CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DOCENCIA ECONÓMICAS, A.C.

DISCRIMINACIÓN DE SEGUNDO GRADO DE BIENES INDIVISIBLES EN REDES CON EXTERNALIDADES POSITIVAS

T E S I N A

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN ECONOMÍA

P R E S E N T A

OSCAR SAMUEL GONZÁLEZ GUERRA

DIRECTOR DE LA TESINA:
DR. JUAN DE DIOS ENRIQUE ROSELLÓN DÍAZ

MÉXICO, D.F. JUNIO 2015

A mis padres.

Agradecimientos

A mis padres, a quienes les debo todo lo que soy

A mis abuelos, que sin importar la distancia, siguen siendo mis segundos padres.

A Mayarak, por su cariño y aliento incondicional en momentos difíciles.

Al Dr. Juan Rosellón, por creer en mí e incluirme en sus proyectos.

Al Dr. Antonio Jiménez y Dr. Kaniska Dam por sus comentarios y retroalimentación en la creación de este trabajo.

Al Dr. Enrique Garza, por procurar e impulsar mi crecimiento.

A George Arzeno, porque sin él esta tesis jamás hubiera sido escrita.

A mi familia, amigos y todos aquellos que influyeron, aunque sea un poco, en mi experiencia durante los últimos cuatro años.

Índice general

Índice de figuras

Capítulo 1

Introducción

Durante la última década, el mundo ha presenciado el surgimiento de aplicaciones tecnológicas que engloban gran parte de la población mundial. Sin duda, los principales activos de estas redes sociales son los ciclos virtuosos que surgen de las externalidades positivas de red y que fomentan la interacción entre los usuarios y sus vecinos (amigos). Estas compañías son difíciles de valuar desde la perspectiva financiera debido a la incertidumbre de sus flujos de efectivo futuros. [1] Debido a que las políticas de precio determinan gran parte del potencial de crecimiento y los flujos de ingresos presentes y futuros de estas compañías, es de gran importancia establecer las bases de una teoría que presente cómo se deberían tomar estas decisiones. Las preguntas que se buscan responder en este trabajo son: para una empresa ya consolidada, ¿bajo qué condiciones debería ofrecer un esquema de precios de menú (discriminación de segundo grado)? Asimismo, ¿cuál es el precio fijo de monopolio que debería ofrecer la empresa a sus clientes para que se autoseleccionen y maximizar beneficios?

El modelo usado es una extensión del análisis estándar de discriminación de segundo grado expuesto por Bagnoli, Salant, y Swierzbinski (1989). Se asumirá una red social de agentes y una empresa única que provee una aplicación tecnológica. Esta empresa se debate entre la

[1] Muchas de estas aplicaciones realizan las ofertas públicas iniciales (IPOs) más grandes de los últimos años sin jamás haber reportado utilidades. En el año 2014, 71 % del total de IPOs en Estados Unidos fueron de empresas que reportaron pérdidas. Este porcentaje sólo es comparable con cifras pre burbuja *dot com*. Información de Ritter y Welch (2002).

posibilidad de cargar un precio único a cada usuario por el uso de la red o de introducir dos versiones de su aplicación, una con publicidad y otra sin publicidad con una tarifa fija de uso. Es decir, la primera es un precio uniforme por el uso de la red y la segunda una política de discriminación de segundo grado donde se le da la posibilidad a los agentes de autoseleccionarse. El rasgo analítico distintivo de este problema es que el daño del bien (grado de molestia generada por la publicidad), también deriva en beneficios para la empresa en un contexto de red con externalidades positivas. Dado lo anterior, el problema debe ser tratado de manera distinta a la discriminación por medio del daño de productos o de segundo grado, como se reconoce en la literatura económica.

Una consideración central en el diseño del modelo es la existencia de una condición de *single crossing* en las funciones de utilidad de los agentes con respecto a la publicidad. Intuitivamente esta condición implica que la diferencia en utilidad entre usar la aplicación sin publicidad y con publicidad es creciente conforme aumente el número de amigos o conexiones en la red. Esto último se podría interpretar como una restricción por uso de la red, debido a que en el modelo sólo se determina el uso de la misma de manera dicotómica. En otras palabras, la restricción de *single crossing* sostiene que si un individuo tiene más amigos efectivos en la red, este pasará más tiempo usando la aplicación. Como resultado, la desutilidad de observar publicidad será mayor.

Con base en la literatura propia de los modelos de regulación, el presente modelo se podría interpretar como un juego principal-agente donde existe un único principal dueño de la red y múltiples agentes ligados entre sí. En un inicio, el principal elige entre implementar una política de precio único o una política de discriminación de segundo grado. Posteriormente, considera restricciones de participación y de compatibilidad de incentivos de los agentes para crear un menú de contratos (aplicación con o sin publicidad) con el objetivo de que, simultáneamente, determinen 1) si permanecen en la red y 2) cuál contrato adquirir.

En el proceso anterior, ambas partes tienen un *prior* sobre la estructura de la red y, al final, los pagos son realizados. La razón por la que se asume que el principal y los agentes tienen un *prior* de la red es que, dado el modelo, la solución no requiere supuestos informacionales tan fuertes. Mientras que es factible asumir que el principal tiene una representación exacta del grafo, sería imposible seguir el mismo argumento con los agentes finales cuando ellos sólo observan sus conexiones directas. Si se supone que el monopolista cuenta con información perfecta con relación a la estructura del grafo y las conexiones de cada agente, este podría computacionalmente determinar un esquema de discriminación perfecta. El presente trabajo busca crear un sistema de incentivos para la auto-discriminación sin considerar la discriminación de primer ni tercer grado. Esto debido a que estas últimas ya han sido analizadas extensamente en la literatura y porque lo que se observa en la realidad es que las empresas ofrecen opciones de producto y no imponen precios.

El objetivo central del trabajo es caracterizar cuándo es beneficioso para un monopolista introducir un esquema de precios no lineales con base en un modelo estilizado que asume, por un lado, un bien indivisible (o servicio) y, por el otro, que las decisiones de los agentes, relacionado con permanecer o no en la red, tienen un efecto directo en la utilidad de sus vecinos. Se derivan condiciones para la existencia de un esquema de precios de menú óptimo, en un modelo de grafo Erdös Renyi, con base en dos supuestos: 1) que la empresa y los agentes conocen el proceso de generación del grafo; 2) que los consumidores tienen funciones de utilidad homogéneas y bien comportadas. El primer supuesto puede ser debatido en contextos donde la interacción entre usuarios es endógena al modelo, es decir, donde los individuos deciden con quién crear un conexión o "amistad". Lo anterior está presente en la gran mayoría de las redes sociales; como Facebook, Twitter, entre otros. No obstante, nuevas aplicaciones han surgido en un contexto de interacción aleatoria con la red. Tomemos como ejemplo la red de transporte Waze, donde los usuarios no deciden interactuar con ciertas personas de manera endógena, sino que al iniciar la aplicación reciben retroalimentación de manera cuasi-aleatoria por los individuos que hayan tomado rutas parecidas a las que el individuo desee tomar. Este proceso aleatorio podría ser simulado, en su expresión más simple, como un grafo aleatorio al estilo de Erdös Renyi.

El resultado central del trabajo es que la posibilidad de ofrecer un precio aunado a la opción de publicidad (un menú de contratos) es sostenible si y sólo si existe un subconjunto de consumidores tal que la desutilidad de observar publicidad sea mayor al beneficio marginal de la empresa por los mismos. Sin embargo, probar que es sostenible no implica que es óptimo, por lo que se obtienen condiciones para mostrar, dependiendo del proceso generador de la red y de las funciones de utilidad de los agentes, cuándo es óptimo realizar una discriminación de segundo grado. El resultado se obtuvo para una propuesta específica de distribución de grado y de funciones de utilidad de los agentes.

Capítulo 2

Literatura Relacionada

El objetivo central del trabajo es caracterizar cuándo es beneficioso para un monopolista introducir un esquema de precios no lineal bajo el supuesto de indivisibilidad del bien y de la existencia de una red de externalidades positivas en el consumo. Las características fundamentales de este problema ya han sido tratadas por la literatura existente, aunque nunca se ha hecho de manera conjunta. Con la intención de clarificar el problema, este se puede dividir en las siguientes tres áreas propias de la Economía:

1. Selección adversa y discriminación de segundo grado
2. Bienes maltratados
3. Redes y externalidades

2.1. Selección adversa y discriminación de segundo grado

El concepto de selección adversa se utiliza en este trabajo porque el monopolista busca que los agentes se auto-discriminen ya sea por razones regulatorias, informacionales o de costumbre en la industria. Los agentes tienen mejor conocimiento del bien que el monopolista, por lo que buscarán maximizar sus beneficios por permanecer (o no) en la red dependiendo de los contratos creados por la empresa. Ahora bien, el trabajo de Bagnoli y cols. (1989) es uno de los pilares de la literatura sobre discriminación de segundo grado. El autor asume la existencia de dos tipos de consumidores exógenos. Los principales resultados que se pueden extraer son los argumentos bajo los cuales las restricciones de compatibilidad de incentivos y racionalidad se encuentran activas. Asimismo, el trabajo mencionado anteriormente es uno de los principales artículos en los que se basa el modelo presentado en esta tesina. La razón de lo anterior es que la característica de indivisibilidad de bienes adoptada en su trabajo es el fundamento central del modelo aquí presentado.

2.2. Bienes maltratados

Aunque el principal problema que se buscará resolver en el presente trabajo se relaciona con precios no lineales, también existe un vínculo con la literatura de "bienes maltratados". Como veremos, la existencia de agentes con preferencias marginales heterogéneas sobre la publicidad mostrada en una aplicación es una condición necesaria para implementar un esquema de precios de menú. Por medio de la unión entre la discriminación sobre cantidad y calidad (y posteriormente tiempo) se puede argumentar desde la perspectiva de Organización Industrial la existencia de empresas produciendo bienes con calidad sub-óptima o deliberadamente maltratando un bien. La existencia de un bien sustituto con calidad menor da la posibilidad al productor de vender el producto a aquellos consumidores que no lo valoran tanto sin disminuir demasiado la demanda del producto de mejor calidad. Deneckere y Preston McAfee (1996), quienes incursionaron en el concepto, probaron que la discriminación derivada del maltrato de un bien puede llegar a ser una mejora de Pareto estricta.

2.3. Redes y externalidades

Si bien en la literatura no existen, a consideración del autor, estudios relacionados a precios de menú en redes con externalidades positivas en el consumo, en las últimas décadas se han presentado grandes avances en otros tipos de discriminación (primer y tercer grado) con relación a conceptos de centralidad dentro de la red. El primer trabajo en la literatura que trata de atacar el problema de precios sobre redes es Katz y Shapiro (1985). Este estudio fue un parteaguas debido al planteamiento de un modelo formal para capturar la interacción de la competencia de empresas sobre redes con externalidades positivas. Este fue el fundamento de muchos avances asociados al tema en áreas como Ciencias Computacionales y Economía.

Con respecto al área de Ciencias Computacionales, el trabajo de Candogan, Bimpikis, y Ozdaglar (2012) se centra, desde la perspectiva de discriminación de precios, en tres temas. El primero es discriminación perfecta o discriminación de primer grado. En ese caso se obtiene que el precio para cada individuo dentro de la red se encuentra en función de su centralidad de *Bonacich* en el grafo. El segundo problema que se busca resolver es el relacionado a determinar un precio único de monopolio. Este no se puede resolver de manera analítica, por lo tanto, se plantea un algoritmo que lo resuelve en tiempo polinomial. Por último, también se trata de resolver la discriminación óptima de tercer grado para el monopolista. Esto se busca para sólo dos niveles de precios: precio "alto" y precio "bajo". Este problema se demuestra que es *NP-hard*.

Mucho más apegado a la Economía se encuentra Bloch y Quérou (2008), quienes consideran dos tipos de externalidades de red: en el consumo y en los precios. Las externalidades en los precios se dividen a su vez en dos tipos: cuando los consumidores les importa el precio promedio cargado a sus vecinos, y cuando les afecta la suma de los precios a sus vecinos. Utilizando una aproximación asintótica, muestra que el ranking de precios óptimos puede ser reducido a un ranking lexicográfico en función de las características de los nodos. La diferencia de este modelo y el que se busca desarrollar aquí es el planteamiento de un entorno competitivo donde existe una empresa por nodo o consumidor. Asimismo, también analiza la posibilidad de un monopolista que desea realizar una discriminación de primer grado. Los resultados son comparables a los obtenidos por Candogan y cols. (2012) con relación a la centralidad de *Bonacich*.

Afín también a la Economía se encuentra Cabral, Salant, y Woroch (1999). En este trabajo los autores buscan responder a la pregunta de: ¿cuándo es conveniente presentar un precio introductorio para un bien con externalidades positivas? El resultado es una senda de precios de equilibrio cuando un monopolista vende un bien durable, de externalidades globales positivas en el consumo, a un conjunto de consumidores racionales. La diferencia con nuestro modelo radica en los supuestos de que la red es inexistente en un inicio y que sus externalidades son globales, y no locales, en el consumo.

El trabajo más reciente en la materia y, probablemente, el de mayor relación con este estudio es el realizado por Fainmesser y Galeotti (2015). En él los autores desarrollan un marco conceptual para guiar la manera en la cual las empresas deben incorporar información sobre la influencia de los agentes en su estrategia de precios. Su análisis se enfoca en las implicaciones sobre el excedente del consumidor y en los beneficios del productor. Asimismo, el modelo tiene la ventaja de que su análisis y resultados pueden extenderse al caso con externalidades negativas (sustitutos estratégicos) de red. Si bien este es uno de los trabajos más completos en la materia, su enfoque, al igual que el de Candogan y cols. (2012), es el de discriminación de tercer grado. Es decir, la empresa cuenta con información de la interacción entre los agentes y discrimina en función del grado de influencia, susceptibilidad o ambos.

La literatura económica enfocada a la discriminación de precios en bienes con externalidades positivas de red es relativamente reciente; no obstante, como se ha mostrado en este apartado, se encuentra en desarrollo. La carencia de un análisis de discriminación de segundo grado en las publicaciones antes mencionadas es una de las motivaciones principales de este trabajo. El objetivo es construir sobre la literatura ya existente y proveer herramientas para que las empresas determinen bajo qué condiciones es conveniente qué política de precios para su producto.

Capítulo 3

Modelo

Este apartado se divide en cinco secciones. En la primera se realiza una breve descripción del modelo. La segunda y tercera sección especifican las funciones de beneficios del monopolista y de utilidad de los agentes para el caso de discriminación de segundo grado y de precio único, respectivamente. En la cuarta parte se detalla la estructura de la red y la información que poseen los agentes y el monopolista sobre el proceso generador del grafo. Por último, en la quinta sección, se plantea el orden del juego.

3.1. Descripción del modelo

El modelo es una extensión del análisis estándar de discriminación de segundo grado expuesta por Bagnoli y cols. (1989). Se asumirá una red social de n agentes y una empresa única que provee una aplicación tecnológica. Esta empresa se debate entre la posibilidad de cargar un precio único a cada usuario por el uso de la red, P_u, o introducir dos versiones de su aplicación, una con α publicidad y otra sin publicidad con un costo fijo P_0 de uso. Es decir, la primera es un precio uniforme por el uso de la red y la segunda una política de discriminación de segundo grado donde se le da la posibilidad a los agentes de auto-seleccionarse. En aras de la claridad, se presentan primero las características del modelo en el caso de discriminación de segundo grado y posteriormente se describe de la misma manera el modelo acondicionado al caso de un precio único.

3.2. Discriminación de segundo grado

3.2.1. Función de beneficios del monopolio

La empresa recibe sus ingresos de dos posibles fuentes: venta de espacio de publicidad y del precio fijo que se cobra por tener acceso a la red sin publicidad. Se asume que la empresa es tomadora de espacio de publicidad. Es decir, una vez que ofrece un producto con comerciales, la cantidad de publicidad en la aplicación no es una decisión endógena en el modelo. El monopolista recibe una renta fija de $p(\alpha, N_\alpha)$ por usuario de la aplicación con publicidad, donde α es la cantidad de publicidad determinada de manera exógena y N_α es el número de usuarios observando publicidad. Es decir, bajo el supuesto anterior tenemos que $p(\alpha, N_\alpha) = p(N_\alpha)$. El ingreso por usuario para la empresa por concepto de la venta de espacio de publicidad $p(N_\alpha)$ presumiblemente es una función convexa y creciente en el número de usuarios que potencialmente podrían observar publicidad $(p' \geq 0, p'' \geq 0)$. Esto último debido a que la posibilidad de focalizar una campaña de marketing a nichos de mercado con preferencias específicas es creciente en el número de usuarios en la red. [1] Asimismo, se asume que la aplicación con publicidad es "gratis" para cualquier agente.

El monopolio puede elegir un precio P_0 que representa el costo para el agente de cambiar a la versión sin publicidad. Igualmente, se asume que los costos por el desarrollo de la aplicación son "hundidos" y, sin pérdida de generalidad, que los costos fijos de mantener la aplicación y los costos marginales de proveerla son nulos. Entonces, si suponemos que existen N_α usuarios observando publicidad y N_P usuarios pagando la tarifa fija, la función de beneficios para el caso

[1] Rossi, McCulloch, y Allenby (1996) se muestra, de manera empírica, que utilizar el historial de compras de consumidores aumenta en promedio 2.5 veces los ingresos de una campaña de marketing. Por lo tanto, mientras mayor sea el universo de consumidores de la aplicación, las empresas especializadas estarán dispuestas a pagar más por publicidad para llegar a su grupo objetivo.

de discriminación de segundo grado es igual a

$$\Pi_m = p(N_\alpha)N_\alpha + P_0 N_P$$

Como primera aproximación al modelo, supondremos en el presente trabajo que el ingreso por usuario para la empresa por concepto de la venta de espacio de publicidad es constante y normalizada a la cantidad de publicidad en la aplicación $p(N_\alpha) = \alpha$. Lo anterior nos dará la posibilidad de llegar a resultados analíticos del modelo y posteriormente generalizarlos. Es decir, los beneficios por implementación de precios de menú, Π_m, podrían ser reescritos de la siguiente forma:

$$\Pi_m = \alpha N_\alpha + P_0 N_P$$

3.2.2. Funciones de utilidad de los agentes

Se suponen funciones de utilidad homogéneas entre individuos, las cuales dependerán directamente del número de amigos o vecinos en la red. Asimismo, se asume que para un individuo que tiene θ conexiones, su función de utilidad está dada por:

$$V(\theta, \alpha, P_0) = \begin{cases} u(\theta, \alpha); & \text{con publicidad} \\ u(\theta, 0) - P_0; & \text{sin publicidad} \end{cases}$$

Donde α es la cantidad exógena de publicidad vista y P_0 la tarifa fija por tener acceso a la aplicación sin publicidad. Igualmente, se asumirán las siguientes propiedades de la función de utilidad:

(I) $u(\theta, \alpha)$ es diferenciable dos veces en θ

(II) $\partial u(\theta, x)/\partial\theta > 0$ para $x \in \{0, \alpha\}$.

(III) $\partial^2 u(\theta, x)/\partial\theta^2 \leq 0$ para $x \in \{0, \alpha\}$

(IV) $u(\theta, 0) > u(\theta, \alpha), \forall \theta \in \mathbb{N}$

(V) $u(0, \alpha) \leq 0$

(VI) Si $\theta_i > \theta_j$, entonces $u(\theta_i, 0) - u(\theta_i, \alpha) > u(\theta_j, 0) - u(\theta_j, \alpha), \quad \forall \theta_i, \theta_j \in \mathbb{N}$

De las condiciones anteriores, (I) es simplemente una condición técnica para poder hacer uso del cálculo diferencial. Con relación al punto anterior, es necesario mencionar que el número de conexiones θ pertenece a los naturales ($\theta \in \mathbb{N}$) por lo que derivar la función de utilidad no sería matemáticamente correcto; no obstante, en este trabajo relajaremos este formalismo debido a que la intuición de los resultados será la misma y facilitará radicalmente el análisis. Las condiciones (II) y (III) implican que la función de utilidad para cualquier individuo es creciente a tasas decrecientes en el número de amigos o vecinos θ, independiente de si se adquiere la aplicación con o sin comerciales. La condición (IV) nos habla de que cualquier individuo preferirá la aplicación sin publicidad que con publicidad si ambas le fueran regaladas. Esta es una suposición de suma importancia en el modelo ya que asume que la publicidad es un "mal" para todos los agentes de la red.[2] La quinta condición (V) se basa en el supuesto de externalidades positivas de red y muestra que si el individuo no cuenta con algún amigo en la red ($\theta = 0$), y esta red por sí sola no es apreciada por el agente, observar publicidad sólo le traerá desutilidad. Por último, la condición (VI) implica que, en ausencia del precio P_0, la diferencia en utilidad entre usar la aplicación sin publicidad y con publicidad es creciente conforme aumente el número de amigos o conexiones en la red. Esta última condición es también llamada *single crossing* o condición de *Spence-Mirrelees* en la literatura económica y se podría interpretar como una restricción por uso. Presumiblemente, conforme un individuo tiene más amigos utilizando la aplicación, estará más tiempo utilizándola por lo que la desutilidad de observar publicidad será mayor.

[2]Esto no es necesariamente cierto. Se podría argumentar que el grado de disgusto de una publicidad está en función del grado de focalización de la misma. Es decir, entre más focalizada sea la publicidad, mayor la probabilidad de que esta sea considerada como un bien por el consumidor. Véase Becker y Murphy (1993) para un análisis de este tema.

3.3. Precio único

3.3.1. Función de beneficios del monopolio

En este caso, el monopolista sólo recibe ingresos por medio del precio único de acceso a la red. La empresa elige un precio P_u que se cobra a todos los agentes por igual. Estos últimos tienen sólo dos posibilidades: permanecer en la red pagando la tarifa fija, o salir de ella de una vez. Al igual que en el caso de discriminación de segundo grado, se hace el supuesto de que los costos por el desarrollo de la aplicación son "hundidos" y que básicamente los costos fijos y variables son cero. Por lo tanto, una vez que el monopolista determina el precio único de acceso y los agentes que menos valoran la red salen de ella, si existen N_u usuarios pagando el precio, la función de beneficios por implementación de un precio único, π_u, es:

$$\pi_u = P_u N_u$$

3.3.2. Funciones de utilidad de los agentes

Bajo este esquema las funciones de utilidad también se asumen homogéneas entre individuos, dependiendo estas únicamente del número de conexiones del agente y del precio único que se le cargue. Asumiendo que un agente tiene θ conexiones y paga una tarifa única de acceso P_u, su función de utilidad está dada por:

$$V(\theta, P_u) = u(\theta, 0) - P_u$$

En donde la función $u(\cdot)$ cumple con las mismas condiciones de continuidad, diferenciabilidad y concavidad del apartado 3.2.2.

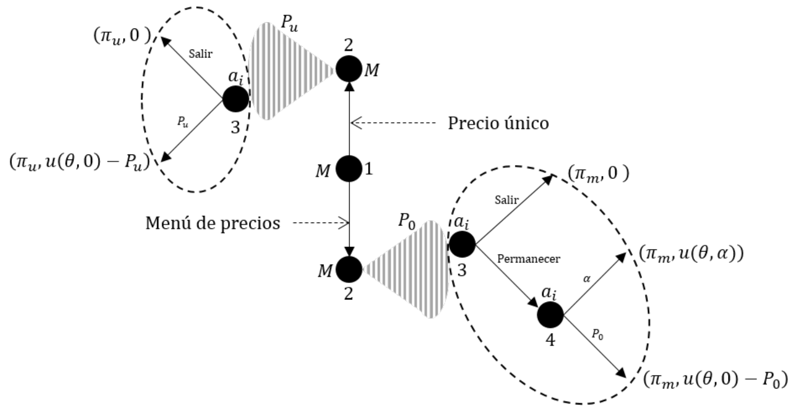
3.4. Estructura de la red

En la resolución del modelo se asume que ni el monopolio ni los individuos conocen específicamente la estructura de la red social, pero tienen un *prior* de su estructura. En particular, asumiremos que se conoce el proceso de generación de la red a manera de grafo aleatorio. Asimismo, se presupone en el análisis que la red es lo suficientemente grande como para que se aplique la ley de los grandes números.

3.5. Tiempo

El tiempo del juego es como sigue. Primero, la empresa decide si implementa una política de precio único o de precios de menú. Segundo, determina el precio por la aplicación P_u o P_0 dependiendo del caso. Posteriormente, todos los individuos pertenecientes a la red deciden simultáneamente si permanecen en la red. Consecuentemente, en el caso que el monopolista haya decidido implementar una discriminación de segundo grado, los agentes deciden si observan publicidad o si pagan la tarifa. Por último, los pagos son determinados para la empresa y cada uno de los agentes. Debido a los distintos órdenes bien definidos del juego, el concepto de equilibrio en este será de equilibrio de Nash perfecto bayesiano o secuencial. A continuación en la figura 3.1 se muestra una representación gráfica del árbol de juego, M simboliza la decisión del monopolista y a_i representa la decisión simultánea entre los n agentes.

Figura 3.1



Capítulo 4

Grafos aleatorios

La presente sección se divide en tres subsecciones. En la primera se realiza un recuento de los principales resultados del modelo de grafos aleatorios y se enfoca únicamente en los resultados necesarios para el análisis que concierne al trabajo. En la segunda sección se determina, basado en la distribución de grado derivada de un grafo aleatorio, cuál es la probabilidad de conexión entre dos nodos cualesquiera. Por último, en la tercera sección, se hace uso de los resultados de las primeras dos partes para responder qué sucede con el grado de cierto agente cuando se decide eliminar a todos los nodos con grado menor a una constante arbitraria.

4.1. Principales resultados

El siguiente recuento está basado en el modelo de grafos aleatorios de Erdös y Rényi (1960) y únicamente se enfoca en los resultados necesarios para el análisis de este trabajo. Por lo tanto, el estudio aquí mostrado, deliberadamente, no pretende ser exhaustivo.

En general, un grafo aleatorio es un modelo de red en donde un conjunto específico de parámetros toma algunos valores fijos, pero la red es aleatoria en otros aspectos. En nuestro análisis, seguiremos el procedimiento de fijar el número de nodos (individuos en nuestro contexto) y la probabilidad de unirlos por una conexión. Por lo tanto, la aleatoriedad del grafo proviene de la probabilidad independiente de unir dos nodos cualesquiera. Definimos al conjunto de grafos $G(n, p)$ como aquellos que se generan del proceso antes mencionado.

El número de grafos con exactamente n nodos y m conexiones es igual al número de maneras en las que se puede elegir las posiciones de las conexiones de las $\binom{n}{2}$ parejas de nodos distintas. Cada uno de estos grados aparece con la misma probabilidad $P(G)$. Por lo tanto, la probabilidad total de obtener un grafo de m conexiones de nuestro conjunto es:

$$P(m) = \binom{\binom{n}{2}}{m} p^m (1-p)^{\binom{n}{2}-m}$$

Por lo tanto, el valor esperado de m es igual a:

$$E[m] = \sum_{m=0}^{\binom{n}{2}} mP(m) = \binom{n}{2} p$$

Lo anterior es un resultado estándar obtenido de la distribución binomial. Es posible utilizar este resultado para calcular el valor esperado de conexiones de un nodo específico, $E[k]$, como:

$$E[k] = E\left[\frac{2m}{n}\right] = \frac{2}{n}E[m] = \frac{2}{n}\binom{n}{2} p = (n-1)p$$

Para calcular la distribución de grados de un nodo específico, $f(k)$, es necesario entender que un nodo en el grafo está conectado con probabilidad independiente p a cualquiera de los $n-1$ nodos restantes. Por lo tanto, la probabilidad de estar conectado a particularmente k nodos es igual a $p^k(1-p)^{n-1-k}$. Existen $\binom{n-1}{k}$ maneras de escoger los k nodos, por lo que la probabilidad total de estar conectado a exactamente k otros nodos es igual a:

$$f(k) = \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}$$

Debido a que apelaremos a la ley de los grandes números, $n \to \infty$, la distribución de grado binomial se puede expresar por una distribución de Poisson tal que:

$$f(k) \cong e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Donde $\lambda = np$.

4.2. Probabilidad de conexión entre dos nodos

La decisión del monopolista de implementar cualquiera de sus políticas de precio conlleva, en la gran mayoría de los escenarios, la pérdida de los agentes con menos conexiones en la red. Es por esto que un estudio minucioso del efecto en las conexiones de los agentes permanecientes en la red es de gran importancia para determinar los beneficios finales de la empresa.

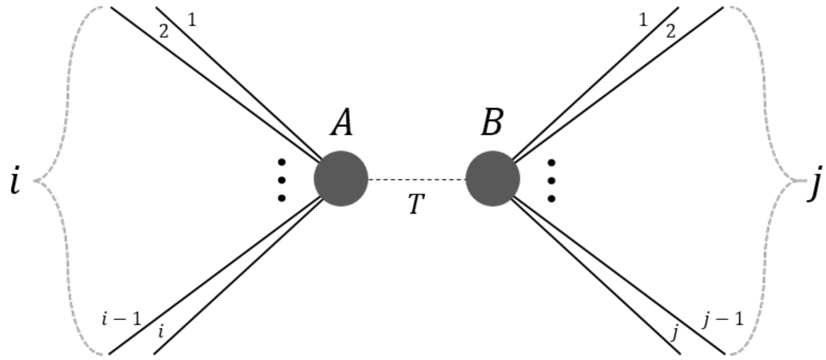
Definimos el conjunto de nodos en el grafo como Φ con $n =\mid \Phi \mid$. Nuestro primer objetivo es encontrar la probabilidad de que exista una conexión entre un nodo A con grado $i < D$ y otro nodo B con grado $j \geq D$ con $A, B \in \Phi$ y D elegido de manera discrecional. Para esto definimos una función $\{g(\varphi) : \Phi \to \mathbb{N}\}$ la cual arroja el número de conexiones de un nodo específico. Asimismo, definimos los conjuntos $M = \{\varphi \mid g(\varphi) < D, \varphi \in \Phi\}$ y M^C donde φ representa a los nodos pertenecientes a Φ y el exponente C el complemento del conjunto.

Sea T el evento de que exista una conexión entre los nodos A y B. Entonces, la probabilidad de que exista una conexión entre ambos nodos sujeto a una configuración de conexiones inicial es:

$$P[T \mid g(A) = i, g(B) = j] = \frac{P[g(A) = i, g(B) = j \mid T]P(T)}{P[g(A) = i, g(B) = j]}$$

Gráficamente el evento T se puede expresar en la figura 4.1.

Figura 4.1



Dado que se considera una red lo suficientemente grande, asumiremos que el grado de cualesquiera dos nodos es independiente entre sí, por lo tanto:

$$P[g(A) = i, g(B) = j \mid T] = P[g(A) = i-1]P[g(B) = j-1] = \left[e^{-\lambda}\frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!}\right]\left[e^{-\lambda}\frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!}\right]$$

Asimismo:

$$P[g(A) = i, g(B) = j] = P[g(A) = i]P[g(B) = j] = \left[e^{-\lambda}\frac{\lambda^{i}}{i!}\right]\left[e^{-\lambda}\frac{\lambda^{j}}{j!}\right]$$

Esto último, junto con el hecho de que la probabilidad de cualquier conexión es independiente e igual a p, $P(T) = p$, implica que:

$$P[T \mid g(A) = i, g(B) = j] = p\frac{ij}{\lambda^2} \tag{4.1}$$

4.3. Pérdida de vecinos

Ya que se obtuvo la probabilidad general de encontrar una conexión entre cualesquiera dos nodos en un grafo aleatorio, ahora nos enfocaremos en el problema de pérdida de vecinos de un nodo tras la implementación de una nueva política de precios. ¿Qué sucede con el grado de cierto agente cuando se decide eliminar a todos los individuos con grado menor a una constante D?

Con base en la ecuación (4.1), el número esperado de vecinos con grado menor a D que un nodo como B, con j grados, tiene es igual a:

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{A\in M} 1_{A-B}(A)\right] &= \sum_{A\in M} E[1_{A-B}(A)] \\ &= \sum_{A\in M} p\frac{jg(A)}{\lambda^2} \\ &= p\frac{j}{\lambda^2}\sum_{A\in M} g(A) \\ &= p\frac{j}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{D-1} i[nf(i)] \\ &= pn\frac{j}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{D-1} i\left[e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}\right] \end{aligned}$$

Donde $1_{A-B}(A)$ es la función indicador que toma el valor de 1 si el nodo $A \in M$ cuanta con una conexión con B. Si se parte del supuesto de un grafo lo suficientemente grande, $\lambda = pn \cong p(n-1)$, la ecuación se reduce a lo siguiente:

$$= j\sum_{i=1}^{D-1} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!}$$

$$= j\sum_{i=0}^{D} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{i}}{i!} = jF(D) \tag{4.2}$$

Donde $F(\cdot)$ es la función de densidad acumulada.

Utilizando la ley de los grandes números, podemos concluir que el número de vecinos que un nodo con grado j pierde, cuando los vértices de grado menor a D son borrados, está dado por la ecuación (4.2). Sea $\hat{G}(n, p, D)$ la red, o grafo, después de borrar los nodos con grado menor a D. Entonces, si un vértice B tiene grado igual a $j \quad (g(B) = j)$ en el grafo original $G(n, p)$, entonces el nodo B tiene un grado en el nuevo grafo, $\hat{g}(B)$, igual a:

$$\hat{g}(B) = j[1 - F(D)] \tag{4.3}$$

Capítulo 5

Discriminación de segundo grado o precios de menú

En este caso, debido al orden de decisiones, el juego se resolverá por inducción hacia atrás. Es por esto que primero nos centraremos en el problema de optimización del individuo para cualquier P_o. Iniciamos definiendo las restricciones de factibilidad para las dos versiones de la aplicación.

Para los N_α individuos que escogen la opción con publicidad y sin tarifa fija:

$$\begin{aligned} u(\theta,\alpha) &\geq 0 & (PC_1^m) \\ u(\theta,\alpha) &\geq u(\theta,0) - P_0 & (IC_1^m) \end{aligned}$$

Para los N_P individuos que escogen la opción sin publicidad y con tarifa fija:

$$\begin{aligned} u(\theta,0) - P_0 &\geq 0 & (PC_2^m) \\ u(\theta,0) - P_0 &\geq u(\theta,\alpha) & (IC_2^m) \end{aligned}$$

Donde (PC_i^m) y (IC_i^m) son la restricción de participación y la restricción de compatibilidad de incentivos para un segmento i bajo el esquema de menú de precios, respectivamente.

Mientras que la primera restricción garantiza que los agentes que participen se encuentren mejor consumiendo la aplicación que no haciéndolo, la segunda implica que a ningún agente le sería beneficioso mentir sobre su tipo. Definimos como θ_α el mínimo θ tal que cumple (PC_1^m) y (IC_1^m); y θ_0 como el mínimo θ tal que cumple (PC_2^m) y (IC_2^m).

Proposición 5.1. $\theta_\alpha < \theta_0$

Prueba: Por (IC_2^m), $u(\theta_0, 0) - u(\theta_0, \alpha) \geq P_0$. Asimismo por (IC_1^m), $u(\theta_\alpha, 0) - u(\theta_\alpha, \alpha) \leq P_0$. Por lo tanto, $u(\theta_0, 0) - u(\theta_0, \alpha) \geq u(\theta_\alpha, 0) - u(\theta_\alpha, \alpha)$. Asumiendo funciones de utilidad homogéneas y haciendo uso del supuesto de "single crossing", tenemos que: $\theta_0 \geq \theta_\alpha$ $\square$

Proposición 5.2. $u(\theta_\alpha, \alpha) = 0$

Prueba: Por la proposición 5.1, se sigue que $\theta_0 \geq \theta_\alpha \Leftrightarrow u(\theta_0, \alpha) \geq u(\theta_\alpha, \alpha)$. Esto implica que $u(\theta_\alpha, \alpha)$ se llevará al valor mínimo posible. Dado (PC_2^m) obtenemos que $u(\theta_\alpha, \alpha) = 0$ $\square$

Proposición 5.3. $u(\theta_\alpha, 0) > 0$

Prueba: De la proposición 5.2 obtuvimos que $u(\theta_\alpha, \alpha) = 0$. Debido a que $\theta_0 > \theta_\alpha$ y a que $u(\cdot)$ es creciente en el número de amigos:

$$u(\theta_0, \alpha) > 0$$

Entonces de (IC_2^m) se sigue que:

$$u(\theta_0, 0) - P_0 \geq u(\theta_0, \alpha) > 0$$

Lo cual implica que $u(\theta_0, 0) > P_0 > 0$, como era deseado. $\square$

Proposición 5.4. $u(\theta_0, 0) - u(\theta_0, \alpha) = P_0$

Prueba: Supongamos que no sea cierto. Entonces tenemos de (IC_1^m) y (IC_2^m) que

$$u(\theta_0, 0) - u(\theta_0, \alpha) > P_0 \geq u(\theta_\alpha, 0) - u(\theta_\alpha, \alpha)$$

Debido a que igualmente $u(\theta_0, 0) > 0$ podríamos fijar $\theta_0' = \theta_0 - \epsilon$ para algún ϵ lo suficientemente pequeño tal que (IC_1^m) y (IC_2^m) se satisfacen. Sin embargo, esto contradice el hecho de que θ_0 es el θ más pequeño tal que un individuo elige pagar por la aplicación sin comerciales α. Por lo tanto esto es una contradicción. $\square$

Entonces, el problema de optimización de la empresa se puede expresar como:

$$\max_{p_0,\theta_0} \alpha \sum_{x=\theta_\alpha}^{\theta_0 - 1} \hat{f}(x) + P_0 \sum_{x=\theta_0}^{\infty} \hat{f}(x)$$

$s.a.$

$$u(\theta_\alpha, \alpha) = 0 \qquad (PC_1^m)$$

$$P_0 = u(\theta_0, 0) - u(\theta_0, \alpha) \quad (IC_2^m)$$

Donde la función $\hat{f}(\cdot)$ es la función de densidad del grado de conexión de un nodo perteneciente al grafo aleatorio, por lo que $\hat{f}(\beta)$ es el porcentaje de individuos en la red que tienen β amigos. Aunque el problema de optimización parezca ser sencillo, es importante considerar que la función $\hat{f}(\cdot)$ implícitamente internaliza la estructura de la red original $-f(\cdot)-$. La razón por la cual existe una modificación de la distribución de grado original surge de la posible pérdida de nodos tras la implementación de la aplicación con publicidad. Esto dependerá del valor de θ_α, el cual a su vez obedecerá a la forma funcional de la utilidad de los agentes.

Sea $\hat{G}(n, p, D)$ el nuevo grafo derivado de la acción de suprimir todo nodo tal que su grado sea menor a D. En particular, debido a la restricción de participación (IC_1^m), esto implica que se buscará que los nodos de menor grado en el grafo original, $G(n, p)$, tengan, en esperanza θ_α conexiones en el nuevo grafo $\hat{G}(n, p, D)$. Asimismo, por la Proposición 5.2, sabemos que θ_α está exógenamente determinada por la función de utilidad de los agentes. Por lo tanto, D_α se encuentra exógenamente determinado al igual que el número de conexiones θ_α.

$$\theta_\alpha = D_\alpha[1 - F(D_\alpha)] \tag{5.1}$$

Sea D_0 el grado mínimo tal que, después de borrar todos los nodos con grado menor a D_α en el grafo, un nodo con grado D_0 tendrá en el nuevo grafo $\hat{G}(n,p,D)$ en esperanza θ_0 vecinos restantes. Es decir:

$$\theta_0 = D_0[1 - F(D_\alpha)] \tag{5.2}$$

Ahora, recordando el problema de optimización original, sabemos que la restricción asociada a θ_α está exógenamente determinada por la estructura de la función de utilidad. Por lo tanto, el problema de optimización se puede traducir a elegir únicamente el grado θ_0 a partir del cual a los agentes deciden pagar la tarifa fija P_0 y adquirir la aplicación sin publicidad. No obstante, lo anterior carece de fundamento si no existe un grado D_α tal que cumpla con la ecuación 5.1.

Para analizar lo anterior definimos la siguiente función:

$$h(D) = D[1 - F(D)], \quad D \in \mathbb{N}$$

La cual, no es inyectiva. Si bien es cierto que el dominio de la función se encuentra en $\mathbb{N}$, el uso de cálculo diferencial nos puede dar información sobre su comportamiento. De las condiciones de primer orden obtenemos la condición de optimalidad de D:

$$D* = \frac{1 - F(D^*)}{f(D^*)}$$

Esto nos lleva a tres posibilidades en cuanto a la existencia de D en función del valor de θ_α:

$$D_\alpha = \begin{cases} \{D_1, D_2\}, & \text{si} \quad \theta_\alpha \in [0, h(D^*)) \\ D^*, & \text{si} \quad \theta_\alpha = h(D^*) \\ \emptyset, & \text{si} \quad \theta_\alpha \in (h(D^*), \infty) \end{cases}$$

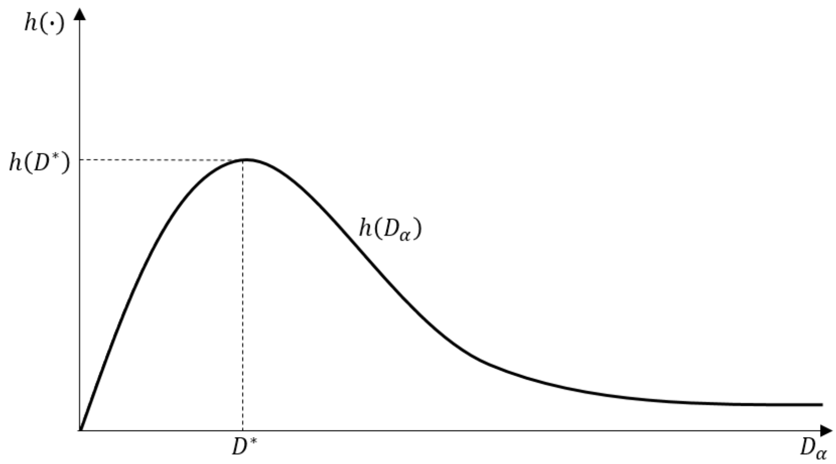
Si θ_α es menor al máximo de la función $h(\cdot)$, entonces se cumple que:

$$D_1[1 - F(D_1)] = D_2[1 - F(D_2)] = \theta_\alpha, \quad \text{con} \quad D_1 < D_2$$

Esto implica que se podrían eliminar del grafo todos los nodos con conexiones menores a D_1 o a D_2 con el mismo resultado en cuanto a que los nodos con menor grado en el nuevo grafo tendrían, en esperanza, θ_α conexiones tras el cambio. La implementación de D_2, aunque factible, conlleva el problema de que suprime más nodos que la ejecución de D_1. Es por esto que jamás sería óptima su implementación al internalizar esta decisión en el problema de maximización de beneficios del monopolista. Al suprimir la sección decreciente de $h(\cdot)$, la existencia de D se traduce a que existe un D tal que satisfaga 5.1 si y sólo si $\theta_\alpha \leq h(D^*)$.

Graficamente, lo anterior se puede vizualizar en la figura 5.1

Figura 5.1



El caso en el que θ_α es demasiado alto y no existe una solución para 5.1 se puede interpretar como una desaparición total de la red. Al implementar publicidad dentro de la aplicación se crea un efecto en cadena que logra erradicar por completo el grafo. Este escenario dependerá de la forma funcional de la utilidad de los agentes y de la distribución de grados del grafo aleatorio. En esta situación, el monopolista sólo tiene la posibilidad de cobrar una tarifa fija por el uso de la aplicación para generar utilidades.[1]

[1]También podría disminuir la cantidad de publicidad α o su grado de molestia. Sin embargo, en este modelo

Centrémonos en el caso donde θ_α es lo suficientemente baja tal que D_α existe o, equivalentemente, $\theta_\alpha \leq h(D^*)$. Como θ_α se determina exógenamente dependiendo de la forma funcional de la utilidad de los agentes, D_α es constante independientemente de la decisión del monopolista de θ_0. Por lo tanto, podemos definir una constante Γ como:

$$\Gamma = [1 - F(D_\alpha)] = \left[1 - \sum_{j=0}^{D_\alpha} e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!}\right]$$

Por lo que la ecuación que define θ_0 se reduce a $\theta_0 = \Gamma D_0$ para una constante Γ. Sustituyendo lo anterior en la función objetivo, esta se reduce a:

$$\max_{\theta_0} \alpha \sum_{x=\theta_\alpha}^{\theta_0 - 1} \hat{f}(x) + [u(\Gamma D_0, 0) - u(\Gamma D_0, \alpha)] \sum_{x=\theta_0}^{\infty} \hat{f}(x)$$

Donde $\hat{f}(\cdot)$ es la distribución de grado tras eliminar todos los nodos con grado menor a D_α. No obstante, esta también puede ser expresada en términos de la distribución de grados original $f(\cdot)$ al internalizar por (5.1) y (5.2).

$$\max_{D_0} \alpha \sum_{x=D_\alpha}^{D_0 - 1} f(x) + [u(\Gamma D_0, 0) - u(\Gamma D_0, \alpha)] \sum_{x=D_0}^{\infty} f(x)$$

Lo cual se puede reescribir como:

$$\max_{D_0} \alpha \sum_{x=D_\alpha}^{\infty} f(x) + [u(\Gamma D_0, 0) - u(\Gamma D_0, \alpha) - \alpha] \sum_{x=D_0}^{\infty} f(x)$$

Como el primer término de la función objetivo es constante, el problema de maximización resulta ser:

$$\max_{D_0} [u(\Gamma D_0, 0) - u(\Gamma D_0, \alpha) - \alpha] \sum_{x=D_0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \tag{5.3}$$

asumimos ambas variables como fijas.

La ecuación anterior puede ser resuelta dada una función de utilidad específica $u(\cdot)$ aunque el proceso para obtener Γ podría resultar computacionalmente complejo. Es por esto que, para el caso abstracto, sólo probaremos que existe una solución al problema.

Proposición 5.5. *La ecuación 5.3 tiene solución si y sólo si:*

$$\lim_{\theta \to \infty} u(\theta, 0) - u(\theta, \alpha) > \alpha$$

En otras palabras, la empresa ofrece un precio aunado a la opción de publicidad si y sólo si existe un subconjunto de consumidores tal que la desutilidad de observar comerciales sea mayor al beneficio marginal de la empresa por los mismos.

Prueba: Debido a la condición de "single crossing" es claro que la función

$$\varphi(\theta, \alpha) = u(\theta, 0) - u(\theta, \alpha) - \alpha$$

Es creciente en θ. Por lo tanto, si $\varphi(\theta, \alpha) < 0$ para todo θ entonces la función objetivo del problema de optimización es siempre negativa. Como la función $\varphi(\theta, \alpha)$ es creciente a tasas decrecientes (por los supuestos de concavidad de u) y $[1 - F(x)]$ tiende a cero a tasas crecientes cuando $x \to \infty$, es óptimo para la empresa no ofrecer la aplicación con costo fijo.

Ahora, suponiendo la existencia de un $\hat{\theta}$ tal que $\varphi(\hat{\theta}, \alpha) = 0$. Entonces se sigue que $\varphi(\theta, \alpha) > 0$ para el subconjunto de $\theta \in \{\mathbb{N} \mid \theta > \hat{\theta}\}$. Asimismo, definiendo la función:

$$\omega(\theta) = \sum_{x=\theta}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

Es claro que $\lim_{\theta \to \infty} \omega(\theta) = 0$ a tasas crecientes. Por lo tanto, la función:

$$\Omega(\theta, \alpha) = \varphi(\theta, \alpha)\omega(\theta)$$

Cumple con las siguientes caracteristicas:

1. $\Omega(\hat{\theta}, \alpha) = 0$

2. $\lim_{\theta \to \infty} \Omega(\theta, \alpha) = 0$

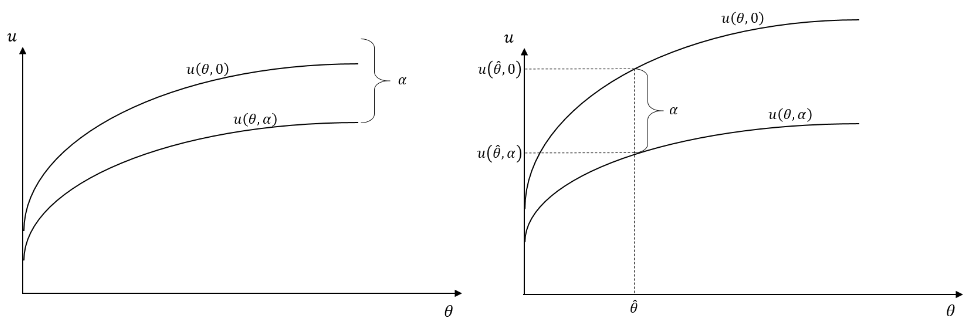
3. $\Omega(\theta, \alpha) > 0 \quad \forall \quad \theta \in \{\mathbb{N} \mid \theta > \hat{\theta}\}$

Las características anteriores aunado a que la función $\Omega(\theta, \alpha)$ *es continua en el intervalo* $[\hat{\theta}, \infty)$ *nos llevan a concluir que existe una solución única al problema de optimización si y sólo si* $\varphi(\theta, \alpha) > 0$ *para el subconjunto de* $\theta \in \{N \mid \theta > \hat{\theta}\}$*. Esto se puede reescribir como:*

$$\lim_{\theta \to \infty} u(\theta, 0) - u(\theta, \alpha) > \alpha \quad \square$$

Gráficamente, en la figura 5.2 se muestra cómo en la gráfica de la izquierda nunca se llega al punto en donde existe un subconjunto de consumidores tal que su desutilidad de observar publicidad sea mayor al beneficio marginal de la empresa por mostrarla. Asimismo, en la gráfica de la derecha sí existe este subconjunto de consumidores y estos comienzan a partir del número de conexiones $\hat{\theta}$.

Figura 5.2



En definitiva, lo aprendido en esta sección se puede resumir en los siguientes dos puntos:

1. Precios de menú no son implementables si $\theta_\alpha > h(D^*)$. Si θ_α es demasiado alta, la entrada en vigor de un esquema de publicidad conllevaría un efecto en cadena de salida masiva

de la red y el grafo desaparecería. En esta situación la única manera generar ingresos para el monopolista es cobrar un precio único por el acceso a la red.

2. Sujeto a que la discriminación de segundo grado es factible $-\theta_\alpha \leq h(D^*)-$, es sostenible que la empresa ofrezca un esquema de precios de menú si y sólo si existe un subconjunto de consumidores tal que la desutilidad de observar publicidad sea mayor al beneficio marginal de la empresa por la misma. Esto sucede si:

$$\lim_{\theta \to \infty} u(\theta, 0) - u(\theta, \alpha) > \alpha$$

Capítulo 6

Precio único

Para el caso en el cual se decide cargar un precio único por el acceso a la red, el análisis se torna un tanto menos complejo debido a que ya no es necesario lidiar con restricciones de compatibilidad de incentivos. No obstante, sigue siendo necesario trabajar con una restricción de participación derivada de la función de utilidad $V(\theta, P_u)$ de los agentes:

$$u(\theta, 0) - P_u \geq 0 \quad (PC^u)$$

Definimos θ_u como el número de grados tal que la utilidad de pertenecer a la red y pagar un precio P_u arbitrario sea cero. Es decir:

$$V(\theta_u, P_u) = 0 \Leftrightarrow u(\theta_u, 0) = P_u$$

Por lo mostrado en la sección 4 correspondiente a un grafo Erdös-Renyi, si del grafo original se eliminan todos los nodos con grado menor a D_u, en el grafo resultante los nodos de menor grado tendrán en esperanza θ_u conexiones. Lo anterior se determina por la siguiente ecuación:

$$u(\theta_u, 0) = P_u = D_u[1 - F(D_u)] \tag{6.1}$$

Al igual que el problema de discriminación de segundo grado, la ecuación tendrá solución sólo si el precio elegido es lo suficientemente bajo tal que la red no desaparezca en un efecto en cadena. El problema de optimización se expresa como sigue:

$$\max_{P_u, D_u} \left\{ P_u \sum_{x=D_u}^{\infty} f(x) \right\}$$

$$s.a. \;\; P_u \leq h(D^*), \quad \text{donde} \quad D^* = \tfrac{[1-F(D^*)]}{f(D^*)} \tag{6.2}$$

Asumiendo continuidad en la función de distribución de grado y relajando la restricción 6.2, el problema se traduce a:

$$\max_{D_u} \{D_u[1 - F(D_u)]^2\}$$

Lo cual tiene una solución determinada de manera implícita por:

$$D_u^* = \frac{[1 - F(D_u^*)]}{2f(D_u^*)} \tag{6.3}$$

No obstante, esta solución está incompleta si no se muestra que cumple con la restricción 6.2, la cual es equivalente a probar que $D_u^* < D^*$.

Proposición 6.1. *Bajo los supuestos funcionales de la distribución de grado provenientes de un proceso aleatorio de generación del grafo,* $D_u^* < D^*$.

Prueba: Para probar esto asumiremos la existencia de una función de tasa de fallos:[1]

$$\chi(D) = \tfrac{f(D)}{1-F(D)} \quad (HR)$$

La función (HR) *cumple con la propiedad de tasa de fallos monótona (MHRP por sus*

[1] *Hazard Rate* en la literatura anglosajona.

siglas en inglés) si su derivada es creciente para todo grado D.

$$\chi'(D) = \tfrac{d}{dD}\left[\tfrac{f(D)}{1-F(D)}\right] > 0 \quad (MHRP)$$

Asimismo, podemos definir las condiciones de optimalidad de precio fijo (6.3) y la condición derivada de la restricción 6.2 en términos de la función $\chi(\cdot)$ como:

$$\frac{1}{2D_u^*} = \chi(D_u^*) \tag{6.4}$$

$$\frac{1}{D^*} = \chi(D^*) \tag{6.5}$$

Por lo tanto, se prueba que D_u^* es estrictamente menor a D^* si la propiedad de $(MHRP)$ se cumple para la función $\chi(\cdot)$. Es decir:

$$D_u^* < D^* \Leftrightarrow \chi'(D) > 0$$

El caso que nos concierne corresponde a una función de distribución de Poisson. para esto haremos uso del siguiente teorema:

Teorema 6.0.1. [2] *Si (i) $f(x)$ tiende a 0 al mismo tiempo que $[1 - F(x)]$ tiende a 0 y (ii) $-\log f(x)$ es convexa (cóncava), la función de tasa de fallos es monotónicamente creciente (decreciente).*

Con base en el teorema anterior, se podría demostrar que la función (HR) es monotónicamente creciente si la función de distribución de Poisson fuera continua. Para valores lo suficientemente altos de λ una distribución de Poisson se puede representar como una distribución normal con media y varianza iguales a λ $-N(\lambda, \lambda)-$. Por lo tanto, si asumimos la función

[2] Thomas (1971)

de distribución de grado normal:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{2\lambda}}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}[-\log f(x)] = \frac{1}{\lambda} > 0$$

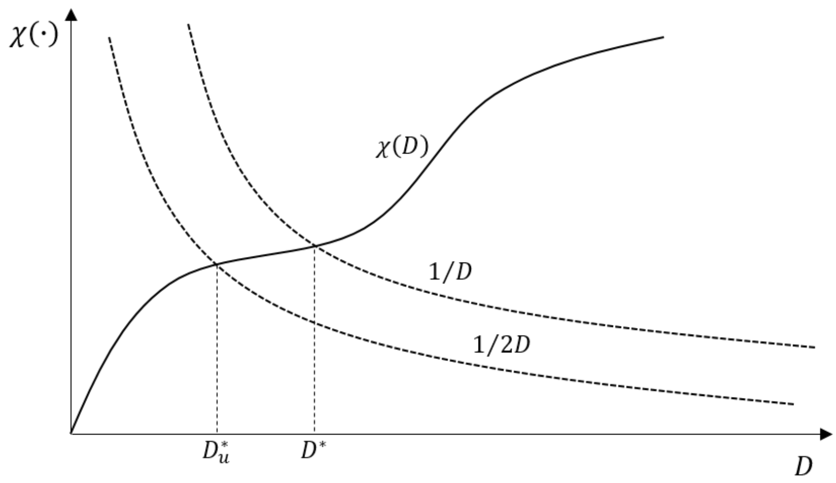
Entonces la función (HR) *es monotónicamente creciente para todo grado.*

$$\chi'(D) > 0 \quad \forall D \in \mathbb{N}$$

Por lo tanto (véase figura 6.1 para intuición gráfica), se demustra que:

$$D_u^* < D^* \quad \square$$

Figura 6.1



Por todo lo anterior, se muestra que D_u^* está bien definido y que el precio óptimo corresponde a:

$$P_u^* = D_u^*[1 - F(D_u^*)]$$

Capítulo 7

Ejemplo

En las secciones 5 y 6 se definieron condiciones explícitas con respecto a características funcionales de las funciones de utilidad y de la función de distribución de grado. Lo anterior, aunque útil, carece de significado si no se asumen ciertas formas funcionales y se determina bajo qué condiciones es óptima qué política de precios. En las siguientes subsecciones se realiza dicho análisis con el objetivo de comprender en qué contexto es óptimo realizar una discriminación de segundo grado.

7.1. Supuesto distribución de grado

Supongamos arbitrariamente que la función de distribución de grado es:

$$F(x) = \sum_{j=0}^{x} e^{-400} \frac{400^j}{j!}$$

Es decir, $\lambda = 400$. Esto implica que la media y la varianza de grado es igual a 400.

7.2. Discriminación de segundo grado

Supongamos la siguiente función de utilidad homogénea entre agentes:

$$V(\theta, \alpha, P_0) = \begin{cases} \frac{\theta}{1+\alpha} - K; & \text{con publicidad} \\ \theta - P_0; & \text{sin publicidad} \end{cases}$$

Con $\alpha > 0$ y $K > 0$. La cual es posible mostrar que cumple con la condición de *"single crossing"*. Antes de proseguir, es importante dar una interpretación a los parámetros α y K. Por un lado, α se podría entender como un parámetro de disgusto por observar publicidad que no repercute *per se* en la decisión de permanecer o no a la red. Por el otro, el parámetro K sí determina la permanencia en la red y se le podría considerar como un parámetro de permanencia en la red. Mientras mayor sea K, a menos individuos les será provechoso permanecer en la red y decidirán salir de ella. Por la ecuación 5.1, lo anterior implica que

$$\theta_\alpha = K(1+\alpha) = D_\alpha[1 - F(D_\alpha)] \quad D \in \mathbb{N}$$

Recordemos que el grafo sólo existe si el parámetro θ_α es lo suficientmente bajo. Lo cual sucede si $\theta_\alpha \leq h(D^*)$. Sujeto a la función de distribución de grado ya definida se puede determinar D^*:

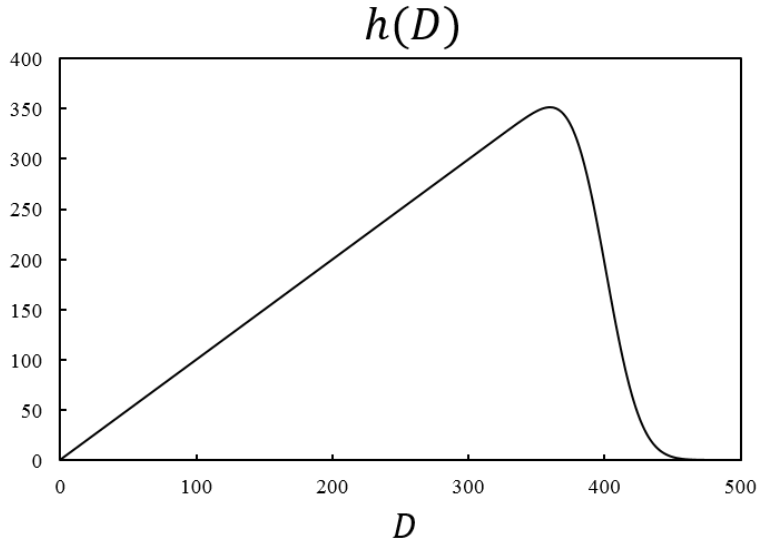
$$D^* = \frac{1 - F(D^*)}{f(D^*)} \Rightarrow D^* = 360 \quad y \quad h(D^*) = 351$$

Entonces el grafo existe siempre y cuando se cumpla:

$$K(1+\alpha) \leq 351$$

Gráficamente la función $h(\cdot)$, para la función de distribución antes mencionada, se puede graficar de la siguiente manera:

Figura 7.1



Si se conocen α y K, y se cumple con la restricción de que el grafo no desaparezca en un efecto en cadena, entonces es posible obtener D_α, Γ y θ_0 (D_0). Por lo tanto se puede plantear el problema de optimización de la ecuación 5.3 en términos de los supuestos de este ejemplo como:

$$\max_{D_0}\left[D_0\Gamma\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)+(K-\alpha)\right]+(K-\alpha)[1-F(D_0)]$$

Lo anterior nos lleva a que el número de vecinos a partir de los cuales es óptimo que los agentes paguen un precio fijo están dados por el máximo de la función $h(\cdot)$.

$$D_0^*=\frac{1-F(D_0^*)}{f(D_0^*)}\Rightarrow D_0^*=D^*=360$$

Entonces los beneficios de la empresa por la implementación de precios de menú se pueden expresar en función de α y K como:

$$\pi_m(\alpha,K)=\alpha[1-F(D_\alpha)]+[360[1-F(D_\alpha)]\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)+(K-\alpha)][1-F(360)]$$

Donde D_α depende de la combinación de valores de α y K.

7.3. Precio único

Supongamos ahora que se decide cargar un precio único a todo aquel que desee consumir la aplicación. Suponemos que, al igual que el ejemplo de discriminación de segundo grado, la utilidad de consumir la aplicación es:

$$V(\theta, P_u) = \theta - P_u$$

Por la ecuación 4.1 de la sección 6 sabemos que el problema tiene la solución:

$$D_u^* = \frac{[1 - F(D_u^*)]}{2f(D_u^*)} \Rightarrow D_u^* = 354$$

Asimismo se verifica que se cumple la proposición 6.1:

$$D_u^* = 354 < 360 = D^*$$

Por lo tanto, podemos determinar que los beneficios del esquema de precio único son:

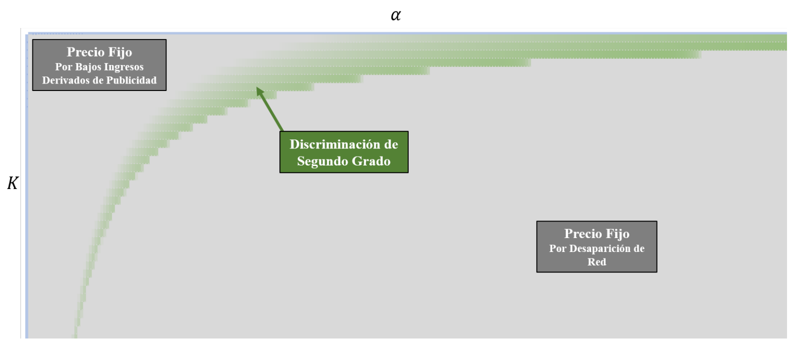
$$\pi_u = D_u^*[1 - F(D_u^*)]^2 = 354[1 - F(354)]^2 = 346.68$$

7.4. ¿Cuándo es óptimo realizar una discriminación de segundo grado?

Para poder resolver la interrogante relacionada a cuándo es conveniente qué política de precios para el monopolista, se deben de comparar los beneficios que conlleva cada una. Es por esto que resulta de gran interés determinar cómo luce la diferencia entre los beneficios derivados de la discrimianción de segundo grado o precios de menú, π_m, y los beneficios de implementar un precio único, π_u, en función de los parámetros exógenos α y K.

En la siguiente gráfica de nivel se muestra la diferencia entre π_m y π_u. Las celdas grises representan las combinaciones de α y K donde los beneficios de llevar a cabo una política de precio único es óptimo para el monopolista. Asimismo, las celdas verdes, dependiendo de su grado de intensidad, muestran en qué combinaciones de α y K es beneficioso implementar una discriminación de segundo grado.

Figura 7.2



El aprendizaje central de este ejemplo se podría interpretar intuitivamente de la siguiente forma: *es conveniente realizar discriminación de segundo grado sólo si el disgusto por observar la aplicación con publicidad es alto y la permanencia es alta. Es decir, si se cuenta con una baja elasticidad de la demanda por el uso de la aplicación ante aumentos en publicidad y los ingresos por la venta de publicidad no son insignificantes.*

Este resultado deriva del hecho de que aumentos en α, manteniendo un K bajo, facilitan el trabajo de extracción de excedente de los agentes por parte del monopolista porque: 1) aumenta el precio que se le puede cargar a los agentes que deseen no consumir publicidad y; 2) aumenta el ingreso por concepto de la venta de espacio de publicidad.

Capítulo 8

Conclusiones

Las aplicaciones tecnológicas más exitosas de los últimos años están basadas en la existencia de los ciclos virtuosos. Es decir, de las externalidades positivas de red que fomenta la interacción entre los usuarios y sus vecinos (amigos). Debido a que las políticas de precio determinan gran parte del potencial de crecimiento y los flujos de ingresos presentes y futuros de las compañías dueñas de aplicaciones, es de gran importancia establecer las bases de una teoría que presente cómo se deberían tomar estas decisiones. El objetivo central del trabajo es caracterizar cuándo es beneficioso para un monopolista introducir un esquema de precios no lineales con base en un modelo estilizado con ciertos supuestos. Se derivan condiciones para la existencia de un esquema de precios de menú óptimo y para uno de precio único. La determinación de cuándo es óptima qué política está sujeta a la forma funcional de la función de utilidad y de la distribución de grado del grafo aleatorio.

El análisis aquí mostrado parte del supuesto de que existe una empresa única dueña de la red. Para trabajos subsiguientes sería interesante introducir la posibilidad de competir por la base de consumidores. Este comportamiento es característico del sector de tecnología donde el tiempo de vida de un negocio es menor. Asimismo, sería interesante endogenizar la decisión de conexiones entre agentes y, de esta manera, buscar que la distribución de grado sea más apegada a la realidad. Con respecto a la publicidad, existen dos variantes que podrían mejorar el modelo considerablemente. Primero, omitir el supuesto de que la empresa es tomadora de espacio de publicidad. Es decir, crear la posibilidad de que α sea una variable de decisión de la empresa en el proceso de optimización. Segundo, que por medio de la focalización disminuya el grado de disgusto de la publicidad. Si la aplicación logra focalizar la publicidad hasta el punto en el que los individuos, lejos de sentir disgusto, les generan utilidad, entonces el análisis y los resultados cambiarían considerablemente.

Referencias

Bagnoli, M., Salant, S. W., y Swierzbinski, J. E. (1989). "Durable-goods monopoly with discrete demand." *Journal of Political Economy*, *97*(6), pp. 1459-1478.

Becker, G. S., y Murphy, K. M. (1993). "A simple theory of advertising as a good or bad." *The Quarterly Journal of Economics*, *108*(4), pp. 941-964.

Bloch, F., y Quérou, N. (2008, Oct). *Pricing in networks.*

Cabral, L. M., Salant, D. J., y Woroch, G. A. (1999). "Monopoly pricing with network externalities." *International Journal of Industrial Organization*, *17*(2), 199–214.

Candogan, O., Bimpikis, K., y Ozdaglar, A. (2012). "Optimal pricing in networks with externalities." *Operations Research*, *60*(4), 883–905.

Deneckere, R. J., y Preston McAfee, R. (1996). "Damaged goods." *Journal of Economics and Management Strategy*, *5*(2), 149–174.

Erdös, P., y Rényi, A. (1960). "On the evolution of random graphs." *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci*, *5*, 17–61.

Fainmesser, I. P., y Galeotti, A. (2015). "Pricing network effects."

Katz, M. L., y Shapiro, C. (1985). "Network externalities, competition, and compatibility." *The American Economic Review*, *75*(3), pp. 424-440.

Ritter, J., y Welch, I. (2002, February). *A review of ipo activity, pricing, and allocations* (Working Paper n.º 8805). National Bureau of Economic Research. doi: 10.3386/w8805

Rossi, P. E., McCulloch, R. E., y Allenby, G. M. (1996). "The value of purchase history data in target marketing." *Marketing Science*, *15*(4), 321–340.

Thomas, E. A. (1971). “Sufficient conditions for monotone hazard rate an application to latency-probability curves.” *Journal of Mathematical Psychology*, *8*(3), 303–332.