CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DOCENCIA ECONÓMICAS, A.C.

DISCRIMINACIÓN DE SEGUNDO GRADO EN REDES SOCIALES ESTOCÁSTICAS DINÁMICAS

TESINA

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN ECONOMÍA

PRESENTA

CHRISTOPHER ALBERTO SÁNCHEZ VÁZQUEZ

DIRECTOR DE LA TESINA:

ANTONIO JIMENEZ-MARTINEZ

MÉXICO, CDMX. JUNIO, 2016

Esta tesina está basada en el proyecto de investigación de Óscar Gonzalez-Guerra y António Jiménez-Martinez titulado “Discrimination through Versioning with Advertising in Random Social Networks” (2016).

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi asesor y a todos los profesores que contribuyeron en mi formación. También, a la UNAM y al CIDE por darme la oportunidad de llegar hasta aquí.

Agradezco a mi familia, en especial a mi madre y hermanos.

También, agradezco a mis compañeros y amigos.

A todos ustedes, gracias por el apoyo, motivación y tolerancia. Gracias, por escucharme, aconsejarme y por estar cuando los necesité. De todo corazón, gracias!

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Ante la presencia de externalidades de red positivas, podría pensarse que el efecto de éstas sobre la utilidad de los individuos es mayor en una red social creada con preferencias de conexión que en una red social formada de manera puramente aleatoria. La intuición detrás es que en la medida en que cada individuo decida con quién crear enlaces, de amistad por ejemplo, se formarán amplios grupos con características similares cuyas interacciones locales serán mayores con respecto al escenario en el que el tamaño de los grupos es reducido o simplemente son inexistentes. Sin embargo, en este trabajo se demostrará que no ocurre siempre así, que depende del proceso generador de redes aleatorias que se considere.

Pensemos en un monopolista que busca maximizar beneficios de la venta de un servicio y de un bien. La estrategia de éste es discriminar a los consumidores a través de la creación de dos versiones del servicio, una de las cuales incluye publicidad. Ésta genera costos en los individuos que la observan. El monopolista utiliza el espacio publicitario para promocionar el bien, con el objetivo de incrementar las ventas del mismo. Así, la elección de un precio del servicio en su versión sin publicidad segmentará a los consumidores. Suponiendo que todos los individuos eligen una versión del servicio, ¿qué precio debe elegir el monopolista para maximizar sus beneficios totales? De existir diferencia en el efecto de la externalidad entre versiones del servicio, ¿cómo afecta dicha diferencia al precio de equilibrio? Ante el hecho de que existen diferentes tipos de redes sociales ¿cómo influye en el precio de equilibrio considerar una red social puramente aleatoria o una con preferencias de enlace?

Para analizar la importancia del tipo de red social en la determinación del precio óptimo, en concreto, en este trabajo se utiliza un proceso híbrido generador de redes estocásticas dinámicas que mezcla entre una red social con enlaces creados de manera puramente aleatoria y una con enlaces formados considerando preferencias de enlace en los individuos. Por otro lado, el papel de la publicidad es informar sobre la verdadera valoración del bien al individuo, por lo que se considerará que la publicidad utilizada es de tipo informativa. Antes de decidir por una versión del servicio, los individuos observan una señal referente a la calidad del bien publicitado. Dicha señal es costosa para el monopolista y además le genera un costo hundido. Al considerar diferencia en las externalidades suponemos que si varios individuos tiene el mismo número de amigos, unos disfrutan más de una versión que de otra.

En términos generales, en este trabajo se demuestra que el precio óptimo no satisface las condiciones de primer y segundo orden debido al soporte de la distribución de grado en la red. Así, la solución al problema del monopolista resulta en una solución de esquina cuyo nivel se ve afectado directamente por tres variables, el costo de observar publicidad, el mínimo número de amigos que un individuo pueda tener en la red y, la diferencia de las externalidades. También, se demuestra que el efecto de la consideración de un tipo de red no es directo, pero que, en general, se esperan precios mayores en las redes puramente aleatorias que en las redes formadas con preferencias de enlace.

Los especialistas en estudiar las relaciones sociales se han ayudado de la teoría de grafos para caracterizar las propiedades estadísticas de una red social y modelar cómo las influencias en la red afectan el comportamiento de los agentes que la conforman. Bajo esta perspectiva, es posible entender el comportamiento económico de los consumidores como la interacción entre (i) las posibles posiciones dentro de la red social, (ii) las distintas valoraciones sobre bienes o servicios y (iii) las externalidades de consumo de los mismos.

Katz & Shapiro (1985) esbozan la idea de las externalidades directas, indirectas y de bienes durables para proponer un modelo de un oligopolio que produce un bien con externalidades de red. Modelan las externalidades mediante la utilidad que genera en el individuo las expectativas del tamaño de la red del producto de la empresa a la cual le compran el bien. La importancia de este trabajo radica en la forma en que relacionan las redes y la economía. Este modelo ha servido de base para las investigaciones enfocadas a determinar estrategias de precio en alguna estructura de mercado específica en los últimos años. En este sentido, el principal mérito de Economides (1996), es la utilización de elementos formales de la teoría de redes para explicar la interacción entre agentes y las externalidades de red. Kirman (1997) pone énfasis en considerar a la economía y a sus agentes como una red con el objetivo de modelar heterogeneidad e interdependencia entre los individuos. Su propósito es relajar algunos de los supuestos que permean a los modelos económicos estándar, donde se considera a los individuos como agentes independientes cuyo único referente para tomar desiciones es el precio de mercado.

El estudio de la sociología y las matemáticas ha permitido la descripción de las características principales que definen a una red social. [1] Los esfuerzos también se han encausado en intentar describir, en términos matemáticos, el proceso que genera la estructura particular de las redes sociales, para lo cual la estadística permitió entender la formación de redes como un proceso aleatorio. La dificultad de modelar las interacciones entre un amplio número de variables que intervienen en la creación de una red social motivó la aparición de modelos cuyo primer paso fue asumir que estas relaciones no importaban y que la red se generaba de forma aleatoria. Erdös & Rényi (1959) es un trabajo pionero en considerar las redes como procesos estocásticos de formación de links entre nodos; en general, se les distingue como redes aleatorias.

Existen dos tipos de modelos de redes aleatorias, los denominados modelos estáticos y aquellos llamados modelos en crecimiento, o dinámicos. En los modelos estáticos de formación de redes aleatorias, un nodo crea un link con otro nodo dada una probabilidad exógena; es decir, de cierta manera los nodos crean una relación de forma aleatoria y no por interés mutuo. Habi-

[1] Para un descripción más detallada de la historia del desarrollo de la teoría de las redes sociales ver Scott (2000) y Borgatti et al. (2009)

tualmente se conoce a estos modelos por la ausencia de *positive assortativity*, y *homophily*, es decir por la falta de preferencias en la creación de relaciones. Generalmente estos modelos no capturan los patrones de agrupamiento, distribución de grado, correlación y otras medidas de red que caracterizan a redes sociales reales.

Lo interesante de los modelos de redes aleatorias dinámicos es que surgen por la necesidad de modelar preferencias en la creación de links, ausentes en las redes puramente aleatorias, e intentan acercarse más a las redes sociales reales. Yule (1925) y Simon (1955) proponen las bases para estudiar la creación de links bajo preferencias en la creación de links. En términos generales, proponen un modelo donde (i) la red crece, es decir, que nuevos nodos se incorporen a través del tiempo y (ii) los nodos existentes generen links en forma proporcional a su medida de grado, es decir, que los nodos con muchos links generen links más rápido que los nodos con pocos links.

Dada la complejidad de los fenómenos de redes sociales, resulta imposible tener un único modelo que refleje perfectamente todas las características propias de una red social real. En este contexto, la importancia de los modelos de redes aleatorias dinámicas consiste en que capturan más características observables en las redes sociales reales que los modelos estáticos. De forma parcial, algunos se centran en el estudio de los patrones de agrupamiento entre individuos, otros analizan la forma de la distribución de las relaciones en la red. En general, este tipo de modelos producen estructuras de redes más próximas a las redes sociales.

Dada la naturaleza de considerar la variable tiempo en los modelos de redes aleatorias en crecimiento, se ha necesitado de la Teoría de Campo Medio, una herramienta utilizada en Física y en Estadística, que permite hacer uso de ecuaciones diferenciales para aproximar las relaciones complejas que surgen cuando se consideran los procesos dinámicos.

La importancia del estudio de las redes sociales y su relación con la economía se ha manifestado de forma activa con la aparición de diversas investigaciones que relacionan la teoría de redes sociales tanto con temas macroeconómicos[2] como con temas microeconómicos. A nivel

[2]Por ejemplo, Cavalcanti & Giannitsarou (2011) y Cavalcanti & Giannitsarou (2015), estudian cómo la es-

microeconómico se han utilizado las redes en la determinación de precio en distintas estructuras de mercado, principalmente monopolio, donde las interacciones y preferencias de los consumidores determinan la demanda del mercado[3].

En los últimos veinte años han surgido numerosos trabajos teóricos que exploran la relación de estos temas en el contexto de un monopolio que maximiza beneficios sobre diferentes estrategias de precios. Estos modelos son compatibles con las dos grandes familias de procesos generadores de redes estocásticas que identifica la teoría de grafos: estáticos y dinámicos. Sin embargo, poco se ha hecho por caracterizar resultados para los proceso dinámicos, los cuales son preferibles en la construcción teórica de redes sociales, ya que en ellos emergen algunas de las propiedades de las redes sociales reales. Bajo esta linea es que este trabajo considera el modelo híbrido de formación de redes aleatorias dinámicas dentro del contexto de un monopolio que emplea publicidad para la promoción de un bien y que aplica discriminación vía creación de dos versiones de un servicio cuyo consumo genera externalidades locales (positivas) en la red en que los consumidores se relacionan.

---

tructura de las redes afecta a la dinámica del capital humano, al crecimiento económico y a la desigualdad. Por otro lado, Kali & Reyez (2007) proponen una forma de medir la integración económica internacional. Asimismo, Kastelle et al. (2006) proponen una forma de medir la globalización.

[3]Algunos ejemplos son Candogan et al. (2012), Fainmesser & Galeotti (2013), González-Guerra (2015). En el capítulo de revision de literatura se profundizará en estos y otros artículos ya que están relacionados directamente con el presente trabajo.

Capítulo 2

Revisión de literatura

Los artículos que están relacionados con el presente trabajo son Candogan et al. (2012), Fainmesser & Galeotti (2013), González-Guerra (2015) y Johnson & Myatt (2006). A continuación se explicarán las similitudes y principales diferencias entre estos trabajos.

2.1. Estructura del modelo

La literatura relacionada generalmente propone un modelo de juegos en dos etapas para estudiar parte de las preguntas que responde este trabajo. En la primera etapa el monopolista fija un precio óptimo y en la segunda etapa los consumidores toman decisiones de consumo de manera simultánea. [1] Bajo esta idea, se han identificado 2 similitudes: (i) problema de determinación de precio optimo de un monopolio; las diferencias surgen en el tipo de estrategias seguidas por cada grupo de autores (ii) los individuos se encuentran insertos dentro de una red, donde el consumo del bien/servicio producido por monopolio presenta externalidades positivas; las diferencias surgen en la forma de considerar las externalidades y del tipo de grafo (red) y el supuestos sobre el conocimiento o desconocimiento de la estructura de la red.

[1] En particular González-Guerra (2015) aborda el problema como un *principal-agent game model* con cuatro tiempos; sin embargo, en los dos primeros ocurre la determinación de precio, mientras que en los dos últimos ocurren las desiciones simultáneas de consumo y la realización de los pagos

Candogan et al. (2012) proponen tres posibles estrategias de precios en la primera etapa. Las primeras dos son resultado del problema de maximización de beneficios del monopolista bajo distintos supuestos de información. La primera estrategia se basa en la discriminación de primer grado suponiendo información completa (de valoración individual del bien y de posición dentro de la estructura de la red); la segunda, considera la determinación de un precio único y, la tercera estrategia consiste en dos precios exógenos (completo y con descuento, P_H y P_L, respectivamente), donde el problema es particionar de manera optima el conjunto de consumidores (diferenciados por sus valoraciones y posiciones en la red) para asignar los precio P_H y P_L de tal manera que se maximicen los beneficios del monopolio.

Fainmesser & Galeotti (2013) proponen dos estrategias de precio en función de la información disponible sobre qué tan influyente y qué tan influenciable es cada individuo. Cuando el monopolio sólo tiene conocimiento de las distribuciones del poder de influencia y propensión a ser influenciado, la empresa decide determinar un precio único. Cuando el monopolio conoce además los niveles de influencia y propensiones de ser influenciados de cada individuo, entonces aplica discriminación de precios de primer grado.

González-Guerra (2015) estudia dos estrategias de precio, discriminación de segundo grado y precio único, en función de los beneficios esperados del monopolio en cada una y de la probabilidad de eliminación de links en la red. Esto ultimo se debe al supuesto de que el monopolista es dueño de la red y a la posibilidad de que tanto un nodo como todos sus links se eliminan si éste decide no consumir el servicio/bien.

2.1.1. Publicidad

Un elemento importante en el trabajo es la consideración de publicidad informativa. Becker & Murphy (1993) y Stigler & Becker (1977) identifican a la publicidad como una fuente de poder de mercado, distinguiendo tres tipos: persuasiva, complementaria e informativa. A las dos primeras se les atribuye la capacidad de incrementar los beneficios de la empresa que la ejecute, sin embargo la segunda no manifiesta siempre dicha propiedad.

Johnson & Myatt (2006) y Lewis & Sappington (1994) proponen clasificar a la publicidad de acuerdo a sus efectos sobre la distribución de las valoraciones. En este contexto, la publicidad informativa tiene la cualidad de incrementar la dispersión de las valoraciones ya que al ofrecer mayor información sobre las características del producto las personas tienden a identificar de mejor forma su valoración y, dependiendo del tipo de producto (de masas o de nicho), será el efecto sobre los beneficios de la empresa que decida aplicar este tipo de publicidad. Asimismo, argumentan que este tipo de publicidad facilita la discriminación entre tipos de consumidores pues el efecto de la misma es generar grupos de consumidores.

Así, se utilizan algunos resultados de Johnson & Myatt (2006), lo cual permitirá la posibilidad de discriminar vía creación de versiones y caracterizar los equilibrios de interés.

2.1.2. Investigación

Del análisis hecho en esta sección, cabe destacar que el marco teórico del modelo de cada autor es aplicable, en principio, tanto a procesos generadores de redes estáticas como en crecimiento. Podemos concluir que el modelo económico y la consideración de las externalidades no involucran un proceso generador de redes en particular. Así, la presente investigación da el paso de buscar resultados específicos para un modelo donde se supone un proceso de generación de redes aleatorias en crecimiento, una función de distribución de grado específica y publicidad de tipo informativa. Este trabajo busca entender cómo las *preferencias de enlace* intervienen en la determinación de equilibrios en comparación con la creación de enlaces de forma *puramente aleatoria*, esto a través de un proceso híbrido de generación de redes estocásticas dinámicas.

Capítulo 3

Modelo

3.1. Características del mercado y supuestos

3.1.1. Red social

Se supone que ni el monopolista ni los consumidores tienen conocimiento de la estructura de la red, sin embargo conocen el proceso aleatorio que la genera. Específicamente, se considera un proceso que entra dentro de la categoría de procesos dinámicos de generación de redes aleatorias o de redes aleatorias en crecimiento. En este sentido, es de conocimiento común que la red fue generada mediante un modelo híbrido de generación de redes aleatorias en crecimiento que pondera, con el parámetro $\alpha \in [0, 1]$, las distribuciones de redes creadas a partir de *random attachment* (componente puramente aleatorio) y de redes creadas considerando el criterio de *preferential attachment* (preferencia en la formación de enlaces). El conjunto de individuos con los que cada individuo i tiene interacción local dentro de la red, N_i, determina el número de vecinos $n_i = |N_i|$ que cada individuo tiene, al cual nos referimos como el grado de i.

El proceso híbrido

En teoría de redes sociales el proceso dinámico generador de redes sociales puramente aleatorias cumple con la propiedad de que, cuales quiera, dos individuos en la red se pueden conectar indirectamente a través de pocos enlaces, mediante los amigos de sus amigos. Ésta, es una característica importante observada en redes sociales reales. Sin embargo, este modelo falla en la generación de individuos que tienen muchos lazos de amistas, individuos centrales presentes en redes sociales reales, cuyo papel interviene de manera importante en la forma de la distribución de grado de la red. Ante este hecho, el proceso dinámico de generación de redes aleatorias bajo preferencias de enlace introduce individuos centrales al retomar la idea de que los individuos no generan links únicamente por el azar (hacer amigos, por ejemplo), sino que incluyen sus preferencias en la creación de links. Sin embargo, el modelo bajo preferencias de enlace la forma de la distribución de grado resulta en otro extremo cuando se compara con la de redes sociales reales. En este sentido, el modelo híbrido mezcla estos dos procesos con el parámetro α, el cual determina el grado en que, en determinada red social, los individuos crean links por azar o por sus preferencias[1].

Así, al considerar el proceso híbrido, con la variación del parámetro α podemos movernos entre redes sociales puramente aleatorias y redes sociales bajo preferencias de enlace. Ello nos permitirá dar respuesta a la pregunta de investigación de este trabajo; es decir, ¿cómo influye la consideración del tipo de red en la determinación del equilibrio?.

Como se explicó en la introducción de este trabajo, por la complejidad dinámica del proceso, en la literatura relacionada con procesos estocásticos dinámicos de generación de redes aleatorias es común utilizar *el análisis de campo medio* para generar la CDF (función de distribución de probabilidad acumulada) y la PDF (función de densidad de probabilidad) relacionadas con la distribución de los grados existentes en la red. En términos generales, el análisis de campo medio simplifica la consideración de muchas dimensiones en la formación de redes sociales a una

[1]Cuando se cuenta con datos empíricos de determinada red social es posible determinar el valor del parámetro α mediante el cálculo de por regresión iterativa, ver capítulo 5 de Jackson (2008) para más detalle

sola dimensión, la formación de enlaces o creación de relaciones. Se basa en el calculo diferencial para modelarlas. En nuestro problema, a pesar de contar con un soporte discreto de grados $n \in \{l_1, ..., l_k\} = L$, el análisis de campo medio nos permite utilizar el cálculo diferencial para aproximar la PDF y CDF.

La red inicia en el tiempo $t = m$ con m nodos conectados todos entre si, y termina en el periodo $t = d$. Al tiempo $t = m + 1$, y hasta $t = d$, nace un nuevo nodo indexado por su fecha de nacimiento y genera m links con los nodos existentes. Cuando los nodos generan links de manera uniforme y puramente aleatoria, los t nodos existentes, tienen probabilidad $\frac{m}{t}$ de ser seleccionados por los nodos que nacen. Por otro lado, cuando los nodos generan links considerando sus preferencias[2], el nodo que nace asigna la probabilidad de crear un link en proporcion al grado de cada nodo existente, por lo que cada uno de estos nodos tiene probabilidad $m\frac{n_i(t)}{\sum_{j=1}^{t} n_j(t)}$ de ser seleccionado para crear un link con el nodo que nace. Debido a que existen un total de t nodos, cada uno de los cuales genera m links, en la red hay un total de tm links y, por tanto, la suma de grados equivale a $\sum_{j=1}^{t} d_j(t) = 2tm$. De esta manera, bajo *the mean-filed analyses*, el diferencial de cambio de grado con respecto al tiempo de los nodos existentes es igual a la probabilidad de crear un link con los nodos que nacen. Así, los elementos que combina el proceso híbrido son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_i(t)}{\partial t} &= \frac{m}{t} && : (3.2.1) \text{ componente aleatorio} \\ \frac{\partial n_i(t)}{\partial t} &= \frac{n_i(t)m}{2tm} && : (3.2.2) \text{ componente de preferencias} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Por tanto, el modelo híbrido se construye al considerar:

$$\frac{\partial n_i(t)}{\partial t} = \alpha\left(\frac{m}{t}\right) + (1-\alpha)\left(\frac{n_i(t)}{2t}\right) \tag{3.2}$$

Tenemos $i \leq t$ y cuando $t = i$ la condición inicial es $n_i(i) = m$. Así, la ecuación diferencial anterior, tiene la siguiente solución [3]:

[2]Cada nodo al nacer prefiere crear un link con aquellos nodos que están mejor conectados dentro de la red que con aquellos que no lo están

[3]Se desarrolla en el *Apéndice* A

$$\phi_t(i) = n_i(t) = \left(m + \frac{2\alpha m}{1-\alpha}\right)\left(\frac{t}{i}\right)^{\frac{1-\alpha}{2}} - \frac{2\alpha m}{1-\alpha} \tag{3.3}$$

Después de manipular[4] la expresión (3.3), llegamos a las siguiente PDF ($f(n)$) y CDF ($F(n)$) del modelo híbrido[5]:

$$f(n) = \frac{2}{\alpha 2m + (1-\alpha)n}\left(\frac{m + \frac{\alpha 2m}{1-\alpha}}{n + \frac{\alpha 2m}{1-\alpha}}\right)^{\frac{2}{1-\alpha}} \tag{3.4}$$

$$F(n) = 1 - \left(\frac{m + \frac{\alpha 2m}{1-\alpha}}{n + \frac{\alpha 2m}{1-\alpha}}\right)^{\frac{2}{1-\alpha}} \tag{3.5}$$

De esta manera, tenemos que $f(n)$ representa la probabilidad de encontrar un nodo con grado n dentro de la red, mientras que $F(n)$ representa la probabilidad de encontrar un nodo con grado menor o igual a n. Dadas las características del proceso, tenemos que, el grado mínimo en la red es $l_1 = m$, mientras que el grado máximo en la red es $l_k = d$, donde $0 < m < d$.

La existencia de correlaciones de grado en el proceso híbrido que genera la red exige la utilización de la distribución de grado del vecino más cercano para el cálculo de las expectativas de consumo de los individuos vecinos del nodo i con grado n_i dentro de la red. Así, los individuos realizan el cálculo de las expectativas de consumo de sus vecinos de acuerdo con $q(l|n_i)$, que es la probabilidad de que un vecino del nodo i con grado n_i tenga grado l.

Consideremos las siguientes medidas de Lebesgue sobre los conjuntos de individuos que se indican:

$$\begin{aligned} x(l) &= |\{i \in [0,1] : x_i = 1 | n_i = l\}| \\ y(l) &= |\{i \in [0,1] : y_i) 1 | n_i = l\}| \end{aligned} \tag{3.6}$$

[4] Se desarrolla en el Apéndice B

[5] En el capítulo 5 de Jackson (2008), por ejemplo, demuestra que cuando $\alpha = 0$ la distribución toma la forma $F(n) = 1 - \left(\frac{m}{d}\right)^2$, que es la CDF del proceso *preferential attachment*. Por otro lado, cuando $\alpha = 1$ la distribución se comporta como $F(n) = 1 - e^{-\frac{d-m}{m}}$, que es la CDF del proceso *random attachment*

Dichas medidas las podemos interpretar como probabilidades condicionadas. Así, leemos a $x(l)$ como la probabilidad de que los nodos $i \in [0,1]$ con grado $n_i = l$ elijan con probabilidad $x_i = 1$ el servicio con publicidad, y de igual manera leemos a $y(l)$, pero con respecto a la elección del servicio sin publicidad con probabilidad $y_i = 1$. Así, tenemos que si todos los nodos con grado $n_i = l$ con $i \in [0,1]$ eligen alguna versión del servicio resulta que $x(l) + y(l) = 1$.

3.1.2. Mercado

Se supondrá que dependiendo de la versión del servicio que el consumidor elija será el efecto de la externalidad del consumo de sus vecinos. Si el consumidor elige la versión con publicidad su utilidad incrementa en γ_x por cada unidad consumida por cada uno de sus vecinos que decidieron adquirir alguna de las versiones del servicio. Si el consumidor elige consumir la versión del servicio sin publicidad, la utilidad del individuo incrementa γ_y por cada unidad consumida por cada uno de sus vecinos que decidieron consumir alguna de las versiones del servicio, sin importar la versión. Supondremos que el hecho de pagar por la versión *no-ads* del servicio implica que el efecto de la externalidad es mayor a la recibida en caso de adquirir la version ads del servicio, es decir, $\gamma_y > \gamma_x$.

3.1.3. Monopolio

Un monopolio produce z unidades de un bien con costos marginales constantes $c > 0$, y cantidades discretas de un servicio sin costos de producción, que ofrece en dos versiones. El servicio y el bien no están relacionados. Una de las versiones del servicio cuenta con anuncios publicitarios (*ads*), mientras que la otra no (*no-ads*). La publicidad que se anuncia en la versión del servicio *ads* es de tipo informativa, de la cual el monopolista elige el grado de información $a \in [0,1]$. Bajo la propuesta de Johnson & Myatt (2006), la publicidad informativa tiene dos efectos: (i) incrementar la valoración media de la distribución de valoraciones del bien publicitado y, (ii) incrementar la dispersión de las valoraciones. Un tipo de bienes que tiene este efecto son los bienes de nicho, o de lujo. En ellos, al observar las verdaderas características, los individuos se separan en grupos dependiendo de sus precios de reserva.

Así, se supondrá que el objetivo de elegir el grado de información de la publicidad es informar a los individuos sobre una valoración del bien z, $\hat{\omega} \in [\underline{\omega}, \bar{\omega}]$, a la cual me referiré como *calidad publicitada del bien*. Puede entenderse a $\hat{\omega}$ como una señal pública resultado de una pre-campaña publicitaria. Este nivel $\hat{\omega}$, se implementan con costos crecientes y convexos $\Psi(\hat{\omega}) = \frac{b\hat{\omega}^2}{2}$, tal que $b > 0$.

3.1.4. Consumidores

El conjunto de consumidores potenciales está conformado por individuos $i \in [0, 1]$ que interactúan dentro de una red social. Cada individuo i tiene una valoración del servicio θ_i y una del bien ω_i. Las valoraciones del servicio se encuentran dentro del soporte $\theta_i \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}] \subset \mathbb{R}_+$ distribuidas de manera independiente de acuerdo a una distribución uniforme $U[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$. Las valoraciones del bien se encuentran dentro del soporte $\omega_i \in [\underline{\omega}, \bar{\omega}] \subset \mathbb{R}_+$ distribuidos independientemente de acuerdo a la distribución uniforme $U[\underline{\omega}, \bar{\omega}]$ con media μ_ω.

Los individuos no conocen su verdadera valoración del bien, sin embargo, antes de tomar desiciones de consumo del bien z, forman expectativas de su valoración considerando la señal exógena y el grado de información de la publicidad aplicando la regla de Bayes:[6]

$$E[\omega_i|\hat{\omega}] = a\hat{\omega} + (1-a)\mu_\omega \tag{3.7}$$

Notemos que el mayor grado de información de la publicidad, $a = 1$, genera en el individuo que la observa la creencia de que su valoración es $\hat{\omega}$, mientras que un grado menor de información en la publicidad$a = 0$ por ejemplo, el individuo no aprende sobre las características del bien y mantiene sus creencias iniciales, μ_ω. También suponemos que para cada individuo que observa publicidad el grado de información de la publicidad $a \in [0, 1]$ genera un costo

[6]Tal como la aplicación 2 de Johnson & Myatt (2006), sin embargo, nosotros consideraremos que $\hat{\omega}$ es endógena

creciente, común para todos, de $\xi(a)$, donde consideraremos que $\xi(0) = 0$ y $\xi(1) = \hat{\xi} > 0$.

Sólo el consumo del servicio ocurre dentro de la red social y genera externalidades de red locales (positivas). Así, cada individuo recibe utilidad del consumo del servicio que hacen los individuos con los que interactúa localmente en la red, a lo que nos referiremos como sus *vecinos*. Cada individuo tiene una demanda unitaria tanto del bien como del servicio. Si la utilidad esperada de consumir el servicio es superior o igual a la desutilidad que le genera pagar el precio del servicio, el individuo decide adquirir la version *no-ads*. Por otro lado, si la utilidad esperada de consumir el servicio es superior a la desutilidad que le genera el costo de ver publicidad, el individuo decide adquirir el servicio en su version *ads*. Por su parte, si la utilidad esperada de consumir el bien es mayor o igual a la desutilidad que le genera pagar su precio, entonces el consumidor decide comprar el bien.

Se considera que los individuos entran al mercado del bien sólo si deciden adquirir alguna version del servicio; por ende, se asumirá que el individuo no obtiene utilidad si no adquiere ninguna version de éste. Cabe señalar que se trabajará con el supuesto de que todos los individuos en la red adquieren al menos alguna versión del servicio, la motivación a este supuesto detallará en el capítulo 4.

Utilidad esperada del consumidor

Cada consumidor se enfrenta a tres estados de la naturaleza con respecto al consumo del servicio. En uno de ellos el consumidor i elige la versión del servicio *ads* y obtiene la utilidad:

$$u_i(\cdot) = \theta_i - \hat{\xi} + \gamma_x \int_{j \in N_i} [x_j(l) + y_j(l)]\, dj \tag{3.8}$$

En otro estado de la naturaleza, el individuo i elige la versión del servicio *no-ads* y obtiene la utilidad:

$$u_i(\cdot) = \theta_i - p + \gamma_y \int_{j \in N_i} [x_j(l) + y_j(l)]\, dj \tag{3.9}$$

Finalmente, en el restante estado de la naturaleza, el individuo i no adquiere ninguna versión del servicio y no compra el bien, por lo que no obtiene utilidad, o simplemente $u_i(\cdot) = 0$.

En los estados de la naturaleza (3.8) y (3.9), cada individuo genera expectativas sobre el grado esperado de sus vecinos de acuerdo con la distribución $q(l|n_i)$, la distribución de grado de los vecinos cercanos. Por tanto, la utilidad esperada de la externalidad de consumo del servicio de los vecinos de i, con $\gamma \in \{\gamma_x, \gamma_y\}$, viene dada por:

$$\begin{aligned} E_Q\left[\gamma \int_{i\in N_i} [x_j(l) + y_j(l)]dj\right] &= \gamma\, n_i\, K \\ \text{Donde: } K = \int_{l\in L} &[(x(l) + y(l))q(l|n_i)]dl \in [0,1] \end{aligned} \tag{3.10}$$

Paralelo a la decisión de adquirir alguna versión del servicio, cada individuo i toma desiciones de consumo del bien z. Recordemos que una condición para que los individuos adquieran el bien es que hayan elegido alguna versión del servicio, así, independientemente del estado (3.8) o (3.9) se toma la decisión $z(a) \in \{z(a^*), z(0)\}$ tal que $0 \leq z(a^*) + z(0) \leq 1$ en estrategias puras[7], por lo que la utilidad de adquirir el servicio viene dada por:

$$u_i(\cdot) = z(a)[E[\omega|\hat{\omega}] - p_z^*] \tag{3.11}$$

Considerando los posibles estados de la naturaleza con respecto al consumo del servicio, las expectativas de consumo de los vecinos de i y la decisión de consumo del bien z, tenemos que cada individuo i tiene una utilidad esperada descrita por:

$$\begin{aligned} U_i(x_i, y_i, z(a)) =& x_i\left[\theta_i - \hat{\xi} + \gamma_x n_i K^*\right] + y_i\left[\theta_i - p^* + \gamma_y n_i K^*\right] \\ &+ z(a)\left[E[\omega_i|\hat{\omega}] - p_z^*\right] \end{aligned} \tag{3.12}$$

[7] Las alternativas consideradas son $z(a^*) = 1$ con $z(0) = 0$, $z(a^*) = 0$ con $z(0) = 1$, y $z(a^*) = 0$ con $z(0) = 0$

3.2. Juego en dos etapas

El interés en este trabajo es encontrar los equilibrios de Nash perfectos Bayesianos en estrategias puras (PBNE) del siguiente juego. El monopolio y los individuos están relacionados mediante un juego en dos etapas con información completa:

I : El monopolista elige el precio del servicio *no-ads* $p \geq 0$, el precio del bien z $p_z \geq 0$, el nivel de $\hat{\omega} \in [\underline{\omega}, \bar{\omega}]$ y, el grado de información $a \in [0,1]$ de la publicidad del bien z que expondrá en la version del servicio *ads*.

II : Los individuos observa la elección del monopolista $(p^*, p_z^*, \hat{\omega}^*, a^*)$ y toma desiciones simultáneas de consumo sobre el bien y el servicio $(x, y, z(0), z(a))$. Donde:

$$x + y = 1$$
$$x = |\{i \in [0,1] : x_i = 1\}|$$
$$y = |\{i \in [0,1] : y_i = 1\}|$$
$$z(0) \in [0,1]$$
$$z(a) \in [0,1]$$

Respectivamente, x_i y y_i representan las probabilidades de adquirir la version con publicidad y sin publicidad que cada individuo i asigna después de observar $(p, p_z, \hat{\omega}, a)$. Ya sea que x_i ó y_i sean igual a uno, representan la elección con certeza de una versión del servicio, con publicidad si $x_i = 1$ y sin publicidad si $y_i = 1$. Por su parte, x es la fracción de individuos que eligen con certeza la versión del servicio con publicidad, mientras que y es la fracción de los que eligen con certeza la versión del servicio sin publicidad. Así, $x + y = 1$ además de representar el total de individuos en la red representa la composición del mercado del servicio. Por otro lado, en el mercado del bien z, $z(0)$ y $z(a)$ con $a \in [0,1]$, representan la probabilidad de que los individuos decidan consumir el bien si se decide por adquirir la versión del servicio sin publicidad o con publicidad, respectivamente.

Capítulo 4

Elección optima

Es pertinente remarcar el interés sobre la búsqueda de equilibrios bajo el concepto de equilibrios de Nash perfectos Bayesianos en estrategias puras (PBNE). En el modelo expuesto puede ocurrir que los individuos no quieran adquirir ninguna versión del servicio; sin embargo, el interés de este trabajo es conocer cómo cambia la composición del mercado del servicio entre versiones adquiridas cuando varían los parámetros del modelo. De esta manera, como se hizo mención en la sección anterior, por simplicidad se supondrá que los costos de observar publicidad son tan bajos que todos los individuos adquirirán al menos la version del servicio con publicidad. Por tanto, si ocurre que es posible adquirir la versión del servicio con publicidad para la combinación del grado mínimo en la red m y la valoración mínima del servicio $\underline{\theta}$, entonces se garantiza que para cualquier combinación de grado y valoración del servicio (n_i, θ_i) también ocurra.

Supuesto 1: El costo a la exposición de publicidad con el grado máximo de información satisface $\hat{\xi} \leq \underline{\theta} + (\gamma_x \cdot m \cdot \epsilon)$, para algún $\epsilon > 0$.

Notemos que de (3.12), la correspondencia de mejor respuesta para cada individuo tendrá que $x_i = 0$ siempre que $\theta_i - \hat{\xi} + \gamma_x n_i K^* < 0$, lo cual nunca ocurrirá, ya que al suponer que el costo por observar publicidad es menor o igual que la combinación de valoración mínima con grado mínimo en la red, ponderado por la externalidad, se garantiza que, para cualquier combinación de valoración y de grado y cualquier $\epsilon > 0$, dicho costo nunca impida elegir la versión con publicidad. Así, el *Supuesto 1* implica que de (3.6) tengamos $x(l) + y(l) = 1$ para todo $l \in L$. De esta manera, notemos que K, el consumo esperado de los vecinos para cualquier individuo i de la red, es de hecho $K^* = \int_{l \in L} q(l|n_i)dl = 1$.

4.1. Monopolista

4.1.1. Decisión optima sobre publicidad

La estrategia de precio del bien z, condicionada al nivel de publicidad, es igualar $p_{z|a}$ a la valoración esperada por el consumidor que ve la señalización $\hat{\omega}$ y el grado de información de la publicidad a, es decir $p_{z|a} = E[\omega|\hat{\omega}]$:

$$p_{z|a} = a\hat{\omega} + (1-a)\mu_\omega \tag{4.1}$$

Dada ésta estrategia de precios y considerando que la demanda vendrá determinada por la probabilidad de que el precio del bien $p_{z|a}$ sea menor o igual a la valoración esperada del bien $E[\omega|\hat{\omega}]$, tenemos que la demanda del bien en función del grado de información, $z(a)$, está dada por:

$$z(a) = 1 - \left(\frac{p_{z|a} - (1-a)\mu_\omega}{a} \right) \tag{4.2}$$

Así, dada la estructura de costos de producir el bien z, $C(z) = cz$, y los costos de la *calidad publicitada del bien*, $\Psi(\hat{\omega})$, los beneficios de producir z en función del grado de información de la publicidad, están dados por:

$$\pi_z(a, \hat{\omega}) = z(a)\left(a\hat{\omega} + (1-a)\mu_\omega - c\right) - \frac{b}{2}\hat{\omega}^2 \tag{4.3}$$

Se considera que en primer lugar se elige el nivel de señalización independientemente del grado de información de la publicidad $a \in [0,1]$, por lo que se puede considerar a $\Psi(\hat{\omega})$ como costos hundidos.

Notemos que (4.1) es lineal con respecto a al grado de información a y por tanto podemos decir que ésta es convexa y además cuasi-convexa. Esta característica nos permite analizar la función de beneficios (4.3) en el marco de análisis de Johnson & Myatt (2006), específicamente podemos aplicar los resultados de su *Proposición 4*, que nos garantiza que los beneficios (4.3) son convexos con respecto al grado de información.

Lema 1. *(Johnson & Myatt (2006)) Los beneficios obtenidos por la producción y venta del bien z a los consumidores que adquieren la versión con publicidad descritos en (4.3) son convexos con respecto al grado de información; por lo tanto, se maximizan en los extremos. Así:*

$$\begin{aligned} &a^* = 1, \textit{ si: } z(1)[\hat{\omega} - c] \geq z(0)[\mu_\omega - c] \qquad (4.4.1) \\ &a^* = 0, \textit{ si: } z(0)[\mu_\omega - c] > z(1)[\hat{\omega} - c] \qquad (4.4.2) \end{aligned} \tag{4.4}$$

Estos resultados nos permiten analizar el caso en el que el monopolista puede discriminar a través de crear versiones del servicio. En este sentido, se centrará el análisis cuando se maximiza en $a^* = 1$ y, llamaremos al equilibrio resultante **equilibrio discriminador**. Así, tenemos que:

$$\begin{aligned} &p_{z|1} = \hat{\omega} && (4.5.1) \\ &z(1) = 1 - \hat{\omega} && (4.5.2) \\ &z(0) = 1 \iff p_{z|0} \leq \mu_\omega && (4.5.3) \\ &p_{z|0} = \mu_\omega && (4.5.4) \end{aligned} \tag{4.5}$$

Donde, $p_{z|0}$ es el precio optimo para los individuos que no observan publicidad, es decir, para aquellos consumidores del servicio que elijan la versión *no-ads* del servicio. De esta manera, (4.5.4) se interpreta como la condición para que los consumidores que no observan publicidad decidan comprar el bien z. Así, tenemos que la empresa elegirá de manera óptima (4.5.4).

Los beneficios (4.3) en función de $\hat{\omega}$ con grado de información de la publicidad $a = 1$ son:

$$\pi_z(\hat{\omega}) = (1 - \hat{\omega})(\hat{\omega} - c) - \frac{b}{2}\hat{\omega}^2 \tag{4.6}$$

Así, la elección óptima de $\hat{\omega}$ viene dada por la Condiciones de Primer Orden (CPO) de (4.6), donde $\hat{\omega}^*$ safisface la Condición de Segundo Orden (CSO). Dicho nivel de al calidad publicitada del bien, la señalización, viene dada por:

$$\hat{\omega}^* = \frac{c+1}{2+b} \in [\underline{\omega}, \bar{\omega}] \tag{4.7}$$

Así, la empresa maximizará beneficios en el equlibrio discriminador cuando se cumpla (4.4.1) y (4.7).

La *Proposición 4* de Johnson & Myatt (2006) nos garantiza que se maximicen los beneficio con $a^* = 1$ y que $\hat{\omega} > \mu_\omega$, sin embargo, en nuestro problema $\hat{\omega}$ es endógena. En este sentido, si la elección óptima de $\hat{\omega}$ resulta en $\hat{\omega}^* < \mu_\omega$ deberá ser el caso en que el monopolista minimiza pérdidas. Por tanto, a diferencia de Johnson & Myatt (2006), a pesar de tener $\hat{\omega}^* < \mu_\omega$ en este trabajo la empresa no decidirá aplicar siempre $a^* = 0$.

Por simplicidad, supondremos que los beneficios comparados en el término izquierdo de (4.4.1) son positivos. En otras palabras, supondremos que la empresa elige $\hat{\omega}^*$ en los casos en que obtiene beneficios positivos. Y que $\hat{\omega}^* < 1$, ya que de (4.5), es una restricción para tener demanda positivas del bien z.

Supuesto 2: De la siguiente desigualdad, cuando $a^* = 1$, se cumple que el término del lado izquierdo es positivos; además $\hat{\omega}^* < 1$.

$$(1 - \hat{\omega}^*)(\hat{\omega}^* - c) \geq (\mu_\omega - c) \tag{4.8}$$

Donde $\hat{\omega}^*$ satisface $\hat{\omega}^* \in [\underline{\omega}, \bar{\omega}]$

4.1.2. Elección óptima del precio del bien z

Retomando la elección de cada uno de los individuos en la segunda etapa del juego con respecto al consumo del servicio (x, y), en el equilibrio discriminador, bajo el *Supuesto 1* y *2*, el mercado potencial del bien z es el total de los consumidores del servicio $x + y = 1$. Por la relación entre precio y demanda del servicio *no-ads*, tenemos que $y = y(p)$, por lo que $x + y(p) = 1$, y por tanto $x = x(p) = 1 - y(p)$.

La elección optima de precio del bien z resulta de la expectativa de precio en ambos segmentos, ponderado por el peso relativo de cada uno de ellos. Así, tenemos que la estrategia de determinación de precio del bien z deberá cumplir $p_z = x(p)p_{z|1} + y(p)p_{z|0}$, por lo que dado un precio óptimo del servicio p^*, tenemos que:

$$p_z^* = \hat{\omega}^* - y(p^*)(\hat{\omega}^* - \mu_\omega) \tag{4.9}$$

Por otro lado, así establecido el precio óptimo, la demanda del bien vendrá determinada por $z = x(p)(1 - \hat{\omega}) + y(p)$, es decir:

$$z^* = 1 - \hat{\omega}^*(1 - y(p^*)) \tag{4.10}$$

Finalmente, considerando como dados un precio óptimo del servicio sin publicidad p^* y su demanda correspondiente $y(p^*)$, de seguir el comportamiento descrito hasta ahora, llevará a la empresa a obtener los beneficios:

$$\begin{aligned} &\text{Del bien:} && \Pi_z^*(p^*) = z^*(p_z^* - c) - \Psi(\hat{\omega}^*) \\ &\text{Del servicio:} && \Pi_s^*(p^*) = y(p^*)p^* \end{aligned} \tag{4.11}$$

Donde los beneficios totales $\Pi^* = z^*(p_z^* - c) + y(p^*)p^* - \Psi(\hat{\omega}^*)$, resultan en:

$$\Pi^*(p^*) = [1 - \hat{\omega}^*(1 - y(p^*))] \cdot [(1 - y(p^*))\hat{\omega}^* + \mu_\omega y(p^*) - c] + y(p^*)p^* - \frac{b}{2}(\hat{\omega}^*)^2 \quad (4.12)$$

Para determinar la fijación de precio óptimo del servicio es necesario profundizar en el análisis de la demanda del servicio de acuerdo a las interacciones existentes dentro de la red social. En la siguiente sección se determinan dichas relaciones y se llega a una expresión para $y(p^*)$ que permita determinar el precio óptimo del servicio *no-ads* considerando las interacciones y expectativas de los consumidores dentro de la red. Sin embargo, cabe señalar que la determinación del precio óptimo vendrá caracterizado por las Condiciones de Primer Orden (CPO) y las Condiciones de Segundo Orden (CSO) de (4.12).

4.2. Resultados

Proposición 1. *Considerando el proceso híbrido de generación de redes estocásticas dinámicas descrito por (3.4) y (3.5), que los Supuestos 1 y 2 se satisfacen tales que* $k^* = 1$ *y* $\hat{\omega}^*$ *equivale a (4.7) y tenemos que* $p^* > \hat{\xi} > 0$. *Dada la función de utilidad de cada individuo descrita por (3.12), tenemos que:*

$$y(p) = 1 - F\left(\frac{p - \hat{\xi}}{\beta}\right) = \left(\frac{\beta m(1+\alpha)}{\alpha 2m\beta + (1-\alpha)(p - \hat{\xi})}\right)^{\frac{2}{1-\alpha}} \quad (4.13)$$

Una condición para el precio de equilibrio es que debe cumplir que el argumento de (4.13) se encuentre dentro del dominio de $F(\cdot)$, *es decir* $\frac{p^* - \hat{\xi}}{\beta} \in [m, d]$. *Asimismo, tenemos que el precio de equilibrio debe encontrarse también dentro del rango de las valoraciones del servicio, es decir* $p^* \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$. *Ello ocurrirá siempre que el precio se encuentre dentro del intervalo* $p^* \in (p_{min}, p_{max})$, *con* $p_{min} < p_{max}$, *donde:*

$$\begin{aligned} p_{min} &= m\beta + \hat{\xi} \geq \underline{\theta} \\ p_{max} &= d\beta + \hat{\xi} \leq \bar{\theta} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Se satisface que la demanda del servicio no-ads es decreciente con respecto al precio

$$\frac{dy(p)}{dp} = -\frac{1}{\beta} f\left(\frac{p^* - \hat{\xi}}{\beta}\right) = -\frac{2[\beta m(1+\alpha)]^{\frac{2}{1-\alpha}}}{[\alpha 2m\beta + (1-\alpha)(p-\hat{\xi})]^{\frac{3-\alpha}{1-\alpha}}} < 0 \tag{4.15}$$

Corolario 1. *Por el Supuesto 2, la relación entre el precio del bien z y el precio del servicio*[1] *de la versión no-ads es positiva e igual a:*

$$\frac{d\,p_z^*}{dp^*} = -\frac{d\,y(p^*)}{d\,p^*}\,(\hat{\omega}^* - \mu_\omega) > 0 \tag{4.16}$$

La relación entre la demanda del bien z y el precio del servicio es negativa y está dada por:

$$\frac{d\,z^*}{dp^*} = \hat{\omega}^* \cdot \frac{d\,y(p^*)}{d\,p^*} < 0 \tag{4.17}$$

Demostración. Las expresiones (4.16) y (4.17) son resultado inmediato de (4.9), (4.10) y (4.13). Sin embargo, el signo de (4.16) requiere demostrarse. Así, notemos que $z(0) > 0$ y $z(1) > 0$ por (4.5), por lo que de (4.4.1) tendremos cuatro posibilidades.

$$\begin{aligned}
&\text{i) } z(1)\underbrace{(\hat{\omega}^* - c)}_{(+)} \geq z(0)\underbrace{[\mu_\omega - c]}_{(+)} \iff \hat{\omega}^* > \mu_\omega > c \\
&\text{ii) } z(1)\underbrace{(\hat{\omega}^* - c)}_{(+)} \geq z(0)\underbrace{[\mu_\omega - c]}_{(-)} \iff \hat{\omega}^* > c > \mu_\omega \\
&\text{iii) } z(1)\underbrace{(\hat{\omega}^* - c)}_{(+)} \geq z(0)\underbrace{[\mu_\omega - c]}_{(0)} \iff \hat{\omega}^* > c = \mu_\omega \\
&\text{iv) } z(1)\underbrace{(\hat{\omega}^* - c)}_{(-)} \geq z(0)\underbrace{[\mu_\omega - c]}_{(-)} \iff \begin{cases} a) & c > \hat{\omega}^* > \mu_\omega \\ b) & c > \mu_\omega > \hat{\omega}^* \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

[1]Cabe señalar que de (4.16) podemos observar que ésta será negativa en el caso b) de iv) de (4.18). Sin embargo, en nuestro caso de estudio, es positiva.

Por el *Supuesto 2* tenemos que los beneficios de (4.4.1) se comportan ya sea como i), ii) o iii) de (4.18), por lo que en general tendremos que se cumple $\hat{\omega}^* > \mu_\omega$.

Considerando (4.5). El caso i) de (4.18), se cumple si $1 > \hat{\omega}^* > \mu_\omega > c > 0$ con $0 < b < \frac{c+1-2\mu_\omega}{\mu_\omega}$, si:

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad 0 < \mu_\omega \leq \frac{1}{2} \\ &\text{b)} \quad \frac{1}{2} < \mu < 1 \quad \text{con} \quad 2\mu_\omega - 1 < c < \mu_\omega \end{aligned} \tag{4.19}$$

El caso ii) y iii) de (4.18) se cumplen si $0 < b < \frac{1-c}{c}$. Particularmente,

$$\begin{aligned} &\text{ii)} \quad \mu_\omega < c < 1 \\ &\text{iii)} \quad 0 < c = \mu_\omega < 1 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Así, en los tres casos considerados de (4.18), por el *Supuesto 2* cumple que $\hat{\omega}^* > \mu_\omega$, lo que da el signo de (4.16). □

Resulta de interés conocer el efecto de la estructura de la red sobre los beneficios totales del monopolista, la estructura del mercado del servicio y la demanda del bien z. Conocer cómo afecta α, β y m a los beneficios totales, nos dará mas elementos para responder la pregunta de este trabajo. Por ello, es necesario optimizar (4.12) y analizar el precio de equilibrio, en función de los parámetros del modelo.

Dado el resultado de la *Proposición 1*, el precio p^* que maximiza (4.12) está caracterizado por la CPO:

$$\frac{4\hat{\omega}^{*2} + 2(\mu_\omega + p^*) - 2\hat{\omega}^*[2y(p^*)(\hat{\omega}^* - \mu_\omega) + \mu_\omega + c + 1]}{2\alpha\beta m + (1-\alpha)(p^* - \hat{\xi})} = 1 \tag{4.21}$$

Donde la CSO se satisface con:

$$\frac{\beta(\beta(3-\alpha)-4)}{4\hat{\omega}^*(\hat{\omega}^* - \mu_\omega)} < f\left(\frac{p^* - \hat{\xi}}{\beta}\right) < 1 \tag{4.22}$$

Un primer resultado de considerar el proceso específico descrito por (3.4) y (3.5) es que para cualquier combinación de parámetros que satisfagan las condiciones de primer y segundo orden, (4.21) y (4.22), reflejan que *los beneficios de la venta del servicio sin publicidad son cóncavos*, con lo que el precio caracterizado los maximiza.

De (4.21), se observa que la CPO no es lineal con respecto al precio del servicio *no-ads*, ello no implica que no se pueda conocer el efecto de α, β y m en el precio. Por el teorema de la función implícita es posible conocer $\frac{\partial p^*}{\partial \alpha}$, así como $\frac{\partial p^*}{\partial \beta}$ y $\frac{\partial p^*}{\partial m}$. Sin embargo, cabe señalar que se realizó un proceso de simulación para la obtención de p^* y para la verificación de los supuestos del modelo, así como para la corroboración de las CSO. [2]

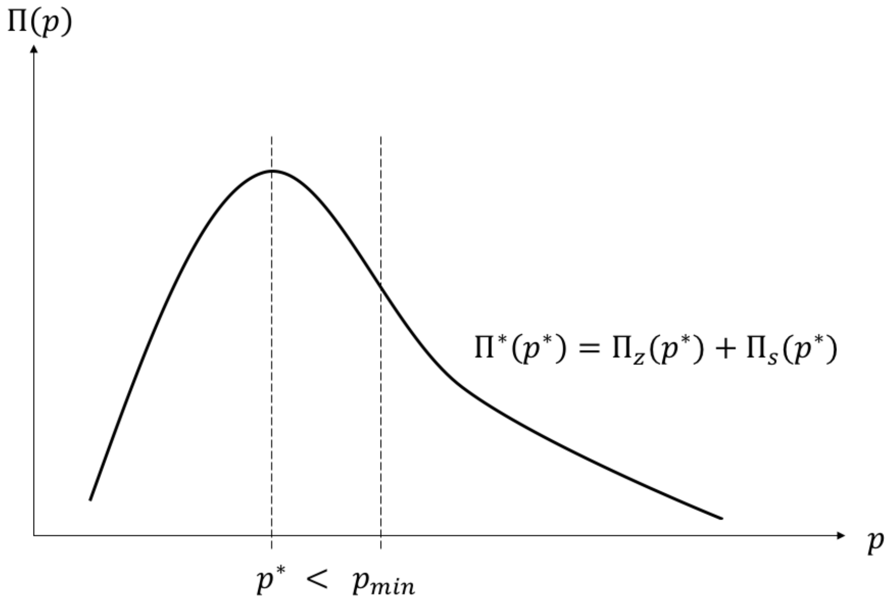
Utilizando los resultados de la demostración del *Corolario 1* se analizó el cumplimiento de las CPO y CSO estudiando los tres casos de interés de (4.18). El ejercicio de simulación refleja que el precio óptimo no se encuentra en el dominio[3] de $y(p)$. Para los tres casos considerados por el *Supuesto 2*, tenemos que el precio p^* caracterizado por (4.21) y (4.22) siempre es $p^* < p_{min}$, como se muestra en términos generales en la Figura 2. Por ello, para el caso de estudio del presente trabajo, es incorrecta la obtención de $\frac{\partial p^*}{\partial \alpha}$, así como $\frac{\partial p^*}{\partial \beta}$ y $\frac{\partial p^*}{\partial m}$ a partir del teorema de la función implícita a partir de (4.21).

[2] El detalle técnico y un ejemplo, pueden verse en el Apéndice D

[3] Cuando se optimiza sólo el mercado del servicio, en particular, el proceso híbrido generador de la red permite obtener una expresión lineal del precio en función de los parámetros del modelo. Ello facilita encontrar la magnitud y sentido del efecto de la variación de los parámetros sobre el precio de equilibrio, y de éste sobre las variables del modelo.

Sin embargo, al optimizar Π_s, para cualquier combinación de parámetros que satisfagan la correspondiente CPO y CSO ($\frac{1-\alpha}{\alpha} < \frac{2\beta m}{\hat{\xi}}$), tenemos que el precio óptimo también está fuera del dominio de $y(p)$, ya que $p^* = 2m\beta\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right) - \hat{\xi}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right) < p_{min} = m\beta + \hat{\xi}$.

Figura 4.1: Beneficios totales del monopolista



Corolario 2. *El precio p^* caracterizado por (4.21) y (4.22) que maximiza (4.12) no cumple con $p^* \in [p_{min}, p_{max}]$, donde p_{min} y p_{max} están definidos por (4.14). Por lo tanto, el problema de maximización de (4.12) tiene solución de esquina:*

$$p^* = p_{min} = m\beta + \hat{\xi} \tag{4.23}$$

Donde sólo los parámetros de externalidades, β, de grado mínimo en la red, m, y el costo de observar publicidad, $\hat{\xi}$, tienen efecto positivo sobre el precio óptimo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^*}{\partial \beta} &= m > 0 \\ \frac{\partial p^*}{\partial m} &= \beta > 0 \end{aligned} \tag{4.24}$$

Con $p^* = p_{min}$ resulta en $y(p_{min}) = 1$. De (4.12), los beneficios totales equivalen a:

$$\Pi^*(p_{min}) = m\beta + \hat{\xi} + (\mu_\omega - c) - \frac{b}{2}\hat{\omega}^{*2} \tag{4.25}$$

Por lo que se tendrán beneficios positivos siempre que:

$$m > \frac{b\hat{\omega}^{*2} - 2[\mu_\omega - c + \hat{\xi}]}{2\beta} \tag{4.26}$$

Finalmente, notemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi^*}{\partial \beta} &= \frac{\partial p^*}{\partial \beta} = m > 0 \\ \frac{\partial \Pi^*}{\partial m} &= \frac{\partial p^*}{\partial m} = \beta > 0 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Así, en la medida en que las diferencias entre las externalidades del consumo del bien estén más separadas, el precio de equilibrio será mayor comparado con el caso en que la diferencia entre ellas sea menor. Respecto al grado mínimo de la red, cuando éste es superior a un límite, establecido por (4.26), el monopolista tendrá beneficios positivos, de lo contrario tendrá pérdidas.

Al considerar (3.4) y (3.5), que los *Supuestos 1* y *2* se satisfacen (de tal forma que que $k^* = 1$ y que $\hat{\omega}^*$ equivale a (4.7)), tenemos que el parámetro α no tiene ningún efectos directo sobre el precio de equilibrio del problema de maximización de beneficios (4.12) para cualquier combinación de parámetros. Sin embargo, las condiciones de segundo orden que maximizan (4.12) descritas en (4.22) tiene las siguientes restricciones sobre los parámetros:

$$\begin{aligned} 0 \leq &\alpha \leq 1 \\ \frac{4}{3-\alpha} < &\beta < \frac{2}{3-\alpha} + 2\sqrt{\frac{4-\alpha}{(\alpha-3)^2}} \\ 0 < &\mu_\omega < (1+\beta) - \frac{\beta^2(3-\alpha)}{4} \\ \frac{1}{2}\left[\sqrt{\mu_\omega^2 - 4\beta - \beta^2(3-\alpha)} + \mu_\omega\right] < &\hat{\omega}^* < 1 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Se tiene que el parámetro α interviene de manera indirecta sobre el precio de equilibrio descrito en (4.23). Como se puede observar en las restricciones descritas en (4.28), las cotas que garantizan que el parámetro de la diferencia de las externalidades, β, cumpla con las condiciones

(4.21) y (4.22) de (4.12), se expresan en función del parámetro α.

$$
\begin{aligned}
&\text{Sean:} \quad \underline{\beta} = \frac{4}{3-\alpha} \quad \text{y} \quad \bar{\beta} = \frac{2}{3-\alpha} + 2\sqrt{\frac{4-\alpha}{(\alpha-3)^2}} \\
&\text{con} \quad \underline{\beta} < \beta < \bar{\beta} \\
&\forall \ \alpha \in [0,1] \\
&\qquad \frac{\partial \underline{\beta}}{\partial \alpha} = \frac{4}{(3-\alpha)^2} > 0 \\
&\qquad \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial \alpha} = \frac{2}{(3-\alpha)^2} + \frac{\alpha-5}{(\alpha-3)^3}\sqrt{\frac{(\alpha-3)^2}{4-\alpha}} > 0
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

De esta manera, en la medida en que incrementa α el intervalo en el que β cumple con (4.21) y (4.22) se desplaza a la derecha, el cual con $\alpha = 0$ va de $[1.5, 2]$, a $[2, 1+\sqrt{3}]$ cuando $\alpha = 1$. Si bien un mismo valor de β, dentro del intervalo, puede cumplir para diferentes valores de alpha, lo que implicaria que alpha no tiene efecto en el precio, en general en la medida en que α pasa de 0 a 1 se requiere de diferencias de externalidades $\beta = \gamma_y - \gamma_x > 0$ mayores, lo que implicaría la posibilidad de tener precios mayores en la medida en que alpha incrementa, y de igual forma precios menores.

En conclusión, dada la regla de precio óptimo $p^* = p_{min} = \beta m + \hat{\xi}$, existe un intervalo de precios óptimos deteminado por (4.28), especialmente por los límites de β que dependen de α. Así, dicho intervalo se desplaza a la derecha en la medida en que el parámetro α incrementa.

Capítulo 5

Conclusiones

Con los elementos descritos en la *Proposición 1*, y *Corolario 1* y *2* podemos concluir cómo interviene la consideración de *preferencias de enlace* y creación de enlaces de manera *puramente aleatoria* en la determinación del precio que maximiza los beneficios (4.12) del monopolista en el juego de dos etapas considerado en este trabajo.

Si bien no se considera parte del análisis de este trabajo, a diferencia de Johnson & Myatt (2006), en el modelo es posible maximizar los beneficios (específicamente minimizar pérdidas) de la venta del bien z incluso cuando la *calidad publicitada* del bien, $\hat{\omega}^*$, es menor a la valoración media del mismo, μ_ω. Es decir, incluso con $\mu_\omega > \hat{\omega}^*$ puede resultar óptimo elegir $a^* = 1$.

En el modelo, la relación inversa entre precio y cantidad demandada se satisface. De dicha relación y del dominio de la PDF y CDF del proceso generador de red descrito por (3.4) y (3.5) surge una acotación del dominio de precios para la función de demanda del servicio *no-ads*. Dada la función de demanda $y(p)$ descrita por (4.13), tal que $p \in [p_{min}, p_{max}]$, se optimiza la función de beneficios totales del monopolista descrita en (4.12) con los parámetros que satisfacen las condiciones de primer y segundo orden y se otiene que el precio que la maximiza está fuera del dominio de la función de demanda.

En primer lugar, el problema de maximización (4.12) tiene solución de esquina con $p^* =$

p_{min}, precio que depende directamente del grado mínimo de la red m, del parámetro que mide la diferencia entre externalidades de consumo del servicio, $\beta = \gamma_y - \gamma_x > 0$ y, del costo de observar la publicidad con grado de información $a^* = 1$, $\hat{\xi}$. En la medida en que éstos aumenten, aumentará tanto el precio optimo del servicio *no-ads* como los beneficios totales del monopolista $\Pi^*(p^*)$. Así mismo, existe un grado mínimo de la red, descrito por (4.26), para el que los beneficios serán positivos.

En segundo lugar, el efecto del parámetro α sobre el precio y beneficios del monopolista no es directo. El parámetro α permite definir un intervalo de valores para β, para los cuales es posible garantizar la concavidad de la función de beneficios totales. Los límites de dicho intervalo son crecientes con respecto al parámetro α, por ello, en promedio, se espera que los precios sean mayores con forme incrementa α. Es decir, en la medida en que la distribución de grado de la red pase de un proceso de formación de links puramente aleatorio a un proceso con preferencias en la formación de links, tendremos que en promedio el precio del servicio *no-ads* será menor.

Si el proceso con *random attachment* ($\alpha = 1$) se acerca más a un proceso con *preferential attachment* ($\alpha = 0$), en la medida en que exista mayor presencia de las preferencias de conexión, el precio promedio tendrá que ser menor. En primera instancia resulta contraintuitivo ya que si existiese mayor interacción social por la existencia de grupos, el efecto de las externalidades sería mayor en la utilidad de los individuos y podría fijarse un precio mayor para extraer mas excedente al consumidor.

Sin embargo, como sugieren diversos autores, por ejemplo Jackson (2008), el proceso híbrido considerado obtiene buenos resultados en la creación de nodos centrales, nodos muy bien conectado en comparación a un nodo promedio en la red; pero presenta problemas en la generación de triángulos de amistad, es decir, formación de grupos en los que los individuos se conocen mutuamente en la red local. En este sentido, en ausencia de estos patrones de agrupameinto se interpreta que pasar de un proceso bajo *random attachment* a uno bajo *preferential attachment* es que el precio promedio del servicio *no-ads* tiene que bajar para maximizar los beneficios por la venta del mismo, es decir, la interacción social incrementa sólo para los nodos centrales, no para la mayoría de nodos en la red.

El hecho de que en la red los amigos de mis amigos no sean mis amigos (es decir, que no existan triángulos de amistad) implica una disminución de las interacciones sociales que es sustituida por la presencia de nodos centrales muy bien conectados. Esto es así, ya que bajo el criterio de preferencias de enlace, los individuos están más interesados en elegir a los nodos centrales como sus amigos, y sólo éstos nodos centrales (pocos en la red) son los que interactúan con una mayor cantidad de individuos en la sociedad.

Por ende, 1) si la mayoría de nodos en la red tiene un grado bajo, cercano a m, y el efecto de las externalidades del consumo del servicio son menores (ponderado por su grado, como en (3.12)) y, 2) pocos nodos (los nodos centrales) tiene un grado muy alto en la red y sólo a estos nodos las externalidades de red les favorecen de manera importante en su utilidad (pues su grado es alto), entonces los beneficios del monopolista están limitados por el grado mínimo en la red m y la diferencia de externalidades, β, ya que en el proceso híbrido generador de la red no existe un mecanismo que genere triángulos de amistad. Esto último, de primer impresión ayudaría a incrementar el grado medio de los nodos poco conectados, y por ende a incrementar el precio y los beneficios del monopolista.

Así, una posible extensión a este trabajo es la consideración de un proceso aleatorios dinámico que genere redes en las que los patrones de agrupamiento sean parte importante del proceso. De esta forma, podría analizarse directamente la relevancia de los triángulos de amistad dentro de los equilibrios que pudieran surgir.

Otra perspectiva de análisis es la consideración de funciones de densidad de probabilidad ,y de probabilidad acumulada, que no consideren un soporte estrictamente positivo. Por ejemplo, pensar en una red ponderada donde en lugar de grado (número de amigos) tenemos “fuerza” de conexión (magnitud asociada a la calidad de la amistad), que en principio no tiene restricción en el signo, podría ayudar a identificar solución interna al problema de maximización del present trabajo.

Apéndices

A. Grado del nodo i en el tiempo t

Tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial n_i(t)}{\partial t} &= \alpha\left(\frac{m}{t}\right) + (1-\alpha)\left(\frac{n_i(t)}{2t}\right)\\ &= \frac{\alpha 2m + (1-\alpha)(n_i(t))}{2t}\end{aligned}$$

Resolviendo por variables separables, tenemos que:

$$\int \frac{2}{\alpha 2m + (1-\alpha)(n_i(t))} dn = \int \frac{1}{t} dt$$

Si $u = \alpha 2m + (1-\alpha)(n_i(t))$, entonces:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dn} &= 1-\alpha, \text{ y pot tanto}\\ dn &= \frac{du}{1-\alpha}\end{aligned}$$

Así, tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{2}{1-\alpha}\int \frac{1}{u} du &= \int \frac{1}{t} dt\\ \ln(u)^{\frac{2}{1-\alpha}} &= \ln(t) + c_1\\ u^{\frac{2}{1-\alpha}} &= te^{c_1} = tc_2\\ u &= t^{\frac{1-\alpha}{2}} c_3\\ \alpha 2m + (1-\alpha)(n_i(t)) &= t^{\frac{1-\alpha}{2}} c_3\\ n_i(t) &= \frac{t^{\frac{1-\alpha}{2}} c_3}{1-\alpha} - \frac{\alpha 2m}{1-\alpha}\end{aligned}$$

Tenemos que cada $i \leq t$ y que cuando $t = i$, nuestra condición inicial es $n_i(i) = m$, asi:

$$\begin{aligned}
\frac{i^{\frac{1-\alpha}{2}} c_3}{1-\alpha} - \frac{\alpha 2m}{1-\alpha} &= m \\
\frac{i^{\frac{1-\alpha}{2}} c_3}{1-\alpha} &= m + \frac{\alpha 2m}{1-\alpha} \\
c_3 &= \frac{1-\alpha}{i^{\frac{1-\alpha}{2}}} \left(m + \frac{\alpha 2m}{1-\alpha} \right)
\end{aligned}$$

Finalmente, al sustituir c_3, tenemos que :

$$\phi_t(i) = n_i(t) = \left(m + \frac{2\alpha m}{1-\alpha} \right) \left(\frac{t}{i} \right)^{\frac{1-\alpha}{2}} - \frac{2\alpha m}{1-\alpha}$$

B. PDF y CDF del proceso híbrido

Tenemos que:

$$\phi_t(i) = n_i(t) = \left(m + \frac{2\alpha m}{1-\alpha}\right)\left(\frac{t}{i}\right)^{\frac{1-\alpha}{2}} - \frac{2\alpha m}{1-\alpha}$$

Todos los nodos que nacieron antes de i tiene un grado mayor o igual a l, por lo que al despejar al nodo i con grado l tenemos que la fracción de nodos con grado mayor a l viene dada por:

$$\phi_t^{-1}(l) = t\left(\frac{m + \frac{\alpha 2m}{1-\alpha}}{l + \frac{\alpha 2m}{1-\alpha}}\right)^{\frac{2}{1-\alpha}} \tag{1}$$

Al restar al total de nodos t la expresión (1) tendremos la fracción de nodos con grado menor o igual a l, que es lo mismo que t multiplicadopor la CDF del proceso:

$$tF(l) = t\left(1 - \left(\frac{m + \frac{\alpha 2m}{1-\alpha}}{l + \frac{\alpha 2m}{1-\alpha}}\right)^{\frac{2}{1-\alpha}}\right) \tag{2}$$

Ahora, al derivar $F(l)$, con respecto a l, tendremos a $f(l)$, la PDF asociada. Entonces, con

$$u = \frac{m + \frac{\alpha 2m}{1-\alpha}}{l + \frac{\alpha 2m}{1-\alpha}}$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial l} &= -\left(\frac{m + \frac{\alpha 2m}{1-\alpha}}{l + \frac{\alpha 2m}{1-\alpha}}\right)\frac{1}{l + \frac{\alpha 2m}{1-\alpha}}\\ &= -u\frac{1}{l + \frac{\alpha 2m}{1-\alpha}}\end{aligned}$$

Y entonces:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(l)}{\partial l} &= -\frac{\partial F(u)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial l}\\ &= \left(-\frac{2}{1-\alpha}u^{\frac{2}{1-\alpha}-1}\right)\left(-u\frac{1}{l + \frac{\alpha 2m}{1-\alpha}}\right)\\ &= \frac{2}{\alpha 2m + (1-\alpha)l}u^{\frac{2}{1-\alpha}}\end{aligned}$$

Finalmente, tenemos que la PDF de la distribución de grado es igual a:

$$f(l) = \frac{2}{\alpha 2m + (1-\alpha)l} \left(\frac{m + \frac{\alpha 2m}{1-\alpha}}{l + \frac{\alpha 2m}{1-\alpha}} \right)^{\frac{2}{1-\alpha}} \tag{3}$$

Notemos que el soporte de ambas funciones está determinado por el periodo en que nacen nodos, esto es de $t = m$ a $t = d$, así, el soporte está representado por el conjunto: $\{m, m + 1, ..., d\}$

C. Demostración Proposición 1

Por el Supuesto 1 y de la función de utilidad (3.12), con $k^* = 1$ y $\beta = \gamma_y - \gamma_x > 0$, tenemos que la correspondencia de mejor respuesta en estrategias puras de cada individuo, viene dada por:

$$\begin{aligned} x_i(p) &= 1 \quad \text{si} \quad \frac{\theta_i - p}{\gamma_y} < n_i < \frac{p - \hat{\xi}}{\beta} \\ y_i(p) &= \begin{cases} 1 \quad \text{si} \quad n_i > \dfrac{p - \hat{\xi}}{\beta} \\ 0 \quad \text{si} \quad n_i < \dfrac{p - \theta_i}{\gamma_y} \end{cases} \end{aligned} \tag{4}$$

Por el *Supuesto 1* tenemos que $x_i(p) + y_i(p) = 1$. En el agregado tendremos que $x(p) + y(p) = 1$. Recordemos que para llegar a (4.9) obtuvimos que $x = x(p) = 1 - y(p)$. Por ende, al considerar expectativas de grado de $y_i(p)$ de (4), tenemos:

$$y(p) = Prob\left(n_i > \frac{p - \hat{\xi}}{\beta}\right) = 1 - F\left(\frac{p - \hat{\xi}}{\beta}\right) \tag{5}$$

Por lo tanto, la condicion para que el precio p se encuentre dentro del soporte de $F(\cdot)$ es que $\frac{p-\hat{\xi}}{\beta} \in [m, d]$. De lo cual se deduce el precio mínimo y máximo de (4.14)

D. Programa para simulación

- Para la simulación se utilizó Python 2.7.
- En el código se eliminaron acentos (tíldes)
- Cuando se copia el código a un archivo *.py* los strings pasan entre acentos, no entre comillas simples.
- El programa también está disponible en `http://nbviewer.jupyter.org/gist/chris-1488/1d24895d2769f766b7b8f6106facdcb2`

```
############################################################
#                    SECCIoN EDITABLE                      #
############################################################
#-----------------------------------------------------------
# Parametros del modelo
#-----------------------------------------------------------
# EDITABLES:
#-------------

# Distribucion de grado:
#-----------------------------------------------------------

m=50          # Grado minimo en la red
d=10000       # Grado maximo en la red
alpha=0.5     # Parametro de combinacion de procesos

# Distribucion valoraciones (omega) del bien z :
#-----------------------------------------------------------
# Limite inferior de valoraciones del bien z
lim_inf_w=0.0
# Limite superior de valoraciones del bien z
lim_sup_w=1.2

# Distribucion de valoraciones (theta) del servicio :
#-----------------------------------------------------------
lim_inf_theta=0.0
lim_sup_theta=d

# Parametros de externalidades:
#-----------------------------------------------------------
gamma_x=0.6
# gamma_y= la elige el programa para garantizar CSO


# Caso de estudio:
```

```
#------------------------------------------------------------------
caso=3 # Poner caso=1, caso=2 o caso=3

# Valoracion media del bien z:
#------------------------------------------------------------------
# Â¡Â¡Â¡Â¡NO EDITAR!!!!
#------------------------------------------------------------------
mu_w= (lim_inf_w+lim_sup_w)/2.0


#####################################################
#      Las siguientes son funciones, NO EDITAR:       #
#####################################################

#------------------------------------------------------------------
# Modulos utilizados, NO EDITAR
#------------------------------------------------------------------

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline

#------------------------------------------------------------------
# Funcion PDF
#------------------------------------------------------------------

def f_x(x,a,m):
    '''
    PDF

    x: grado
    a: parametro de combonacion de procesos
    m: grado minimo de red
    '''
    num=m*(1.0+a)
    den=x*(1.0-a)+2.0*a*m
    exp_in=(3.0-a)/(2.0)
    exp_out=(2.0)/(1.0-a)
    fx=2.0*(((num)/((den)**(exp_in)))**(exp_out))
    return fx

#------------------------------------------------------------------
# Funcion de demanda del servicio no-ads
#------------------------------------------------------------------

def y_p(p,xi,beta,a,m):
```

```
    '''
    Demanda del servicio no-ads

    p: precio del servicio no-ads
    xi: costo de observar publicidad
    beta: diferencia externalidades: gamma_y-gamma_x>0
    a: parametro de combonacion de procesos
    m: grado minimo de red
    '''
    x=(p-xi)/(beta)
    num=m*(1.0+a)
    den=x*(1.0-a)+2.0*a*m
    exp_out=(2.0)/(1.0-a)
    yp=(((num)/(den))**(exp_out))
    return yp

#-----------------------------------------------------------
# Derivada demanda del servicio no-ads c.r. al precio:
#-----------------------------------------------------------

def dydp(p,xi,beta,a,m):
    '''
    Derivada de la funcion de demanda
    del servicio no-ads con respecto al precio

    mu_w: media de las valoraciones del bien z
    w_opt: calidad publicitada del bien z optima
    p: precio del servicio no-ads
    xi: costo de observar publicidad
    beta: diferencia externalidades: gamma_y-gamma_x>0
    a: parametro de combonacion de procesos
    m: grado minimo de red
    '''
    x=(p-xi)/(beta)
    dy_dp=-(1.0/(beta))*f_x(x,a,m)
    return dy_dp

#-----------------------------------------------------------
# Funcion H para aproximacion por Newton-Raphson:
#-----------------------------------------------------------

def h_p(p,xi,beta,a,m,w,mu,c):
    '''
    Para aproximacion:

    p: precio del servicio no-ads
```

```
    xi: costo de observar publicidad
    beta: diferencia externalidades: amma_y−gamma_x>0
    a: parametro de combonacion de procesos
    m: grado minimo de red
    w: calidad publicitada del bien z optima
    mu: media de las valoraciones del bien z
    c: costo de produccion de una unidad del bien z
    '''
    #x=(p−xi)/(beta)
    num_a=4.0*(w**2)+2.0*(mu+p)
    num_b=2.0*w*((2.0*(y_p(p,xi,beta,a,m))*(w−mu))\
                +mu+c+1.0)
    den=beta*a*2.0*m+(1.0−a)*(p−xi)
    hp=(num_a−num_b)/(den)−1.0
    return hp

#−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−
# Funcion H' para aproximacion por Newton−Raphson:
#−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

def dh_dp(p,xi,beta,a,m,w,mu,c):
    '''
    Derivada de H para aproximacion

    p: precio del servicio no−ads
    xi: costo de observar publicidad
    beta: diferencia externalidades: gamma_y−gamma_x>0
    a: parametro de combonacion de procesos
    m: grado minimo de red
    w: calidad publicitada del bien z optima
    mu: media de las valoraciones del bien z
    c: costo de produccion de una unidad del bien z
    '''
    #x=(p−xi)/(beta)
    num_a=4.0*(w**2)+2.0*(mu+p)
    num_b=2.0*w*(2.0*y_p(p,xi,beta,a,m)*(w−mu)+mu+c+1)
    den=beta*a*2.0*m+(1.0−a)*(p−xi)
    num_1=(2.0−4.0*w*(w−mu)*dydp(p,xi,beta,a,m))*den
    num_2=(1.0−a)*(num_a−num_b)
    dhdp=(num_1−num_2)/(den**2.0)

    return dhdp

#−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−
# Funcion: Demanda sel servicio ads:
#−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−
```

```
def x_p(p, xi, beta, a, m):
    '''
    Demanda del servicio ads

    p: precio del servicio no-ads
    xi: costo de observar publicidad
    beta: diferencia externalidades: gamma_y-gamma_x>0
    a: parametro de combonacion de procesos
    m: grado minimo de red
    '''
    xx=(p-xi)/(beta)
    num=m*(1.0+a)
    den=xx*(1.0-a)+2.0*a*m
    exp_out=(2.0)/(1.0 - a)
    xp=1-(((num)/(den))**(exp_out))
    return xp

#--------------------------------------------------------------------
# Funcion: Demanda del bien z:
#--------------------------------------------------------------------

def z_p(w_opt, p, xi, beta, a, m):
    '''
    Demanda del bien z

    w_opt: calidad publicitada del bien z optima
    p: precio del servicio no-ads
    xi: costo de observar publicidad
    beta: diferencia externalidades gamma_y-gamma_x>0
    a: parametro de combonacion de procesos
    m: grado minimo de red
    '''
    xx=(p-xi)/(beta)
    num=m*(1.0+a)
    den=xx*(1.0-a)+2.0*a*m
    exp_out=(2.0)/(1.0 - a)
    xp=1.0-(((num)/(den))**(exp_out))
    zp=1.0-w_opt*xp
    return zp

#--------------------------------------------------------------------
# Funcion: Precio del bien z:
#--------------------------------------------------------------------

def p_z(mu_w, w_opt, p, xi, beta, a, m):
```

```
    '''''
    Demanda del bien z

    mu_w: media de las valoraciones del bien z
    w_opt: calidad publicitada del bien z optima
    p: precio del servicio no-ads
    xi: costo de observar publicidad
    beta: diferencia externalidades gamma_y-gamma_x>0
    a: parametro de combonacion de procesos
    m: grado minimo de red
    '''''
    xx=(p-xi)/(beta)
    pz=y_p(p,xi,beta,a,m)*mu_w+\
    (1.0-y_p(p,xi,beta,a,m))*w_opt
    return pz

#--------------------------------------------------------------
# Funcion: Beneficios del bien z:
#--------------------------------------------------------------

def pi_z(b,c,mu_w,w_opt,p,xi,beta,a,m):
    '''''
    Beneficios del bien z

    b: parametro costo de producir calidad publicitada
    c: costo marginal de producir z
    mu_w: media de las valoraciones del bien z
    w_opt: calidad publicitada del bien z optima
    p: precio del servicio no-ads
    xi: costo de observar publicidad
    beta: diferencia externalidades gamma_y-gamma_x>0
    a: parametro de combonacion de procesos
    m: grado minimo de red
    '''''
    xx=(p-xi)/(beta)
    psi_w=(b/2.0)*(w_opt**2.0)
    Piz= z_p(w_opt,p,xi,beta,a,m)*\
    (p_z(mu_w,w_opt,p,xi,beta,a,m)-c)-psi_w
    return Piz

#--------------------------------------------------------------
# Funcion: Beneficios del servicio no-ads:
#--------------------------------------------------------------

def pi_s(p,xi,beta,a,m):
    '''''
```

```
    Beneficios del servicio no-ads

    p: precio del servicio no-ads
    xi: costo de observar publicidad
    beta: diferencia externalidades gamma_y-gamma_x>0
    a: parametro de combonacion de procesos
    m: grado minimo de red
    '''''
    x=(p-xi)/(beta)
    Pis=y_p(p,xi,beta,a,m)*p
    return Pis

#------------------------------------------------------------
# Funcion: Beneficios totales:
#------------------------------------------------------------

def Pi_t(b,c,mu_w,w_opt,p,xi,beta,a,m):
    '''''
    Beneficios totales (servicio no-ads) + (bien z)

    b: parametro costo de producir calidad publicitada
    c: costo marginal de producir z
    mu_w: media de las valoraciones del bien z
    w_opt: calidad publicitada del bien z optima
    p: precio del servicio no-ads
    xi: costo de observar publicidad
    beta: diferencia externalidades gamma_y-gamma_x>0
    a: parametro de combonacion de procesos
    m: grado minimo de red
    '''''
    x=(p-xi)/(beta)
    Pit=pi_z(b,c,mu_w,w_opt,p,xi,beta,a,m)+\
    pi_s(p,xi,beta,a,m)
    return Pit

#####################################################
#       NO EDITAR NADA DE LA SIGUIENTE SECCIoN      #
#####################################################

#------------------------------------------------------------
#                    !!!!NO EDITAR!!!!
# SOLAMENTE CORRER DESPUES DE ELEGIR CASO DE ESTUDIO
#------------------------------------------------------------
# Caso i), ii) y iii):
#---------------------------
```

```
# El siguiente codigo seleeciona de manera alatoria
# los valores de c y b, parametros de costos de
# produccion del bien z y de la calidad publicitada
# del bien, tales que cumplan
# con el Supuesto 2 del modelo.

if mu_w<=0:
    print 'Cambiar intervalo de w, se requiere: mu_w>0'
else:
    if caso==2:
        if mu_w<=0 or mu_w>=1:
            print 'Cambiar intervalo de w, \
            se requiere: 0 < mu_w < 1'
        else:
            c=np.random.uniform(mu_w,1)
            while c==mu_w:
                c=np.random.uniform(mu_w,1)
            b=np.random.uniform(0,(1.0-c)/(c))
            while b==0:
                b=np.random.uniform(0,(1.0-c)/(c))
            w_hat=(c+1.0)/(b+2.0)
            print 'Caso ii) con: w_hat > c > mu_w'
            print 'w_hat=',w_hat
            print 'c=',c
            print 'mu_w=',mu_w
    elif caso==3:
        if mu_w<=0 or mu_w>=1:
            print 'Cambiar intervalo de w, \
            se requiere: 0 < mu_w < 1'
        else:
            c=mu_w
            b=np.random.uniform(0,(1.0-c)/(c))
            while b==0:
                b=np.random.uniform(0,(1.0-c)/(c))
            w_hat=(c+1.0)/(b+2.0)
            print 'Caso iii) con: w_hat > c = mu_w'
            print 'w_hat=',w_hat
            print 'c=',c
            print 'mu_w=',mu_w
    elif caso==1:
        if mu_w<=0 or mu_w>=1:
            print 'Cambiar intervalos de w. \
            Se requiere que 0 < mu_w < 1'
        else:
            if mu_w<=0.5:
                c=np.random.uniform(0,mu_w)
```

```
                while c==0:
                    c=np.random.uniform(0,mu_w)
                b_h=(c+1.0-2.0*mu_w)/(mu_w)
                b=np.random.uniform(0,b_h)
                while b==0:
                    b=np.random.uniform(0,b_h)
                w_hat=(c+1.0)/(b+2.0)
                print 'Caso i) con: mu_w <= 0.5'
                print 'w_hat=',w_hat
                print 'mu_w=',mu_w
                print 'c=',c
            else:
                c=np.random.uniform((2.0*mu_w-1),mu_w)
                while c==(2.0*mu_w-1):
                    c=np.random.uniform((2.0*mu_w\
                                          -1),mu_w)
                b_h=(c+1.0-2.0*mu_w)/(mu_w)
                b=np.random.uniform(0,b_h)
                while b==0:
                    b=np.random.uniform(0,b_h)
                w_hat=(c+1.0)/(b+2.0)
                print 'Caso i) con: mu_w > 0.5'
                print 'w_hat=',w_hat
                print 'mu_w=',mu_w
                print 'c=',c
    else:
        print 'Corregir dato de caso de estudio, \
        debe contener caso=1 o caso=2 o caso=3'

#---------------------------------------------------------
# Seleccion de beta para garantizar CSO
#---------------------------------------------------------

# Valor inicial del limites de w_hat para
# garantizar CSO. Se actualiza en el siguiente
# loop while, NO EDITAR.

lim_inf_w_hat=2

# Seleccion aleatoria de beta que cumpla con CSO
#---------------------------------------------------------

while lim_inf_w_hat>=w_hat:
    beta_low=4.0/(3.0-alpha)
    tc=(((4.0-alpha)/((3.0-alpha)**2)))**(0.5)
    beta_high=(2.0*(3.0*tc-alpha*tc+1))/(3.0-alpha)
```

```
    beta=np.random.uniform(beta_low, beta_high)
    while beta==beta_low:
        beta=np.random.uniform(beta_low, beta_high)
    lim_sup_mu_w=0.25*((alpha-\
                    3.0)*(beta**2)+4.0*beta+4.0)
    if mu_w<=0 or mu_w>=lim_sup_mu_w:
        print 'mu_w fuera de rango para CSO'
        print 'Debe ser 0 < mu_w <', lim_sup_mu_w
    else:
        print 'mu_w en rango para CSO'

    lim_inf_w_hat=0.5*\
    ((((mu_w**(2.0))+(3.0-alpha)*\
      (beta**2.0)-4.0*beta)**(0.5))+mu_w)

#-----------------------------------------------------------------
# Comprobacion de que w_hat con CSO con beta aleaorio:
#-----------------------------------------------------------------

if w_hat<=lim_inf_w_hat:
    print 'w_hat fuera de rango para CSO'
else:
    print 'w_hat en rango para CSO'


print 'w_hat=',w_hat
print 'lim inf de w_hat ', lim_inf_w_hat

#-----------------------------------------------------------------
# Comprobacion de supuesto gamma_y > gamma_x:
#-----------------------------------------------------------------
if beta<=0:
    print 'Cambiar valor de externalidades, \
    se requiere que gamma_y > gamma_x'
else:
    # Calculo de xi:
    #-----------------
    xi=lim_inf_theta+gamma_x*m-np.random.uniform(0,1)
    # Precio minimo:
    #-----------------
    p_min=max(lim_inf_theta,m*beta+xi)
    #p_max=min(lim_sup_theta,d*beta+xi)
    print 'beta=', beta
    print 'xi=', xi
    print 'p_min', p_min
    #print 'p_max',p_max
```

```
#------------------------------------------------------------
# Eleccion de gamma_y que garantiza CSO:
#------------------------------------------------------------
gamma_y=beta+gamma_x

#------------------------------------------------------------
# Metodo Newthon-Raphson: calculo del precio optimo.
#------------------------------------------------------------

p=0
dist=1
path_p_a=[]
while abs(dist)>0.00000001:
        p_new=p-(h_p(p,xi,beta,alpha,\
                     m,w_hat,mu_w,c))/\
        (dh_dp(p,xi,beta,alpha,m,w_hat,mu_w,c))
    dist=p-p_new
    p=p_new
    path_p_a.append(p)

p

#------------------------------------------------------------
# Resumen de variables
#------------------------------------------------------------

print 'beta_low=',beta_low
print 'beta_high=',beta_high
print 'beta=',beta
print 'gamma_y=', gamma_y
print 'gamma_x=', gamma_x
print 'w_low=', lim_inf_w
print 'w_high=',  lim_sup_w
print 'mu_w=',mu_w
print 'lim_sup_mu_w=',lim_sup_mu_w
print 'lim_inf_w_hat=',lim_inf_w_hat
print 'c=',c
print 'b=',b
print 'w_hat=',w_hat
print 'm=',m
print 'd=',d
print 'alpha', alpha
print 'xi=', xi
print 'p_min', p_min
print 'precio optimo', p
```

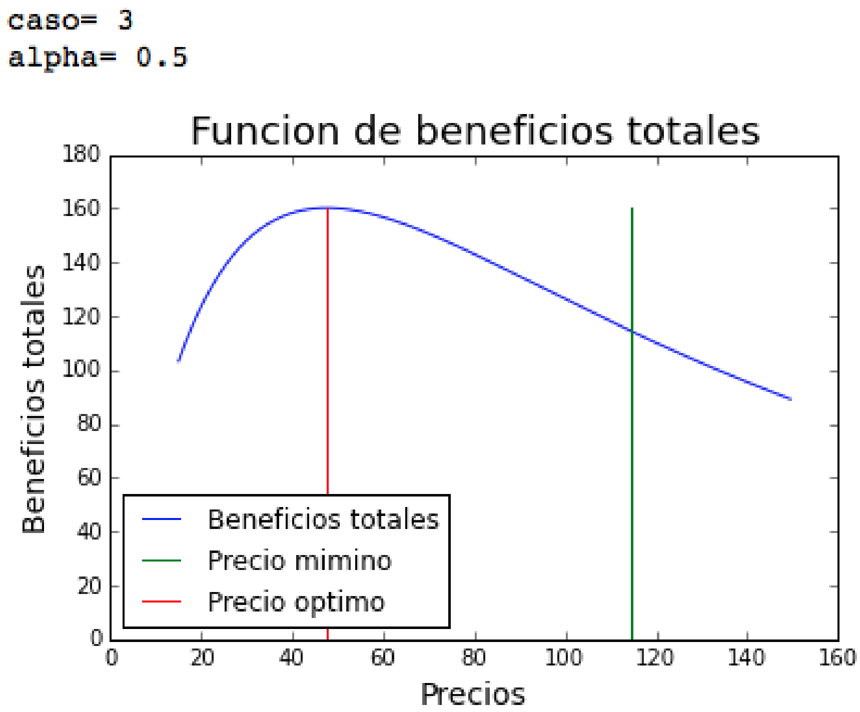
```
print 'caso=', caso

#----------------------------------------------------------------------
# Visualizacion de Beneficios totales,
# precio mimino y precio que maximiza beneficios
#----------------------------------------------------------------------

beneficios_t=[]
precios=np.arange(0,d,0.5)

for j in precios:
    beneficios_t.append(Pi_t(b,c,mu_w,w_hat,\
                            j,xi,beta,alpha,m))

plt.plot(precios[38:300],beneficios_t[38:300],\
         label=u'Beneficios totales')
plt.plot([p_min,p_min],[0,max(beneficios_t)],\
         label=u'Precio mimino')
plt.plot([p,p],[0,max(beneficios_t)],\
         label=u'Precio optimo')
plt.legend(loc='best')
plt.xlabel(u'Precios', fontsize=14)
plt.ylabel('Beneficios totales',fontsize=14)
plt.title(u'Funcion de beneficios totales', \
          fontsize=18)
print 'caso=',caso
print 'alpha=',alpha
```

D.1. Ejemplo

Figura 1: Valores iniciales

```
beta_low= 1.6
beta_high= 2.29666295471
beta= 1.69507624315
gamma_y= 2.29507624315
gamma_x= 0.6
w_low= 0.0
w_high= 1.2
mu_w= 0.6
lim_sup_mu_w= 0.899274074345
lim_inf_w_hat= 0.736721794344
c= 0.6
b= 0.0977727977228
w_hat= 0.762713675064
m= 50
d= 10000
alpha 0.5
xi= 29.709241828
p_min 114.463053985
precio optimo 47.6068401243
```

Figura 2: Beneficios totales del monopolista



Bibliografía

Becker, G. S. & Murphy, K. M. (1993). A simple theory of advertising as a good or bad. *The Quarterly Journal of Economics*, (pp. 941–964).

Borgatti, S. P., Mehra, A., Brass, D. J., & Labianca, G. (2009). Network analysis in the social sciences. *Science*, 323(5916), 892–895.

Candogan, O., Bimpikis, K., & Ozdaglar, A. (2012). Optimal pricing in netwoks with externalities. *Operations Research*, 60(4), 883–905.

Cavalcanti, T. V. V. & Giannitsarou, C. (2011). Network structure and human capital dynamics. *Economics and Finance Seminars of Department of Economics, Mathematics and Statistics at Birkbeck University of London*.

Cavalcanti, T. V. V. & Giannitsarou, C. (2015). Growth and human capital: a network approach. *Working paper.*

Economides, N. (1996). The economics of networks. *International journal of industrial organization*, (pp. 673–699).

Erdös, P. & Rényi, A. (1959). On random graphs i. *Publ. Math. Debrecen*, 6, 290–297.

Fainmesser, I. P. & Galeotti, A. (2013). The value of network information. *Working paper. Brown University, Department of Economics.*

González-Guerra, O. S. (2015). *Discriminación de segundo grado de bienes indivisibles en redes con externalidades positivas [Tesina de Licenciatura].* Centro de Investigación y Docencia Económica.

Jackson, M. O. (2008). *Social and economic networks*. Princeton University Press.

Johnson, J. P. & Myatt, D. P. (2006). On the simple economics of advertising, marketing and product desiign. *The American Economic Review*.

Kali, R. & Reyez, J. (2007). The architecture of globalization: a network approach to international economic integration. *Journal of International Business Studies*.

Kastelle, T., Steen, J., & Peter, L. (2006). Measuring globalization: an evolutionary economic approach ti tracking the evolution of internationa trade. *DRUID Summer Conference on Knowledge, Innovation and Competitiveness: Dynamycs of Firms, Networks, Regions and Institutions-Copenhagen, Denemark, June*.

Katz, M. L. & Shapiro, C. (1985). Network externalities, competition and compatibility. *The American Economic Review*, 75(3), 424–440.

Kirman, A. (1997). The economy as an evolving network. *Journal of evolutionary economics*.

Lewis, T. R. & Sappington, D. E. (1994). Supplying information to facilitate price discrimination. *International Economic Review*, (pp. 309–327).

Scott, J. P. (2000). *Social networks analysis. A handbook*. SAGE, 2nd edition.

Simon, H. A. (1955). On a class of skew distribution functions. *Biometrika*, (pp. 425–440).

Stigler, G. J. & Becker, G. S. (1977). De gustibus non est disputandum. *The american economic review*, 67(2), 76–90.

Yule, G. U. (1925). A mathematical theory of evolution, based on the conclusions of dr. jc willis, frs. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B, Containing Papers of a Biological Character*, (pp. 21–87).