$

de donde se obtiene la ecuación fundamental de B&S,

$$O_t(S_t,t,T) + rS_tO_S(S_t,t,T) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 O_{SS}(S_t,t,T) = rO(S_t,t,T) \qquad (2.3)$$

se trata de una ecuación lineal en O de derivadas parciales de segundo orden, que depende de los siguientes parámetros: la tasa libre de riesgo r, la volatilidad del subyacente σ, el valor del subyacente S_t, y el tiempo para el vencimiento $T-t$. Esta ecuación es satisfecha por todos los derivados, incluyendo futuros, acuerdos futuros de tasa de interés, y swaps.

Una solución particular para las opciones de tipo europeo *calls* y *puts* se obtiene imponiendo las siguientes condiciones de transversalidad:

En el caso de una opción de compra

$$O_t\left(S_T,T,T\right) = \max\left(S_T - K, 0\right) \qquad (2.3.1)$$

En el caso de una opción de venta

$$O_t\left(S_T,T,T\right) = \max\left(K - S_T, 0\right) \qquad (2.3.2)$$

También se requieren otras condiciones de transversalidad de carácter técnico.

La solución a la ecuación diferencial bajo las condiciones anteriores para un activo sin dividendos es:

Para una opción de compra $C(S_t,t,T) = S_tN(d_1) - (Ke^{-r(T-t)})N(d_2)$ (2.4)

Para una opción de venta $P(S_t,t,T) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - S_tN(-d_1)$ (2.5)

Con $d_1 = \dfrac{\ln(S_t / K) + (r + ½\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T}}$

$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}$

2.2 Árboles Binomiales

Un enfoque alternativo, y mas general que B&S, es la valuación de opciones por medio de árboles binomiales o trinomiales. Puede demostrarse que con el diseño apropiado este enfoque obtiene soluciones que se aproximan a las soluciones exactas.

Con el mismo razonamiento de portafolio cubierto de Black & Scholes, se puede valuar opciones utilizando árboles binomiales o trinomiales.

Este método permite la valuación tanto de opciones europeas como americanas. El método de valuación por árbol binomial implica dividir la vida de la opción en n pequeños intervalos de tiempo[16] $\Delta t = \dfrac{T - t}{n}$, y donde n es un número entero grande. Para utilizar el principio de valuación neutral al riesgo, se deben eliminar todas las oportunidades de arbitraje, para lograr esto al igual que en el método de B&S se construye un portafolio formado por la opción a valuar y la acción subyacente, de tal forma que se elimine el riesgo de mercado de este portafolio. Al ser libre de riego el portafolio, el rendimiento que debe obtener es igual a la tasa libre de riesgo.

Se considera un subyacente cuyo precio es S_0 y una opción sobre dicho subyacente, cuyo precio actual es $O(S,t,T)$, la fecha de maduración es T. En un árbol binomial de un solo paso, se asume que el subyacente puede incrementarse a un nuevo valor $S_0 u$ con

[16] En la medida que se incrementa el número de intervalos de tiempo la solución por este método tiende a converger al modelo B&S.

$u > 1$, o disminuir a un nuevo valor $S_0 d$ con $d < 1$. Si el precio del subyacente aumenta a $S_0 u$, el precio de la opción se denota $O_u(\cdot)$, si en cambio este disminuye a $S_0 d$, el precio de la opción es $O_d(\cdot)$.

El portafolio del cual nos valdremos para valuar la opción consiste en una posición larga de Δ unidades del subyacente y una posición corta en la opción.

Si el precio del subyacente sube, el valor del portafolio es: $S_0 u\Delta - O_u$, si en cambio disminuye el valor es $S_0 d\Delta - O_d$, igualando ambas expresiones, se obtiene la Δ que hace a este portafolio libre de riego.

$$\Delta = \frac{O_u - O_d}{S_o u - S_0 d} \tag{2.6}$$

Con la tasa libre de riesgo r, el valor presente del portafolio está dado por:

$$\left(S_0 u\Delta - O_u\right)e^{-r\Delta t} \tag{2.7}$$

Por otro lado el costo de armar el portafolio es

$$S_0\Delta - O(\cdot) \tag{2.8}$$

Si evitamos oportunidades de arbitraje, estas expresiones deben ser iguales, utilizando la ecuación (2.6) se obtiene el precio de la opción:

$$O(\cdot) = e^{-r\Delta t}\left[pO_u + (1-p)O_d\right] \tag{2.9}$$

con
$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} \tag{2.10}$$

donde dado que el parámetro $0 < p < 1$, suele llamarse la pseudo probabilidad de alza en el subyacente.

Las ecuaciones (2.9) y (2.10) permiten obtener el costo de la opción cuando el movimiento del precio está dado por un árbol binomial de solo un paso.[17]

El análisis anterior puede extenderse fácilmente a un árbol de múltiples subperíodos.

El proceso de evaluación del árbol se realiza recursivamente hacia atrás. Comenzando en el período final, en donde el valor de la opción es conocido, éste es igual al pago. De ahí se trae el valor en cada uno de los nodos hacia el nodo anterior, hasta llegar al nodo inicial; utilizando la ecuación (2.9) en el caso de opciones europeas, o una generalización de la misma que permite el ejercicio prematuro en el caso de opciones americanas.

2.3 Opciones sobre tasas de interés

Las opciones sobre tasas de interés son instrumentos cuyos pagos dependen del nivel que alcancen éstas. En general, su valuación es de mayor complejidad que las opciones ordinarias sobre acciones, entre otras razones porque el comportamiento de las tasas de interés es más complicado, suele presentar reversión a la media, y debido también a que las tasas se utilizan tanto para definir el pago como para descontar la opción.

Las opciones de tasa de interés en las cuales se centra el capítulo siguiente son opciones de tasa de interés tope y piso (*cap* y *floor)*, utilizadas frecuentemente en los mercados fuera de la bolsa por instituciones financieras. En un *floor*, se obtiene un pago

[17] La probabilidad de que el precio de la acción aumente o disminuya no esta incluida en la fórmula de valuación, aunque esto parezca contra intuitivo no es erróneo ya que estamos valuando la opción no en términos absolutos sino relativo al precio de la acción, y este último ya incorpora dichas probabilidades, no es necesario tomarlas en cuenta nuevamente al calcular el precio de la opción.

sobre un valor nocional dado L, cuando la tasa de interés variable R_v (generalmente la Libor en los mercados internacionales de dólares, y en México la TIIE en mercados del peso), actualizada cada determinado período (tenor); es mayor a una tasa fija R_k. En el caso del *cap* se recibe un pago cuando la tasa fija es mayor a la variable. Estos contratos pueden ser utilizados por una institución financiera como instrumento de control y/o transferencia de riesgo de tasas de interés sobre hipotecas.

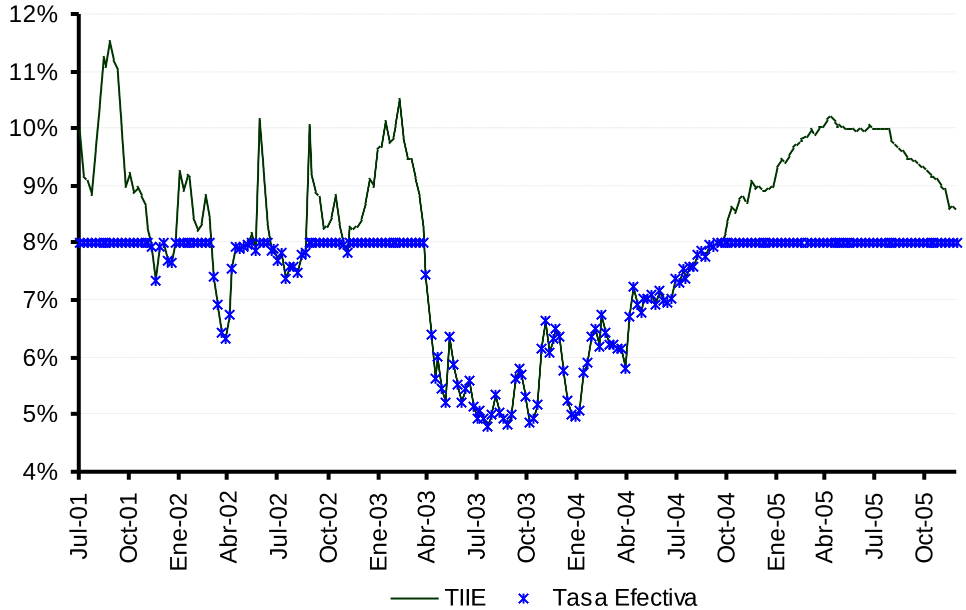
3. METODOS DE VALUACIÓN

En el caso de las hipotecas ofrecidas en el mercado a tasa variable con tasa tope, el cliente se obliga a pagar el préstamo a la institución financiera a una tasa variable R_v establecida (generalmente referenciada a la TIIE), en el caso en que dicha tasa variable rebase una tasa fija R_k llamada tasa tope, el cliente paga ésta última en lugar de la variable. Dicho lo anterior, si consideramos una hipoteca a tasa variable con tope, otorgada por una institución financiera por T períodos, suponiendo que la tasa variable se reajusta en $t_1, t_2, ..., t_n$, definimos $t_{n+1} = T$; el pago que recibe en t_{v+1} $(v = 1,2,...,n)$ puede expresarse como:

$$L_v \delta_v \min(R_k, R_v) \tag{3.0}$$

donde L_v es el principal en el tiempo v, $\delta_v = t_{v+1} - t_v$, R_v es la tasa variable de referencia para el período entre t_v y t_{v+1} $(1 \le v \le n)$, y R_k es la tasa tope. En el gráfico 5 se ilustra cual hubiera sido la tasa efectivamente pagada por el cliente a la institución financiera para el período del 2001 al 2005, en el caso hipotético en que la tasa tope se fijara en 8% y la tasa variable fuera igual a la TIIE.

Gráfico 5. Tasa efectivamente pagada en una hipoteca a tasa variable con tope



Fuente: Elaboración propia con datos de Banco de México.

La ecuación 3.0 puede re expresarse como:

$$\left(L_v \delta_v R_k\right) - \left(L_v \delta_v \max\left(R_k - R_v, 0\right)\right) \tag{3.1}$$

o alternativamente

$$\left(L_v \delta_v R_v\right) - \left(L_v \delta_v \max\left(R_v - R_k, 0\right)\right). \tag{3.2}$$

En la ecuación (3.1) el pago v correspondiente de la hipoteca puede interpretarse como un flujo de interés a tasa fija, menos el valor de un *floorlet*[18] sobre la tasa de interés variable con nocional igual a L_v. En la ecuación (3.2) el pago de la hipoteca se interpreta como un flujo a tasa variable menos el valor de un *caplet* sobre la misma. En ambos casos la hipoteca incorpora en forma implícita una opción de tasa de interés.

[18] Al portafolio de opciones *floorlets* se le conoce como *floor*, análogamente al de *caplets* se le conoce como *cap*.

3.1 Modelo de Black

El modelo de Black & Scholes puede ser modificado para valuar opciones sobre precios de bonos, el modelo resultante es usualmente llamado de Black ya que las fórmulas son similares a las obtenidas por Fisher Black (Black 1976) para valuar opciones sobre futuros y *forwards*.

El modelo de Black[19], válido cuando el precio de los bonos sigue una distribución lognormal, puede adaptarse para valuar *caplets* (pueden interpretarse como un put sobre bonos), el valor del *caplet* es el siguiente:

$$L_v \delta_v B(0, t_{v+1}) \left[R_v^F N(d_1) - R_k N(d_2) \right] \tag{3.3}$$

donde:

$d_1 = \dfrac{\ln(R_v^F / R_k) + \sigma_v^2 t_v / 2}{\sigma_v \sqrt{t_v}}$, $d_2 = d_1 - \sigma_v \sqrt{t_v}$, $B(t,T)$ es el precio en t de un bono cupón cero con principal igual a 1 en T, R_v^F es la tasa *forward* hoy para inversiones que tienen lugar en el período entre t_v y vencen en t_{v+1}, σ_v es la volatilidad de la tasa de interés variable.

El valor correspondiente de un *floorlet* es:

$$L_v \delta_v B(0, t_{v+1}) \left[R_k N(-d_2) - R_v^F N(-d_1) \right] \tag{3.4}$$

[19] En el modelo de Black el valor de una opción de venta europea esta dada por $p = B(0,T)\left[KN(-d_2) - F_0 N(-d_1)\right]$ con $d_1 = \dfrac{\ln(F_0 / K) + \sigma^2 T / 2}{\sigma \sqrt{T}}$ y $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$, donde B es el precio de un bono cupón cero, F_0 el valor en cero del *forward* sobre el subyacente, y K el valor de liquidación de la opción.

Como se menciono antes, un *cap* (*floor*) es un portafolio de *caplets (floorlets)*. El valor del *cap*, es la sumatoria del valor obtenido a través de la ecuación (3.3) de los n *caplets (floorlets)*.

En el modelo de Black el supuesto de una distribución de probabilidad lognormal para el precio del bono y/o la tasa de interés es cuestionable, ya que no provee una descripción adecuada de la evidencia empírica sobre el movimiento de las tasas de interés. En las siguientes secciones se analizan modelos alternativos para las tasas de interés y la valuación de opciones sobre las mismas. Estos modelos suelen dividirse en dos grandes grupos: los de equilibrio y los de no arbitraje.

Definimos la tasa de corto plazo r en tiempo t, como la que aplica para un período infinitesimal de tiempo. Lo relevante no es el proceso de r en el mundo real, ya que como se mostró en secciones anteriores, los modelos se han estructurado de tal forma que los precios de las opciones dependen únicamente del proceso que sigue r en el mundo neutral al riesgo; donde los inversionistas ganan en un período corto entre t y Δt, un promedio de $r(t)\Delta_t$. El valor en t de un derivado de tasa de interés que provee un pago de f_T en T es

$$\hat{E}\left(e^{-r(T-t)} f_T\right) \tag{3.5}$$

donde $\hat{E}$ es la esperanza en el mundo neutral al riesgo y $\bar{r}$ es el promedio del valor de r en el intervalo entre t y T. Si $B(t,T)$ es el precio en t de un bono cupón cero que paga un principal igual a uno en T, el precio de este debe ser:

$$B(t,T) = \hat{E}\left(e^{-r(T-t)}\right) \tag{3.6}$$

Si $R(t,T)$ es el interés cupón cero en t para el intervalo $T-t$, se obtiene a partir de (3.6) la siguiente expresión:

$$R(T,t) = -\frac{1}{T-t}\ln \hat{E}\left(e^{-r(T-t)}\right) \qquad (3.7)$$

La ecuación (3.7) implica que la estructura de tasas de interés en cualquier momento puede obtenerse a partir del valor de r en ese momento y del proceso que sigue r en un mundo neutral al riesgo, por lo tanto una vez que se ha definido por completo el proceso de r, se ha determinado también todo acerca de la curva cupón cero y sus movimientos a través del tiempo.

3.2 Modelos de equilibrio de un factor

Como su nombre lo indica, en estos modelos el proceso de r comprende solo un factor de incertidumbre[20], generalmente el proceso neutral al riesgo de r se describe con un proceso Ito de la forma

$$dr = m(r)dt + s(r)dz \qquad (3.8)$$

En el modelo de Rendleman y Bartter[21], el proceso de r se define como:

$$dr = \mu r\ dt + \sigma r\ dz \qquad (3.9)$$

donde μ y σ son constantes, es decir un proceso geométrico browniano, este proceso puede ser representado utilizando un árbol binomial. Una debilidad del modelo es que no incorpora el comportamiento de las tasas llamado reversión a la media, éste significa que a lo largo del tiempo las tasas tienden a regresar a un nivel promedio; es decir, niveles de tasa de interés muy altos tienden a tener movimientos a la baja, y viceversa. De acuerdo a Hull

[20] Esto es que todas las tasas se mueven en una misma dirección en un período corto, pero no todas se mueven en la misma magnitud. La forma de la curva cupón cero puede cambiar con el paso del tiempo.
[21] Ver Rendelman 1980.

(Hull 2003) existen argumentos económicos convincentes en favor de la reversión a la media, cuando las tasas son altas, la economía tiende a desacelerarse y hay poca demanda de los acreedores por fondos; como resultado las tasas disminuyen. Cuando las tasas son bajas, se tiende a pedir más fondos por parte de los acreedores y las tasas suben.

En el modelo de Vasicek[22] el proceso de r es:

$$dr = a(b - r)dt + \sigma dz \tag{3.10}$$

donde a, b y σ son constantes. Este modelo incorpora reversión a la media, la r es empujada al nivel b a una tasa a. Vasicek demuestra que se puede obtener la estructura de las tasas de interés como una función de $r(t)$ una vez que a, b y σ son determinadas. El hecho de que r puede volverse negativa puede considerarse como una desventaja de este enfoque.

El último de los modelos de equilibrio tratados aquí es el de Cox, Ingersol y Ross[23], en éste modelo donde las tasas son siempre no negativas; r sigue el proceso siguiente:

$$dr = a(b - r)dt + \sigma \sqrt{r} dz \tag{3.11}$$

éste tiene la misma reversión a la media del modelo de Vasicek, pero la desviación estándar del cambio en r es proporcional a $\sqrt{r}$, al incrementarse r también aumenta su desviación estándar.

[22] Ver Vasicek 1977.
[23] Ver Cox 1985.

3.3 Modelos de No-Arbitraje

La desventaja de los modelos de equilibrio, es que éstos no ajustan automáticamente la estructura de tasas actual. Al escoger los parámetros de forma correcta se puede conseguir un ajuste aproximado, pero generalmente no exacto, esto lleva a errores en la estimación del precio de las opciones.

Los modelos de No-Arbitraje están diseñados para ser exactamente consistentes con la estructura de tasas de interés actual. En los modelos de equilibrio los parámetros de r se mantienen constantes, en cambio en los de no arbitraje son flexibles en el tiempo.

El modelo Ho-Lee[24], propuesto por Thomas Ho y Sang-Bin Lee fue el primer modelo de no arbitraje, en éste la r sigue el proceso

$$dr = \theta(t)dt + \sigma dz \tag{3.12}$$

donde σ es una constante y $\theta(t)$ es una función que depende del tiempo, elegida para asegurar que el modelo calibre la estructura inicial de tasas. Una desventaja de este modelo es que al igual que el de Rendlemann y Bartter no incorpora reversión a la media.

Hull y White[25] propusieron una extensión al modelo de Vasicek pero proveyendo un ajuste exacto al valor inicial de la estructura de tasas, la estructura de r es

$$dr = \left[\theta(t) - ar\right]dt + \sigma dz \tag{3.13}$$

su modelo puede ser caracterizado como el de Ho-Lee pero con reversión a la media a una tasa de a. Ho-Lee es un caso particular de Hull-White cuando $a = 0$.

---

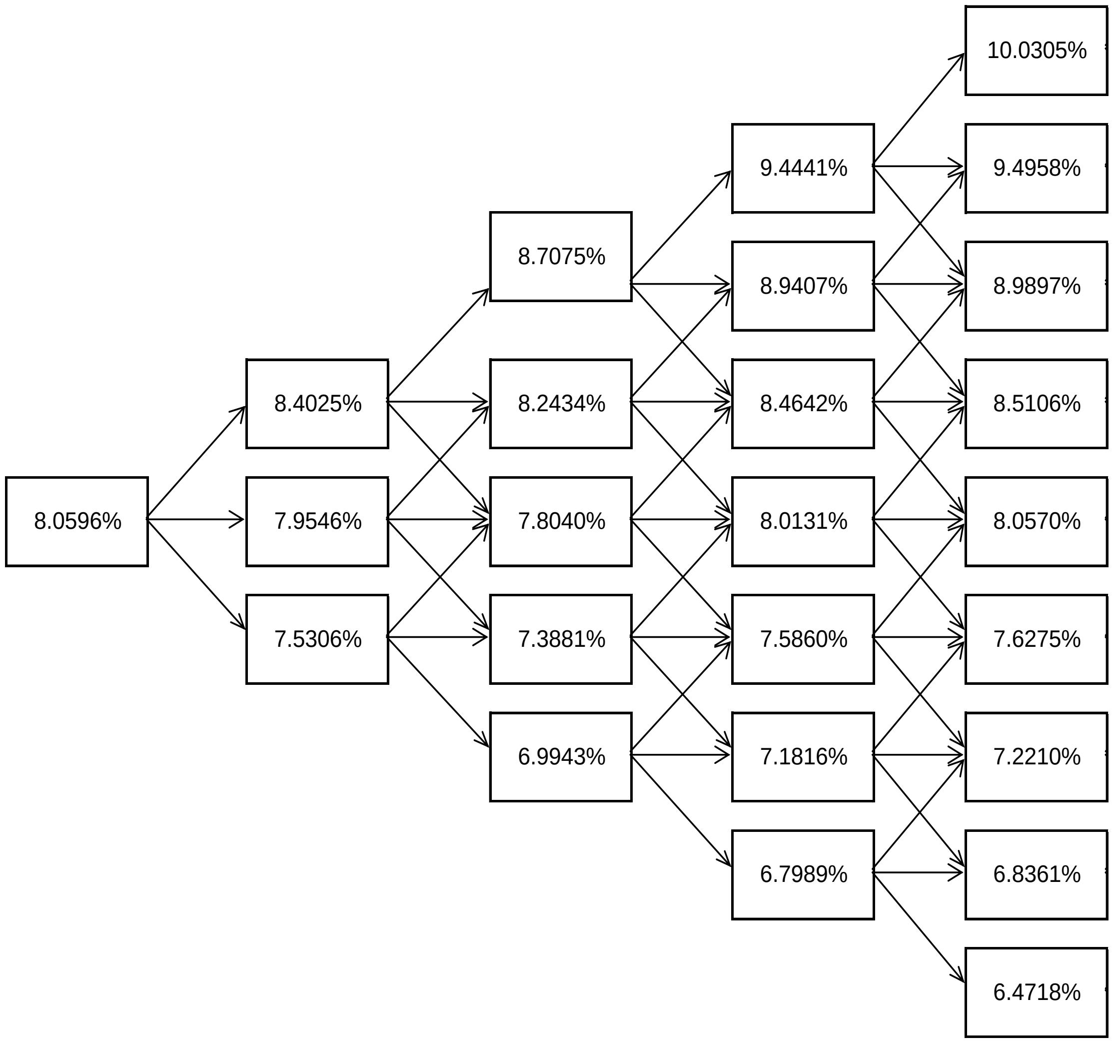
[24] Ver Ho 1986.
[25] Ver Hull 1990.

Un árbol de tasa de interés es una representación discreta del proceso estocástico para *r*, así este método puede ser utilizado para obtener la estructura de las tasas y valuar opciones de tasa de interés de acuerdo a los modelos anteriores. Es preferible utilizar árboles trinomiales a árboles binomiales, ya que de esta manera es más sencillo representar los procesos de *r*, en un número menor de pasos.

Una vez que los modelos de no arbitraje han sido representados por árboles binomiales o trinomiales, la valuación de opciones (como *caplets* y *floorlets*) se obtiene a través de métodos recursivos, similares a los vistos anteriormente.

En el gráfico 6 se da un ejemplo del proceso seguido por la tasa de interés TIIE representado a partir de un árbol trinomial de 4 pasos.

Gráfico 6. Árbol trinomial de tasa de interés TIIE (4 pasos).



4. VALUACIÓN DE HIPOTECAS

En la primera parte de este capítulo, para analizar el costo-beneficio para las instituciones financieras de invertir sus recursos en el otorgamiento de hipotecas[26] a tasa fija, utilizando las condiciones expuestas en la tabla 1, se obtiene la tasa fija del swap de amortización que tendría que adquirir la institución que otorga la hipoteca, de tal manera que al intercambiarla por la tasa variable, el valor del swap de amortización sea cero al momento de inicio del contrato. Posteriormente, para hacer lo correspondiente con las hipotecas a tasa variable con tope, se valúan diversos *floors* con dos de los modelos expuestos en el capítulo anterior, se simulan los flujos que recibiría el banco de esta inversión (hipoteca) y se obtiene la tasa interna de retorno.

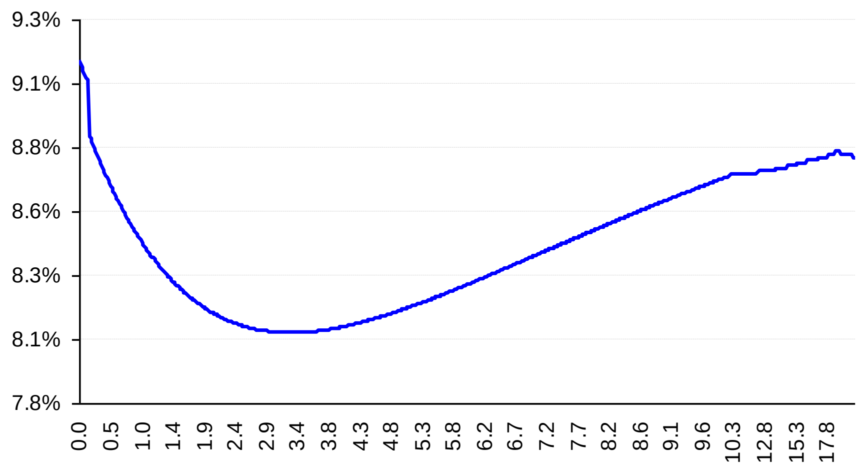
Para calcular la curva cupón cero, necesaria para la totalidad de los cálculos que se harán en adelante, se utilizaron los datos de las tasas de interés en el mercado spot al mes de Diciembre del 2005. El gráfico 7 muestra la curva cupón cero de la TIIE[27] de uno a veinte años. La curva es primero de pendiente negativa y posteriormente de pendiente positiva, es decir en el corto plazo las tasas van descendiendo al ir aumentando el plazo, pero a partir de los 3 años, las tasas aumentan al aumentar el período (esta última es la forma normal de la curva).

---

[26] En este análisis no se toma en cuenta la posibilidad de prepago del capital de la hipoteca.

[27] La curva cupón cero de la TIIE se obtuvo a través de la de CETES, a la cual se le sumo el diferencial existente entre la TIIE y el CETE del periodo correspondiente, dejando fijo el diferencial entre el CETE y la TIIE de 91 días para plazos mayores a éste.

Gráfico 7. Curva cupón cero TIIE

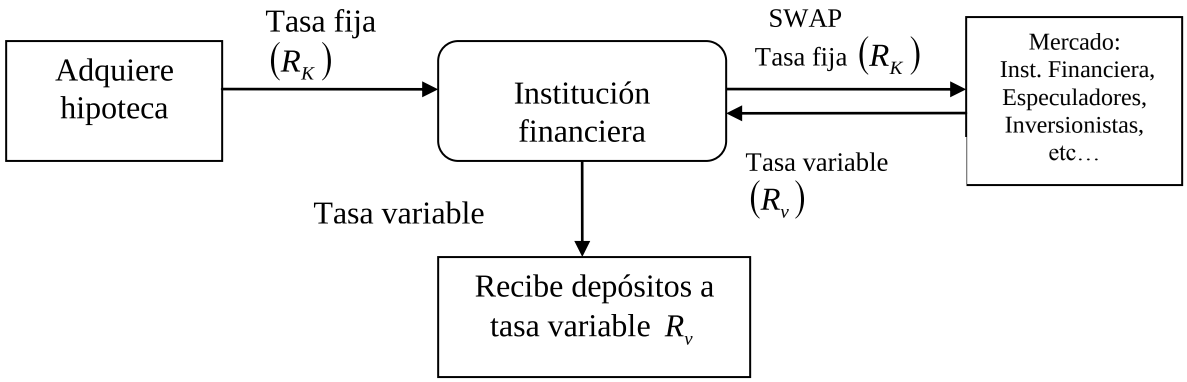


Fuente: Elaboración propia con datos de Infosel Finaciero (diciembre 2005).

4.1 Hipotecas a tasa fija

Para ofrecer una hipoteca a tasa fija, el banco puede adquirir un swap de amortización en el mercado, para cambiar la naturaleza de la tasa recibida de fija a variable, y así poder cubrir el riesgo inherente a cambios pronunciados en las tasas. Lo anterior se ilustra en el diagrama de flujo de un swap expuesto en el gráfico 8, éste muestra como al adquirir un swap, la institución financiera cambia sus flujos de fijos a variables para hacer frente a sus pasivos que son también variables.

Gráfico 8. Diagrama de flujo para un swap de tasa de interés.



En el diagrama anterior se observa como la institución transfiere su riesgo de tasas a un tercero en el mercado, a través de la firma de un contrato de swap de tasa de interés.

En la tabla 3 se describen los términos de las hipotecas a tasa fija ofrecidas por Banamex e IXE, como se muestra la tasa fija que ofrecen a un plazo de 15 años es de 11.75% y 12.5% respectivamente, el monto total del préstamo a financiar es del 80%, las comisiones de apertura son de 3% y 2.5% respectivamente.

Tabla 3. Condiciones de Banamex e IXE para otorgar hipotecas

INSTITUCIÓN FINANCIERA	BANAMEX	IXE
Plazo	15 años	15 años
Tasa de interés	11.75%	12.5%
Monto del crédito	10,000,000	10,000,000
Porcentaje a financiar	80%	80%
Comisión de apertura	3%	2.5%

Fuente: Página web de las respectivas instituciones financieras.

El swap de amortización se valuó a través de un portafolio de *FRA*s, con valores nocionales escalados para reflejar los flujos de pagos de una hipoteca de tasa fija y pagos mensuales fijos[28], su duración es de 15 años con intercambios mensuales, lo que da un total de 180 intercambios. La tasa del swap de amortización que se obtuvo fue del 8.426%; esto es el costo de fondeo en el mercado de la hipoteca para el banco.

Al observar las condiciones bajo las cuales Banamex ofrece hipotecas (tabla 3), para un plazo de 15 años, la tasa fija que debe pagar el cliente es del 11.75%, la comisión de apertura es del 3%. Tomando en cuenta lo anterior, el banco obtiene una tasa interna de retorno del 13.2% por su inversión en hipotecas. Así Banamex puede ingresar a un contrato de swap de amortización por un período igual al de la hipoteca (15 años), donde mensualmente intercambia un flujo de tasa fijo por uno variable. La tasa que recibe Banamex del cliente es 13.2%, y la tasa fija (tasa del swap) que intercambia por tasa variable es del 8.426%; entonces el margen bruto obtenido por el banco se estima en 4.78%. El margen neto dependerá de los costos de operación en los que incurra el banco al otorgar hipotecas, entre más eficiente sea el banco su margen neto será mayor.

En el caso de IXE, el banco entra en un contrato de swap de amortización, transfiere su riesgo de tasa de interés a un tercero en el mercado, y recibe tasa variable igual a su costo de fondeo en el mercado. La tasa fija del swap obtenida es de 8.429%. Por otra parte, la tasa interna de retorno que obtiene IXE al otorgar la hipoteca, tomando en cuenta el costo de apertura del 2.5%, y una tasa fija de 12.5%, es de 13.92%. IXE obtiene un margen bruto de 5.49% mensual a tasa anualizada, que es la diferencia entre lo que recibe del cliente

[28] Los flujos de pagos pueden consultarse en el anexo 2.

(12.5%) y lo que paga por el swap (8.426%). Como se mencionó el margen neto depende de la eficiencia de cada banco.

Utilizando un derivado, en este caso un contrato de swap de amortización, las instituciones financieras pueden otorgar hipotecas a tasa fija, sin el riesgo inherente de movimientos pronunciados en las tasas de interés, esto ya que el derivado les permite transferir este tipo de riesgo a un tercero (institución financiera, especulador, inversionista, entre otros); además obtienen un margen bruto, que en el caso de Banamex e IXE es de 4.8% y 5.5% mensual a tasa anualizada respectivamente. De los resultados obtenidos no puede concluirse directamente que es más rentable para IXE que para Banamex el invertir en hipotecas de este tipo, ya que solo conocemos el margen bruto; es factible que los gastos de operación de IXE sean de tal magnitud que Banamex tenga un margen neto mayor a IXE.

4.2 Hipotecas a tasa variable con tope.

En las hipotecas a tasa variable con tope, el interés mensual que debe pagar el cliente es el menor de dos tasas: 1) la tasa variable definida por al institución financiera, y 2) la tasa tope. Como se explicó en la ecuación (3.0), la institución financiera recibe sobre un nocional la tasa que sea menor entre la fija y la variable, lo anterior se ilustra a través de un ejemplo en el gráfico 5.

Las dos instituciones utilizadas para el análisis son Banamex y Bancomer, las condiciones que estas ofrecen para otorgar una hipoteca variable con tope son las siguientes:

Tabla 4. Condiciones de Banamex y Bancomer para otorgar hipotecas

INSTITUCIÓN FINANCIERA	BANAMEX	BANCOMER
Plazo	15 años	15 años
Tasa de interés	TIIE+5%, con tope de 18%	TIIE+4% con tope de 17%
Monto del crédito	10,000,000	10,000,000
Porcentaje a financiar	80%	80%
Comisión de apertura	2%	3.5%

Fuente: Página web de las respectivas instituciones financieras

Al analizar una hipoteca a tasa variable con tope, se tienen dos alternativas como se vio en las ecuaciones (3.1) y (3.2), hacer uso de un *floor* o de un *cap*. Por simplicidad lo que se utiliza en este análisis es un *floor*. Dicho lo anterior, al otorgar una hipoteca de este tipo, es como si el banco otorgara al cliente una hipoteca a tasa fija y además adquiriera para él un *floor* (en éste hay un flujo positivo si la tasa variable es mayor a la tasa tope). Los métodos para valuar los *floorlets* utilizados fueron el de Black, y el de Hull-White.

El primer caso que se analiza es el de Banamex, como se muestra en la tabla 4, para un plazo de 15 años y un monto de $10,000,000, la tasa que debe pagarse es de TIIE+5% con un tope del 18%, la comisión de apertura pagada es del 2%.[29]

Los precios del *floor* obtenidos con ambos métodos se muestran en la tabla 5.

[29] La volatilidad que se utilizó para la totalidad de los cálculos, se obtuvo de una serie histórica de 2000 a la fecha de la TIIE de 28 días, fue de 2%.

Tabla 5. Costo del *floor* adquirido por Banamex

	BLACK	HULL-WHITE
Costo *floor*	$1,949,511	$2,324,798

Tomando en cuenta lo que recibe Banamex del cliente cada mes e incluyendo el costo de adquirir el *floor* adecuado, la tasa interna de retorno que obtendría Banamex por otorgar una hipoteca a tasa variable con tope con las condiciones actuales que ofrece es del 13.86% de acuerdo al método de Black, y de un 12.88% de acuerdo a Hull-White (los cálculos pueden consultarse en el anexo 3). Si Banamex en lugar de invertir en una hipoteca de tasa variable con tope, invirtiera sus recursos a la tasa swap equivalente en el mercado, su retorno sería de 8.55%. El margen bruto para Banamex de la inversión en una hipoteca con tope es de 5.3% o 4.32% de acuerdo al método de valuación, en cualquier caso vemos que éste es positivo. Entonces es más rentable para Banamex invertir su capital en hipotecas que en depósitos a tasa variable TIIE, a menos que al otorgar hipotecas incurra en gastos de operación que sean mayores a su margen bruto, si estos son iguales sería indistinto entre invertir en una u otra opción. También deberá tomarse en cuenta el riesgo crédito, aunque este sea bajo.[30]

En el caso de Bancomer, como se mostró antes, la tasa a pagar en la hipoteca para un plazo de 15 años es de TIIE+4% con tope de 17%. En la tabla 6 se muestran los costos del *floor*.

[30] El riesgo crédito es bajo debido a que esta controlado por el banco, aparte de tener la posibilidad de confiscar el bien raíz, el pago inicial que da el cliente, es un incentivo para que el éste no deje de pagar su deuda o perdería dicho monto.

Tabla 6. Costo del *floor* para Bancomer

	BLACK	**HULL-WHITE**
Costo *floor*	$1,982,649	$2,367,325

La tasa interna de retorno que obtendría Bancomer por una inversión en este tipo de hipoteca es del 13.29% anual de acuerdo a Black y del 12.31% anual de acuerdo a Hull-White; al compararlo con la tasa swap en el mercado (referenciada a la TIIE), hay un diferencial del 4.74% y 3.76% respectivamente, el margen bruto es positivo, y nuevamente si los costos de operación no son mayores a éste, es más rentable para la institución financiera invertir su capital en hipotecas que a tasa variable TIIE.

Al comparar los rendimientos para ambas instituciones financieras, el resultado es el esperado, Bancomer que ofrece mejores condiciones a sus clientes (TIIE+4% con tope 17%) que Banamex (TIIE+5% con tope 18%), a su vez obtiene un margen bruto 0.6% menor.

5 CONCLUSIONES

Se analizó la estructura detrás de las hipotecas a tasa fija, y las de tasa variable con tope. La estructura que hay detrás de una hipoteca a tasa fija, no es más que un swap de amortización, mientras que detrás de una a tasa variable con tope hay una opción de tipo *floor*.

Es posible que actualmente una institución financiera no solo otorgue hipotecas a tasa variable, aumentando sus opciones básicamente a dos tipos distintos, hipotecas a tasa fija e hipotecas a tasa variable con tope; ya que el aumento de los plazos de la deuda soberana mexicana, ha contribuido al desarrollo de un mercado de derivados financieros.

Un contrato de swap de amortización, permite a la institución financiera otorgar una hipoteca a tasa fija, librándose del riesgo inherente a cambios bruscos o inesperados en las tasas. Por otra parte, un conjunto de opciones de tipo *floor* o *cap*, actúan como seguros que protegen de un alza inesperada en las tasas por encima de una tasa tope preestablecida. Es así como por medio de los derivados financieros antes mencionados, ha aumentado el tipo de hipotecas ofrecidas en el mercado.

En las tablas 7 y 8 se muestra el resumen de resultados obtenidos en el análisis del capítulo anterior.

Tabla 7. Resumen de resultados hipotecas a tasa fija

	Tasa Swap	TIR*	Margen Bruto
Banamex	8.426%	13.20%	4.78%
IXE	8.429%	13.92%	5.49%

*La tasa interna de retorno que obtiene el banco por el pago de la hipoteca, realizado por el cliente.

Tabla 8. Resumen de resultados hipotecas a tasa variable con tope

	Black		Hull-White	
	TIR	Margen Bruto*	TIR	Margen Bruto*
Banamex	13.86%	5.30%	12.88%	4.32%
Bancomer	13.29%	4.74%	12.31%	3.76%

*Margen bruto de rendimiento entre una inversión en hipoteca y una inversión a tasa variable TIIE.

En el caso de una hipoteca a tasa fija, la tasa del swap de amortización obtenida fue de 8.426% y 8.429% (tabla 7), para Banamex e IXE respectivamente; lo que les da un margen bruto de 4.78% y 5.49%, el margen neto que obtengan por invertir en hipotecas dependerá de sus costos de operación.

En lo que se refiere a hipotecas a tasa variable con tope, Banamex obtiene un margen bruto de 5.3% o 4.32% (tabla 8) dependiendo del modelo utilizado; mientras que Bancomer obtiene un margen bruto de 4.74% o 3.76%. En ambos casos el margen bruto es positivo, el margen neto será también positivo si los costos de operación no exceden el mismo.

La decisión de los bancos de invertir sus recursos en hipotecas o en otra clase de activos, depende de la rentabilidad de cada proyecto. En esta tesina se cubren dos posibilidades, inversiones en hipotecas o inversiones en tasa variable TIIE, se obtiene el margen bruto por la inversión en hipotecas; sin embargo, no es posible dilucidar el margen neto en este ejercicio, debido a que no se tiene información disponible de los gastos de operación de los bancos.

Considerando los resultados obtenidos, para el banco no hay una diferencia significativa entre el margen bruto que obtendría con uno u otro tipo de hipoteca; en el caso de Banamex la diferencia es tan solo del 0.5% anual. Es decir, para el banco no es muy distinto un tipo de hipoteca a otro, el rendimiento es casi el mismo, la diferencia significativa es para el cliente, ya que éste puede elegir entre un número mayor de opciones. El banco puede cubrir distintos perfiles de clientes; es previsible que un cliente más adverso al riego que otro prefiera una hipoteca a tasa fija para asegurar el monto del total de sus pagos desde el inició, mientras que el menos adverso se inclinaría por la hipoteca a tasa variable con tope, que pudiera beneficiarle si las tasas se redujeran en el futuro.

Anexo 1.

Volumen promedio semanal de comercialización de acuerdo al tamaño de empresa (en número de intercambios promedio semanal por empresa).

Empresas grandes				**Empresas medianas**				**Empresas chicas**			
2001	**2002**	**2003**	**2004**	**2001**	**2002**	**2003**	**2004**	**2001**	**2002**	**2003**	**2004**
117	122	106	120	39	40	61	47	7	18	12	12
571	657	561	749	96	94	127	134	30	24	32	33
241	85	122	141	16	21	19	26	7	6	8	12
89	97	126	162	13	17	18	25	5	8	8	6
1018	961	915	1172	164	172	225	232	49	56	60	63

Fuente: *ISDA 2004 Operations Benchmarking Survey* en www.isda.org.

Anexo 2.

Patrón de pagos de hipoteca a tasa fija de Banamex

Pago	Intereses	Principal	Fijo Total
1	$78,333	$16,397	$94,731
2	$78,173	$16,558	$94,731
3	$78,011	$16,720	$94,731
4	$77,847	$16,884	$94,731
5	$77,682	$17,049	$94,731
6	$77,515	$17,216	$94,731
7	$77,346	$17,384	$94,731
8	$77,176	$17,555	$94,731
9	$77,004	$17,727	$94,731
10	$76,830	$17,900	$94,731
11	$76,655	$18,075	$94,731
12	$76,478	$18,252	$94,731
13	$76,299	$18,431	$94,731
14	$76,119	$18,612	$94,731
15	$75,937	$18,794	$94,731
16	$75,753	$18,978	$94,731
17	$75,567	$19,164	$94,731
18	$75,379	$19,351	$94,731
19	$75,190	$19,541	$94,731
20	$74,998	$19,732	$94,731
21	$74,805	$19,925	$94,731
22	$74,610	$20,120	$94,731
23	$74,413	$20,317	$94,731
24	$74,214	$20,516	$94,731
25	$74,013	$20,717	$94,731
26	$73,810	$20,920	$94,731
27	$73,606	$21,125	$94,731
28	$73,399	$21,332	$94,731
29	$73,190	$21,541	$94,731
30	$72,979	$21,752	$94,731
31	$72,766	$21,965	$94,731
32	$72,551	$22,180	$94,731
33	$72,334	$22,397	$94,731
34	$72,114	$22,616	$94,731
35	$71,893	$22,838	$94,731
36	$71,669	$23,061	$94,731
37	$71,444	$23,287	$94,731
38	$71,216	$23,515	$94,731
39	$70,985	$23,745	$94,731
40	$70,753	$23,978	$94,731
41	$70,518	$24,213	$94,731
42	$70,281	$24,450	$94,731
43	$70,041	$24,689	$94,731
44	$69,800	$24,931	$94,731
45	$69,556	$25,175	$94,731
46	$69,309	$25,421	$94,731
47	$69,060	$25,670	$94,731
48	$68,809	$25,922	$94,731
49	$68,555	$26,175	$94,731
50	$68,299	$26,432	$94,731
51	$68,040	$26,691	$94,731
52	$67,779	$26,952	$94,731
53	$67,515	$27,216	$94,731
54	$67,248	$27,482	$94,731
55	$66,979	$27,751	$94,731
56	$66,707	$28,023	$94,731
57	$66,433	$28,298	$94,731
58	$66,156	$28,575	$94,731
59	$65,876	$28,854	$94,731
60	$65,594	$29,137	$94,731

Pago	Intereses	Principal	Fijo Total
61	$65,308	$29,422	$94,731
62	$65,020	$29,710	$94,731
63	$64,729	$30,001	$94,731
64	$64,435	$30,295	$94,731
65	$64,139	$30,592	$94,731
66	$63,839	$30,891	$94,731
67	$63,537	$31,194	$94,731
68	$63,231	$31,499	$94,731
69	$62,923	$31,808	$94,731
70	$62,612	$32,119	$94,731
71	$62,297	$32,434	$94,731
72	$61,979	$32,751	$94,731
73	$61,659	$33,072	$94,731
74	$61,335	$33,396	$94,731
75	$61,008	$33,723	$94,731
76	$60,678	$34,053	$94,731
77	$60,344	$34,386	$94,731
78	$60,008	$34,723	$94,731
79	$59,668	$35,063	$94,731
80	$59,324	$35,406	$94,731
81	$58,978	$35,753	$94,731
82	$58,627	$36,103	$94,731
83	$58,274	$36,457	$94,731
84	$57,917	$36,813	$94,731
85	$57,557	$37,174	$94,731
86	$57,193	$37,538	$94,731
87	$56,825	$37,906	$94,731
88	$56,454	$38,277	$94,731
89	$56,079	$38,651	$94,731
90	$55,701	$39,030	$94,731
91	$55,318	$39,412	$94,731
92	$54,933	$39,798	$94,731
93	$54,543	$40,188	$94,731
94	$54,149	$40,581	$94,731
95	$53,752	$40,979	$94,731
96	$53,351	$41,380	$94,731
97	$52,946	$41,785	$94,731
98	$52,536	$42,194	$94,731
99	$52,123	$42,607	$94,731
100	$51,706	$43,024	$94,731
101	$51,285	$43,446	$94,731
102	$50,859	$43,871	$94,731
103	$50,430	$44,301	$94,731
104	$49,996	$44,735	$94,731
105	$49,558	$45,173	$94,731
106	$49,116	$45,615	$94,731
107	$48,669	$46,061	$94,731
108	$48,218	$46,513	$94,731
109	$47,763	$46,968	$94,731
110	$47,303	$47,428	$94,731
111	$46,838	$47,892	$94,731
112	$46,369	$48,361	$94,731
113	$45,896	$48,835	$94,731
114	$45,418	$49,313	$94,731
115	$44,935	$49,796	$94,731
116	$44,447	$50,283	$94,731
117	$43,955	$50,776	$94,731
118	$43,458	$51,273	$94,731
119	$42,956	$51,775	$94,731
120	$42,449	$52,282	$94,731

Pago	Intereses	Principal	Fijo Total
121	$41,937	$52,794	$94,731
122	$41,420	$53,311	$94,731
123	$40,898	$53,833	$94,731
124	$40,371	$54,360	$94,731
125	$39,838	$54,892	$94,731
126	$39,301	$55,430	$94,731
127	$38,758	$55,972	$94,731
128	$38,210	$56,520	$94,731
129	$37,657	$57,074	$94,731
130	$37,098	$57,633	$94,731
131	$36,533	$58,197	$94,731
132	$35,964	$58,767	$94,731
133	$35,388	$59,342	$94,731
134	$34,807	$59,923	$94,731
135	$34,220	$60,510	$94,731
136	$33,628	$61,103	$94,731
137	$33,030	$61,701	$94,731
138	$32,425	$62,305	$94,731
139	$31,815	$62,915	$94,731
140	$31,199	$63,531	$94,731
141	$30,577	$64,153	$94,731
142	$29,949	$64,781	$94,731
143	$29,315	$65,416	$94,731
144	$28,674	$66,056	$94,731
145	$28,027	$66,703	$94,731
146	$27,374	$67,356	$94,731
147	$26,715	$68,016	$94,731
148	$26,049	$68,682	$94,731
149	$25,376	$69,354	$94,731
150	$24,697	$70,033	$94,731
151	$24,011	$70,719	$94,731
152	$23,319	$71,412	$94,731
153	$22,620	$72,111	$94,731
154	$21,914	$72,817	$94,731
155	$21,201	$73,530	$94,731
156	$20,481	$74,250	$94,731
157	$19,754	$74,977	$94,731
158	$19,020	$75,711	$94,731
159	$18,278	$76,452	$94,731
160	$17,530	$77,201	$94,731
161	$16,774	$77,957	$94,731
162	$16,010	$78,720	$94,731
163	$15,240	$79,491	$94,731
164	$14,461	$80,269	$94,731
165	$13,675	$81,055	$94,731
166	$12,882	$81,849	$94,731
167	$12,080	$82,650	$94,731
168	$11,271	$83,460	$94,731
169	$10,454	$84,277	$94,731
170	$9,628	$85,102	$94,731
171	$8,795	$85,935	$94,731
172	$7,954	$86,777	$94,731
173	$7,104	$87,627	$94,731
174	$6,246	$88,485	$94,731
175	$5,380	$89,351	$94,731
176	$4,505	$90,226	$94,731
177	$3,621	$91,109	$94,731
178	$2,729	$92,001	$94,731
179	$1,828	$92,902	$94,731
180	$919	$93,812	$94,731

Anexo 3.

Flujos utilizados para el cálculo de la TIR para Banamex.

En el flujo fijo negativo inicial, se incluye además del préstamo, el valor del *floor* adquirido.

Flujos	Modelo Black	Modelo Hull-White
0	-9,949,511	-10,324,798
1	168556	168556
2	167872	167872
3	167189	167189
4	166506	166506
5	165822	165822
6	165139	165139
7	164456	164456
8	163772	163772
9	163089	163089
10	162406	162406
11	161722	161722
12	161039	161039
13	160356	160356
14	159672	159672
15	158989	158989
16	158306	158306
17	157622	157622
18	156939	156939
19	156256	156256
20	155572	155572
21	154889	154889
22	154206	154206
23	153522	153522
24	152839	152839
25	152156	152156
26	151472	151472
27	150789	150789
28	150106	150106
29	149422	149422
30	148739	148739
31	148056	148056
32	147372	147372
33	146689	146689
34	146006	146006
35	145322	145322
36	144639	144639
37	143956	143956
38	143272	143272
39	142589	142589
40	141906	141906
41	141222	141222
42	140539	140539
43	139856	139856
44	139172	139172
45	138489	138489
46	137806	137806
47	137122	137122
48	136439	136439
49	135756	135756
50	135072	135072
51	134389	134389
52	133706	133706
53	133022	133022
54	132339	132339
55	131656	131656
56	130972	130972
57	130289	130289
58	129606	129606
59	128922	128922
60	128239	128239
61	127556	127556
62	126872	126872
63	126189	126189
64	125506	125506
65	124822	124822
66	124139	124139
67	123456	123456
68	122772	122772
69	122089	122089
70	121406	121406
71	120722	120722
72	120039	120039
73	119356	119356
74	118672	118672
75	117989	117989
76	117306	117306
77	116622	116622
78	115939	115939
79	115256	115256
80	114572	114572
81	113889	113889
82	113206	113206
83	112522	112522
84	111839	111839
85	111156	111156
86	110472	110472
87	109789	109789
88	109106	109106
89	108422	108422
90	107739	107739
91	107056	107056
92	106372	106372
93	105689	105689
94	105006	105006
95	104322	104322
96	103639	103639
97	102956	102956
98	102272	102272
99	101589	101589
100	100906	100906
101	100222	100222
102	99539	99539
103	98856	98856
104	98172	98172
105	97489	97489
106	96806	96806
107	96122	96122
108	95439	95439
109	94756	94756
110	94072	94072
111	93389	93389
112	92706	92706
113	92022	92022
114	91339	91339
115	90656	90656
116	89972	89972
117	89289	89289
118	88606	88606
119	87922	87922
120	87239	87239
121	86556	86556
122	85872	85872
123	85189	85189
124	84506	84506
125	83822	83822
126	83139	83139
127	82456	82456
128	81772	81772
129	81089	81089
130	80406	80406
131	79722	79722
132	79039	79039
133	78356	78356
134	77672	77672
135	76989	76989
136	76306	76306
137	75622	75622
138	74939	74939
139	74256	74256
140	73572	73572
141	72889	72889
142	72206	72206
143	71522	71522
144	70839	70839
145	70156	70156
146	69472	69472
147	68789	68789
148	68106	68106
149	67422	67422
150	66739	66739
151	66056	66056
152	65372	65372
153	64689	64689
154	64006	64006
155	63322	63322
156	62639	62639
157	61956	61956
158	61272	61272
159	60589	60589
160	59906	59906
161	59222	59222
162	58539	58539
163	57856	57856
164	57172	57172
165	56489	56489
166	55806	55806
167	55122	55122
168	54439	54439
169	53756	53756
170	53072	53072
171	52389	52389
172	51706	51706
173	51022	51022
174	50339	50339
175	49656	49656
176	48972	48972
177	48289	48289
178	47606	47606
179	46922	46922
180	46239	46239

Bibliografía

Black, Fisher. (1976),"The pricing of Commodity Contracts", Journal of Financial Economics, 3, (January/March), 167-79.

Chicago Mercantil Exchange, http://www.cme.com/.

Cox, J.C; Ingresoll, J. E.; y Ross. (1985), "A theory of the Term Structure of Interest Rates", *Econometrica*, 53, 2 (March), pp- 385-407.

Futures Industry Association, http://www.futuresindustry.org/.

Hull, C. John. (2003), Options, *Futures and Other Derivatives*, 5th edition, Prentice hall, New Jersey.

Hull, C. J. y Alan White. (1990), "Pricing Interest-Rate-Derivative Securities", Review of Financial Studies, 3, 4, pp. 573-92.

Ho, T. S. y Sang-Bin Lee. (1986), "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims", Journal of Finance, 16, 5 (December), pp. 1011-29.

Kau, J. B.; Keenan, D.C; Muller III, W. J.; y Epperson, J.F. (1993), “Options Theory and Floating-Rate Securities with a Comparison of Adjustable-and Fixed-Rate Mortgages”, *The Journal of Business,* 66, 4 (October), pp. 595-618.

Mercado Mexicano de Derivados, http://www.mexder.com.mx/MEX/paginaprincipal.html.

Nielsen, Lars. (1999), Pricing and Hedging of Derivative Securities, Oxford University Press, Oxford.

Poitras, Geoffrey. (2002). *Risk management, speculation and other derivative securities*, Academic Press, USA.

Vasiceck, Oldrich. (1977), “An equilibrium characterization of the term Structure”, Journal of Financial Economics, 5, 2, (November), pp. 177-88.