

Las colecciones de Documentos de Trabajo del CIDE representan un medio para difundir los avances de la labor de investigación, y para permitir que los autores reciban comentarios antes de su publicación definitiva. Se agradecerá que los comentarios se hagan llegar directamente al (los) autor(es).  
❖ D.R. © 1999, Centro de Investigación y Docencia Económicas, A. C., carretera México-Toluca 3655 (km. 16.5), Lomas de Santa Fe, 01210 México, D. F., tel. 727-9800, fax: 292-1304 y 570-4277. ❖ Producción a cargo del (los) autor(es), por lo que tanto el contenido como el estilo y la redacción son responsabilidad exclusiva suya.



**NÚMERO 177**

---

**David Mayer y Jorge López López**  
**SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL PROBLEMA DE RAMSEY**  
**PARA  $N$  AGENTES MEDIANTE SISTEMAS**  
**DE ECUACIONES DEL CALOR**

### ***Resumen***

Plantamos el método de la ecuación del calor para la solución de un conjunto importante de problemas de optimización intertemporal con múltiples agentes. Implementamos con éxito este método para la solución del problema de Ramsey de  $N$  agentes. Los resultados muestran que el cálculo numérico se efectúa en un tiempo razonable que no se incrementa mucho con el número de agentes. Mostramos los experimentos numéricos con hasta 20 agentes y extendemos los métodos de un nuestro trabajo anterior, respecto del cálculo de las derivadas temporales de las variables globales del problema. El método es implementable en la práctica y quedan por establecerse formalmente sus propiedades numéricas.

### ***Abstract***

We define the heat equation for the solution of an important set of intertemporal optimization problems with multiple agents. We implement this method for Ramsey's problem with  $N$  agents with success. The results show that the numerical calculation proceeds on a reasonable time which does not increase very much with the number of agents. We show the results of experiments with up to 20 agents and extend methods previously presented with respect to the calculation of the temporal derivatives of some of the global variables of the problem. The method is implementable in practice. What remains now is establishing its numerical properties formally.

## Introducción

En un trabajo anterior, introducimos el uso de los métodos numéricos de la ecuación del calor para la solución de problemas de optimización intertemporal (Maycr y López, 1998). Puntualizamos que entre las ventajas de este enfoque se encuentra la facilidad con que se extiende su aplicación a problemas multivariados. En aquel trabajo se presentó un primer paso en que se mostró la factibilidad de la aplicación de esta metodología a problemas de un solo par de variables (capital y consumo). En este trabajo extendemos el planteamiento a problemas de  $N$  pares de variables y mostramos los resultados exitosos de su implementación numérica a un problema de Ramsey de  $N$  agentes.

La idea del método es la misma que para un solo agente: transformamos el sistema de  $N$  pares de ecuaciones ordinarias de primer orden en  $N$  ecuaciones diferenciales de segundo orden. En el trabajo anterior quedó claro que no puede resolverse directamente el sistema elíptico. Para su solución numérica, convertimos el sistema elíptico en un sistema de  $N$  ecuaciones cuasilineales parabólicas. Implementamos el método numérico conocido como método teta, el cual, dependiendo del valor que se dé al parámetro  $\theta$  involucrado en la formulación, es explícito, implícito o semiimplícito. Existe un intervalo de valores de  $\theta$  para los cuales el método numérico converge, aunque la formulación implícita sigue mostrando ventajas sobre las demás. Como en el caso de una variable, encontramos que la inestabilidad presente en el problema de Ramsey para tiempos  $t$  grandes no afecta el proceso de convergencia.

En las siguientes secciones presentamos el planteamiento tanto analítico como numérico del problema general de control y mostramos los resultados de su implementación para el problema de Ramsey con  $N$  agentes.

## El problema de control

Sea dado el problema de maximización

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{u}} U &= \int_0^T f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt, & (1) \\ \text{s.a. } \mathbf{x}' &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0, \\ \left\{ \begin{array}{ll} x_\omega(T) = x_{\omega T} & \text{si } T < \infty, \omega \in I_1 \\ x_\omega(T) \text{ es libre} & \text{si } T < \infty, \omega \in I_2 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} x_\omega(t) = x_\omega^*(t) & \text{si } T = \infty, \omega \in I_3 \end{array} \right. & (2) \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{x}^*(t)$  representa el estado estacionario del problema, y  $I_1, I_2, I_3$  forman una partición disjunta del conjunto  $\{1, \dots, N\}$  de índices de  $\mathbf{x}$ . El hamiltoniano es

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad (3)$$

con  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^N$ . Las condiciones de primer orden, adicionales a las restricciones escritas

en (1), son:

$$H_u = 0 \quad (4)$$

$$\lambda' = -H_x \quad (5)$$

$$\begin{cases} \lambda_\omega(T) = \text{libre} & \text{si } \omega \in I_1 \\ \lambda_\omega(T) = 0 & \text{si } \omega \in I_2 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_\omega x_\omega(t) = 0 & \text{si } \omega \in I_3 \end{cases} \quad (6)$$

Supondremos que existe una función suficientemente suave  $u = \omega(\mathbf{x}, t, \lambda)$  que resuelve la ecuación (4), es decir,

$$H_u(\mathbf{x}, \omega(\mathbf{x}, t, \lambda), t, \lambda) = 0.$$

Entonces el problema, tanto analítico como numérico, se reduce a resolver el sistema de ecuaciones

$$\mathbf{x}' = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \lambda, t) \equiv \mathbf{g}(\mathbf{x}, \omega(\mathbf{x}, t, \lambda), t), \quad (7)$$

$$\lambda' = \Lambda(\mathbf{x}, \lambda, t) \equiv -H_x(\mathbf{x}, \omega(\mathbf{x}, t, \lambda), t, \lambda) \quad (8)$$

con las condiciones de frontera dadas (2) y (6).

Debe de tomarse en cuenta que en casos importantes, como cuando se eliminan los multiplicadores utilizando las variables de consumo, estos sistemas de ecuaciones pueden modificarse, obteniéndose sistemas equivalentes

$$\mathbf{y}' = \mathbf{Y}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t), \quad (9)$$

$$\mathbf{z}' = \mathbf{Z}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t). \quad (10)$$

Además, en muchos casos de interés económico, las ecuaciones tienen estructura adicional que simplifica el trabajo posterior, tomando la forma

$$y'_\omega = \tilde{Y}_\omega(\mathbf{G}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t), y_\omega, z_\omega, t), \quad \omega = 1, \dots, N; \quad (11)$$

$$z'_\omega = \tilde{Z}_\omega(\mathbf{G}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t), y_\omega, z_\omega, t), \quad \omega = 1, \dots, N. \quad (12)$$

Aquí la interacción entre las variables  $(y_\omega, z_\omega)$  que describen el comportamiento de cada agente  $\omega = 1, \dots, N$  solamente ocurre a través de las variables globales  $\mathbf{G}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t)$ , como son la tasa de interés y el nivel de salarios, que en el caso del problema de Ramsey son funciones del capital agregado.

Entre las condiciones de frontera que se pueden utilizar en las aproximaciones finitas del problema de horizonte infinito están las siguientes:

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \text{ y una de } \begin{cases} \mathbf{y}(T) = \mathbf{y}_T & \text{(Dirichlet)} \\ \mathbf{y}'(T) = \mathbf{0} & \text{(Neumann)} \\ \frac{y'_\omega}{y_\omega} = \frac{z'_\omega}{z_\omega}, \quad \omega = 1, \dots, N & \text{(Crecimiento Balanceado)} \end{cases} \quad (13)$$

En este trabajo presentamos un método para resolver problemas que se reducen a los sistemas como (9), (10) ó (11), (12), con las condiciones de frontera asociadas.

### **La implementación numérica**

Convertimos el sistema (9), (10) en un sistema de ecuaciones del calor. Para eso asumimos que la ecuación (9) se puede resolver para  $\mathbf{z}$ , es decir, que en toda la región de

valores relevantes se tiene una función suficientemente suave  $z = \zeta(y, y', t)$  tal que

$$y' = Y(y, \zeta(y, y', t), t). \quad (14)$$

Derivando (9), se obtiene el sistema elíptico

$$y'' = F(y, y', t) = [Y_y y' + Y_z Z + Y_t] \Big|_{(y, \zeta(y, y', t), t)}, \quad (15)$$

Utilizaremos para la aproximación numérica el sistema parabólico

$$\frac{dy}{ds} = y'' - F(y, y', t). \quad (16)$$

Análogamente, siempre que se cuente con la solución  $\zeta(y, y', t)$  mencionada, el sistema (11), (12) es equivalente al sistema de elíptico

$$y'' = \tilde{F}(\tilde{G}, \frac{dG}{dt}, y, y', t) = \left[ Y_G \frac{dG}{dt} + Y_y y' + Y_z Z + Y_t \right] \Big|_{(y, \zeta(y, y', t), t)}, \quad (17)$$

donde  $\tilde{G}(y, y', t) = G(y, \zeta(y, y', t), t)$ . Definimos el sistema parabólico asociado

$$\frac{dy}{ds} = y'' - \tilde{F}(\tilde{G}, \frac{dG}{dt}, y, y', t). \quad (18)$$

Conversamente, dada una solución de (16) para la que se tenga  $\frac{dy}{ds} = 0$ , si definimos  $z = \zeta(y, y', t)$ , al diferenciar (14) obtenemos

$$Y_z(z' - Z) = 0. \quad (19)$$

Si  $Y_z$  es invertible se obtiene  $z' = Z$ . Como también  $y' = Y$  (por la definición de  $z$ ), los planteamientos de primero y segundo órdenes son equivalentes. El mismo argumento funciona con  $\tilde{F}$  en lugar de  $F$ .

Para el cálculo numérico, restringimos el dominio al conjunto  $[0, T]$ . Escogemos  $M \in \mathbb{N}$ , definimos  $h_t = T/M$ , y escogemos  $h_s$ . Describiremos un algoritmo iterativo mediante el cual definiremos  $y_i^j$  para  $i = 0, \dots, M, j = 0, 1, 2, \dots$ . Los valores  $y_i^j$  aproximarán  $y(ih_t)$  según  $j$  tiende a infinito, y el algoritmo se detendrá cuando cierto criterio de convergencia sea satisfecho. Comenzamos el algoritmo con la inicialización de  $y_i^0$  que satisfaga  $y_0^0 = y_0$ . Utilizamos la discretización del método teta para (16), la cual está dada por:

$$\begin{aligned} \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{h_s} - \left( \theta \frac{y_{i-1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i+1}^{j+1}}{h_t^2} + (1 - \theta) \frac{y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j}{h_t^2} \right) \\ = -\hat{F}(y_{i+1}^j, y_i^j), \quad i = 1, \dots, M - 1, \end{aligned} \quad (20)$$

donde  $0 \leq \theta \leq 1$  y

$$\hat{F}(y_{i+1}^j, y_i^j) = F(y_i^j, \frac{y_{i+1}^j - y_{i-1}^j}{2h_t}, t) \quad (21)$$

Obsérvese que si  $\theta = 0$ , se tiene el método numérico explícito; si  $0 < \theta < 1$  se tiene un método semiimplícito y si  $\theta = 1$  el método es implícito. Se tendrá la aproximación de  $z$ ,

$$z_i^j = \zeta(y_i^j, \frac{y_{i+1}^j - y_{i-1}^j}{2h_t}, t).$$

Elegimos la derivada centrada  $y' \approx \frac{y_{i+1}^j - y_{i-1}^j}{2h_t}$ . Esencialmente se obtienen los mismos resultados con esta derivada más precisa que cuando se utilizan las derivadas adelantada o atrasada  $\frac{y_{i+1}^j - y_i^j}{h_t}$  ó  $\frac{y_i^j - y_{i-1}^j}{h_t}$ .

En el caso de la estructura más simple (11), (12), utilizamos en la expresión (20), a partir de la segunda iteración (es decir para  $j \geq 2$ ) en lugar de  $\widehat{F}(y_{i+1}^j, y_i^j)$  la expresión

$$\tilde{F}(y_{i+1}^j, y_i^j, y_{i+1}^{j-1}, y_i^{j-1}) = \tilde{F}\left(\mathbf{G}_i^{j-1}, \frac{\mathbf{G}_{i+1}^{j-1} - \mathbf{G}_i^{j-1}}{h_t}, y_i^j, \frac{y_{i+1}^j - y_i^j}{h_t}, t\right), \quad (22)$$

donde

$$\mathbf{G}_i^{j-1} = \tilde{\mathbf{G}}\left(y_i^{j-1}, \frac{y_{i+1}^{j-1} - y_{i-1}^{j-1}}{2h_t}, t\right). \quad (23)$$

La expresión (22) tiene la ventaja de no involucrar segundas derivadas de la función de producción en el cálculo de, por ejemplo, de las derivadas temporales de la tasa de interés o del salario, como se verá en el caso de la aplicación al problema de Ramsey con  $N$  agentes. Cuando utilicemos la función  $\widehat{F}$  (respectivamente  $\tilde{F}$ ) diremos que las derivadas de las variables globales son aproximadas analíticamente (respectivamente numéricamente).

Las condiciones de frontera (13) toman la forma siguiente

$$y_0^{j+1} = y_0 \quad (24)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_M^{j+1} = y_T & \text{(Dirichlet)} \\ y_M^{j+1} - y_{M-1}^{j+1} = 0 & \text{(Neumann)} \\ \frac{y_{\omega, i+1}^{j+1} - y_{\omega, i}^{j+1}}{y_{\omega, i}^{j+1}} = \frac{z_{\omega, i+1}^j - z_{\omega, i}^j}{z_{\omega, i}^j}, \omega = 1, \dots, N & \text{(Crecimiento Balanceado)} \end{array} \right. \quad (25)$$

Para obtener las nuevas  $y_i^{j+1}$  es necesario resolver el sistema lineal que consiste de las ecuaciones (20) combinadas con las condiciones de frontera. La matriz asociada con este sistema lineal es tridiagonal de orden  $N(M+1)$ . Más aún, es un sistema que se puede descomponer en  $N$  sistemas completamente desacoplados de orden  $(M+1)$ , uno para cada agente. En las filas no fronterizas las componentes tridiagonales de cada bloque o submatriz son:

$$\left(-\frac{\theta}{h_t^2}, \frac{1}{h_s} + \frac{2\theta}{h_t^2}, -\frac{\theta}{h_t^2}\right). \quad (26)$$

La primera fila es

$$\left(\frac{1}{h_s} + \frac{2\theta}{h_t^2}, -\frac{\theta}{h_t^2}, \dots, 0\right), \quad (27)$$

mientras que la última fila es  $(0, \dots, 0, 1)$  para el caso Dirichlet y  $(0, \dots, 0, -1, 1)$  para el caso Neumann. El lado derecho de los sistemas depende de la expresión

$$(1 - \theta) \frac{y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j}{h_t^2},$$

y de  $\widehat{F}$  (ó  $\tilde{F}$ ) excepto para el ultimo valor. El primero y el último son

$$\frac{y_0^j}{h_s} - \widehat{F}(y_2^j, y_1^j) + (1 - \theta) \frac{y_0^j - 2y_1^j + y_2^j}{h_t^2} + \theta \frac{y_0^j}{h_t^2}, \text{ y } 0 \text{ ó } y_T,$$

respectivamente.

### *Aplicación al problema de Ramsey con $N$ agentes*

Implementamos este método al problema de Ramsey con  $N$  agentes. Consideramos  $N$  consumidores divididos en  $\Omega$  subgrupos diferentes. Cada subgrupo tiene una proporción de la población  $N_\omega$ ,  $\sum_{\omega=1}^{\Omega} N_\omega = 1$ . Cada agente de cada subgrupo resuelven el problema de Ramsey

$$\begin{aligned} \max \quad & \int_0^{\infty} u(c_\omega(t)) e^{-(\rho_\omega - n)t} dt \\ \text{s.a.} \quad & a'_\omega = (r - n) a_\omega + w - c_\omega, \\ & a_\omega(0) = a_{\omega 0}, \\ & \lim_{t \rightarrow \infty} a_\omega e^{-rt} = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

donde  $a_\omega$ ,  $a_{\omega 0}$ ,  $c_\omega$  son la riqueza, riqueza inicial y consumo del consumidor  $\omega$ . El Hamiltoniano es

$$H^\omega = u_\omega(c_\omega(t)) e^{-(\rho_\omega - n)t} + \lambda_\omega ((r - n) a_\omega + w - c_\omega).$$

Las condiciones de primer orden son:

$$0 = H_{c_\omega}^\omega = u'_\omega(c_\omega(t)) e^{-(\rho_\omega - n)t} - \lambda_\omega, \quad (29)$$

$$\lambda'_\omega = -H_{a_\omega}^\omega = -(r - n) \lambda_\omega, \quad (30)$$

De la primera de estas se deduce

$$c'_\omega = \frac{r - \rho}{\sigma} c_\omega, \quad (31)$$

donde  $\lambda_\omega$  es el multiplicador asociado con  $a_\omega$ . Aquí el capital agregado per-cápita es

$$k = \sum_{\omega=1}^{\Omega} N_\omega a_\omega, \quad (32)$$

y la tasa de interés  $r$  y el salario  $w$  son dadas por

$$r = f'(k) - \delta, \quad w = f(k) - k f'(k). \quad (33)$$

### *Planteamiento como un solo problema de optimización*

El conjunto de problemas (28) puede plantearse como un solo problema de optimización, con el objeto de establecer la existencia de las soluciones. Se plantea

$$\begin{aligned} \max \quad & \int_0^{\infty} \sum_{\omega=1}^{\Omega} \Lambda_\omega u_\omega(c_\omega(t)) e^{-(\rho_\omega - n)t} dt \\ \text{s.a.} \quad & a'_\omega = (r - n) a_\omega + w - c_\omega, \quad \omega = 1, \dots, \Omega \\ & a_\omega(0) = a_{\omega 0}, \quad \omega = 1, \dots, \Omega \end{aligned} \quad (34)$$

donde se deben establecer las constantes  $\Lambda_\omega$  adecuadas. Al optimizar se supone que  $r$  y  $w$  son funciones de  $t$ , y ex-post se establecen las identidades dadas por las ecuaciones

(32), (33). El Hamiltoniano es

$$H = \sum_{\omega=1}^{\Omega} \Lambda_{\omega} u_{\omega}(c_{\omega}(t)) e^{-(\rho_{\omega}-n)t} + \sum_{\omega=1}^{\Omega} \mu_{\omega} ((r-n) a_{\omega} + w - c_{\omega}).$$

Las condiciones de primer orden son:

$$0 = H_{c_{\omega}} = \Lambda_{\omega} u'_{\omega}(c_{\omega}(t)) e^{-(\rho_{\omega}-n)t} - \mu_{\omega}, \quad \omega = 1, \dots, \Omega \quad (35)$$

$$\mu'_{\omega} = -H_{a_{\omega}} = -(r-n) \mu_{\omega}, \quad \omega = 1, \dots, \Omega. \quad (36)$$

Se tienen las mismas condiciones de transversalidad. Las condiciones (29), (30), son equivalentes a las (35), (36) si  $\mu_{\omega} = \lambda_{\omega} \Lambda_{\omega}$ . Por lo tanto la solución de los problemas individuales se obtiene de la solución del problema agregado con cualquier conjunto de constantes  $\Lambda_{\omega}$ . Para obtener un teorema de existencia de la solución de (34) hay que utilizar los usuales combinados con la definiciones de  $r$  y de  $w$  dadas por (32) y (33).

### Solución Numérica del Problema de Ramsey

Aplicamos el método de la ecuación del calor para resolver este modelo numéricamente, utilizando la descripción hecha en la primera sección de este trabajo. Para esto, definimos

$$\begin{aligned} N &= \Omega, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{\Omega})^T, \\ \mathbf{z} &= \mathbf{c} = (c_1, \dots, c_{\Omega})^T, \\ \mathbf{Y}(\mathbf{a}, \mathbf{c}, t) &= (r(\mathbf{a}) - n) \mathbf{a} + w(\mathbf{a}) \mathbf{E} - \mathbf{c}, \\ \mathbf{Z}(\mathbf{a}, \mathbf{c}, t) &= \text{Diag}\left(\frac{r(\mathbf{a}) - \rho_{\omega}}{\sigma_{\omega}}\right) \mathbf{c}, \\ \zeta(\mathbf{a}, \mathbf{a}', t) &= \mathbf{c} = (r(\mathbf{a}) - n) \mathbf{a} + w(\mathbf{a}) \mathbf{E} - \mathbf{a}' \end{aligned} \quad (37)$$

donde  $\mathbf{E} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^N$ . Las derivadas de  $\mathbf{Y}$  son:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{\mathbf{a}} &= f''(k) \mathbf{N} \mathbf{a}^T + (r-n) \mathbf{I} - k f''(k) \mathbf{N} \mathbf{E}^T, \\ \mathbf{Y}_{\mathbf{c}} &= -\mathbf{I}, \\ \mathbf{Y}_t &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado

$$\begin{aligned} r'(k) &= f''(k), \\ w'(k) &= -k f''(k), \\ k_{\mathbf{a}} &= \mathbf{N} = (N_1, \dots, N_{\Omega}) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{y}, \mathbf{y}', t) &= \mathbf{Y}_{\mathbf{a}} \mathbf{y}' + \mathbf{Y}_{\mathbf{c}} \mathbf{Z} + \mathbf{Y}_t \\ &= [f''(k) \mathbf{N} \mathbf{a}^T + (r-n) \mathbf{I} - k f''(k) \mathbf{N} \mathbf{E}^T] \mathbf{a}' - \text{Diag}\left(\frac{r - \rho_{\omega}}{\sigma_{\omega}}\right) \mathbf{c} \end{aligned}$$



$$= (r - n) \mathbf{a}' + f''(k) [(\mathbf{a}^T - k\mathbf{E}^T) \cdot \mathbf{a}'] \mathbf{N} - \text{Diag}\left(\frac{r - \rho_\omega}{\sigma_\omega}\right) \mathbf{c}$$

Por otra parte, como habíamos mencionado anteriormente, podemos escribir

$$\mathbf{Y}(\mathbf{a}, \mathbf{c}, t) = \tilde{\mathbf{Y}}(r, w, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = (r - n) \mathbf{a} + w\mathbf{E} - \mathbf{c}, \quad (38)$$

$$\mathbf{Z}(\mathbf{a}, \mathbf{c}, t) = \tilde{\mathbf{Z}}(r, \mathbf{c}) = \text{Diag}\left(\frac{r - \rho_\omega}{\sigma_\omega}\right) \mathbf{c}. \quad (39)$$

Entonces, para la aproximación numérica de las derivadas de las variables globales  $r$ ,  $w$ , contamos con la función

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}(r, w, r', w', \mathbf{a}, \mathbf{a}') &= \frac{d}{dt} [(r - n) \mathbf{a} + w\mathbf{E} - \mathbf{c}] \\ &= r' \mathbf{a} + w' \mathbf{E} + (r - n) \mathbf{a}' - \mathbf{c}' \\ &= r' \mathbf{a} + w' \mathbf{E} + (r - n) \mathbf{a}' - \text{Diag}\left(\frac{r - \rho_\omega}{\sigma_\omega}\right) \mathbf{c} \end{aligned}$$

Cuando restringimos la aproximación al intervalo  $[0, T]$  las condiciones de frontera que utilizamos en este caso son de tipo Neumann,

$$\mathbf{a}(0) = \mathbf{a}_0, \mathbf{a}'(T) = \mathbf{0}, \frac{a'_\omega(T)}{a_\omega(T)} = \frac{c'_\omega(T)}{c_\omega(T)}, \omega = 1, \dots, \Omega. \quad (40)$$

Utilizamos, por conveniencia, como niveles iniciales de riqueza

$$a_{\omega 0} = \frac{(\Omega - \omega) a_{10} + (\omega - 1) a_{\Omega 0}}{\Omega - 1},$$

y escogemos cualquier vector inicial  $\mathbf{N}$  cuyos componentes sumen 1.

### Resultados de la implementación

Para los experimentos numéricos, utilizamos las siguientes funciones de utilidad y de producción.

$$u(\mathbf{c}) = \frac{c^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma}, \quad f(k) = A \left[ \frac{1}{3} k^\phi + \frac{2}{3} \right]^{1/\phi}$$

(para  $\phi = 0$ ,  $f(k) = Ak^{1/3}$  mientras que si  $\phi \rightarrow -\infty$ ,  $f(k) \rightarrow A \min[k, 1]$ ). A menos que se indique lo contrario, escogemos los siguientes valores usuales de los parámetros para las simulaciones:  $n = 0.02$ ,  $\rho = 0.03$ ,  $\sigma = 0.7$ ,  $\delta = 0.04$ . Para los valores iniciales de la riqueza utilizamos  $a_{10} = \frac{1}{10} k^*$ ,  $a_{\Omega 0} = \frac{\Omega}{10} k^*$ . Utilizamos el método  $\theta = 1$ .

Puesto que en el trabajo anterior no introdujimos la posibilidad de aproximar las derivadas de las variables globales numéricamente, comenzamos comparando los resultados en los dos casos. En las corridas multiplicamos  $A$  por un factor haciendo que se igualara el nivel de equilibrio  $k^*$  correspondiente a cada  $\phi$  con el nivel Cobb-Douglas<sup>1</sup> con  $A = 0.3$ . De hecho, en el caso numérico comparamos también los resultados de utilizar derivadas delanteras y derivadas centradas (soalmente para las derivadas temporales de las variables globales). Para esto utilizamos  $T = 50$ ,  $M = 1000$ , y los

<sup>1</sup> Para cada  $\phi > 0$  la igualdad  $f'(k) = n + \rho + \delta$  para  $k = k^*|_{\phi=0}$  implica que el nivel estacionario es estable y que el modelo no es un modelo de crecimiento endógeno de Arrow.

valores  $\phi \in \{-0.9, -0.8, \dots, 0.9, 1.0\}$ . El criterio de convergencia que utilizamos fue que la máxima innovación en las  $\alpha_\omega$  fuera menor a  $10^{-12}$ .

### *Un solo agente*

Comenzamos con el caso de un solo agente. Los resultados se encuentran en las Gráficas I. En las Gráficas I.1 y I.2, observamos los resultados obtenidos para las trayectorias de capital y consumo para cada valor de  $\phi$ . Estos corresponden a aproximar las derivadas de  $r$  y  $w$  numéricamente, utilizando diferencias centradas, que son las más precisas. Por los resultados obtenidos para varios agentes, por lo menos en algunos casos son mejores estos resultados que los que se obtienen mediante la aproximación analítica. Las gráficas toman la forma general que se espera. Las trayectorias del capital tienen una curvatura más pronunciada cuanto más negativa es  $\phi$ , produciéndose una transición más acelerada en que el consumo se suaviza menos. La curvatura plantea problemas de estabilidad al algoritmo numérico, que pueden ser subsanadas disminuyendo  $h$ . Por otra parte, la longitud del recorrido en la dimensión  $s$  para obtener la convergencia es mayor para valores positivos de  $\phi$ , como puede observarse en la parte inferior de la Gráfica III, que muestra el número de iteraciones utilizadas para la convergencia. Sin embargo, para estos valores de  $\phi$ , en que el algoritmo presenta mayor estabilidad, es posible alargar el paso y converger en un número mucho menor de iteraciones. Utilizando un método ad hoc para automatizar este cambio, logramos, por ejemplo, que los casos  $\phi = 0.9$  y  $1.0$  se obtuviera el criterio de convergencia en 27 iteraciones en lugar de 383 y 698.

Sean  $k_{m,\phi}$ ,  $c_{m,\phi}$ , las trayectorias obtenidas con el método  $m$  para la función de producción con elasticidad de sustitución  $\phi$ , donde  $m = 0$  (resp. 1, 2) para el caso de aproximación analítica (resp. numérica con diferencias adelantadas y centradas) de las derivadas de  $r$  y  $w$ . Las Gráficas I.3 a I.6 muestran las razones

$$\frac{k_{m,\phi} - k_{2,\phi}}{\max[|k_{m,\phi}|, |k_{2,\phi}|]}, c_{m,\phi} - c_{2,\phi}, m = 0, 1,$$

cada una para todos los valores de  $\phi$ . Se puede advertir que las aproximaciones numéricas son más similares entre sí. Es notorio que los errores numéricos del algoritmo son de naturaleza global. Los errores en las trayectorias de capital conforman una curva U, mientras que los errores de consumo se concentran en los primeros períodos del algoritmo. La presencia de valores negativos de consumo en algunas de las trayectorias (Gráfica I.2) es consecuencia de la inexactitud numérica del algoritmo.

Cuando disminuimos  $h$  a 0.1 de 0.5, los cambios en capital y consumo son muy pequeños, siendo la máxima diferencia de  $4.2 \times 10^{-5}$  y  $2.4 \times 10^{-4}$  respectivamente (Gráficas II). La diferencia en los resultados de consumo se reduce a  $8.6 \times 10^{-6}$  si no consideramos el tiempo  $t = 0$ . Esto refleja el hecho que los errores son globales. En particular, la ecuación de consumo tiene una forma exponencial, y si los errores son siempre del mismo signo, como es probable debido a la uniformidad de los signos de la curvatura de las trayectorias así como de las funciones de utilidad y producción, su acumulación resultará significativa.

*Múltiples agentes*

Pasemos ahora al caso con múltiples agentes. Obtenemos resultados similarmente consistentes. Utilizando los mismos parámetros para 10 agentes, el recorrido en  $s$  aumenta bastante (Gráfica III.1), dejando de depender de  $\phi$ .

Para los siguientes experimentos tomamos  $A = 3.3$ ,  $M = 100$  (esto mantiene la continuidad con el escrito anterior; el valor más bajo en los párrafos anteriores se tomó para que existiera la solución y fuera estable el algoritmo en el rango de  $\phi$  utilizado). Cualitativamente, los resultados son mucho mejores cuando se aproximan las derivadas de  $r$  y  $w$  numéricamente, pues se mantiene mucho mejor la proporcionalidad entre las trayectorias de consumo (Gráficas IV, producidas por el programa que implementa el método numérico). En las Gráficas V se advierte como se distribuyen los errores para el caso de 1 y 10 agentes, para  $\phi = 0$ . En este caso el mejor método es el que utiliza aproximaciones numéricas, y los resultados muestran diferencias de tipo global.

Respecto del recorrido en  $s$ , la Gráfica III.2 muestra que este aumenta de uno a dos agentes, pero después aumenta lentamente o se mantiene relativamente constante, según el caso. Mostramos corridas con hasta 20 agentes. Los métodos numéricos para la aproximación de las derivadas temporales de las variables globales toman más iteraciones. El cálculo de estas 60 soluciones toma unos doce minutos en una buena PC.

*El parámetro  $\theta$* 

Con los mismos parámetros  $A = 3.3$ ,  $M = 100$ , lo que observamos es que el algoritmo pierde estabilidad cuando se reduce  $\theta$ . En este caso, por ejemplo, el número de iteraciones se mantiene constante para  $\theta = 1.0, 0.9, 0.8, \dots, 0.6$ . Para  $\theta = 0.5$ , éste se multiplica en 9, y para  $\theta = 0.4$  no converge el algoritmo, ni aún reduciendo sustancialmente  $h_s$ . Puesto que el caso  $\theta = 0.5$  es el Cranck-Nicholson, para el cual se esperan mejores resultados debido a que la aproximación numérica es de orden mayor, realizamos otras corridas para verificar que en realidad es más inestable. Utilizando  $A = 0.3$  y  $M = 1000$ , y  $N = 5$  ó  $6$ , la estabilidad requiere valores de  $h_s$  muy pequeños. En las Gráficas VI se muestran los resultados de corridas inestables con valores de  $h_s$  que resultan estables para  $\theta = 1$ . Se advierte que la inestabilidad se introduce a través del consumo, es decir, a través de las derivadas de  $a_w$ .

*Conclusiones*

En este trabajo hemos planteado un método general para la solución de un conjunto importante de problemas de optimización intertemporal con múltiples agentes. Implementamos con éxito este método para la solución del problema de Ramsey de  $N$  agentes. Los resultados muestran que el cálculo numérico se efectúa en un tiempo razonable que no se incrementa mucho con el número de agentes. Hemos extendido un poco los métodos mencionados en nuestro trabajo anterior, especialmente respecto del cálculo de las derivadas temporales de las variables globales del problema. Los exper-

imentos muestran que esta extensión funciona y posiblemente mejora la calidad de las aproximaciones, sin aumentar demasiado el número de operaciones.

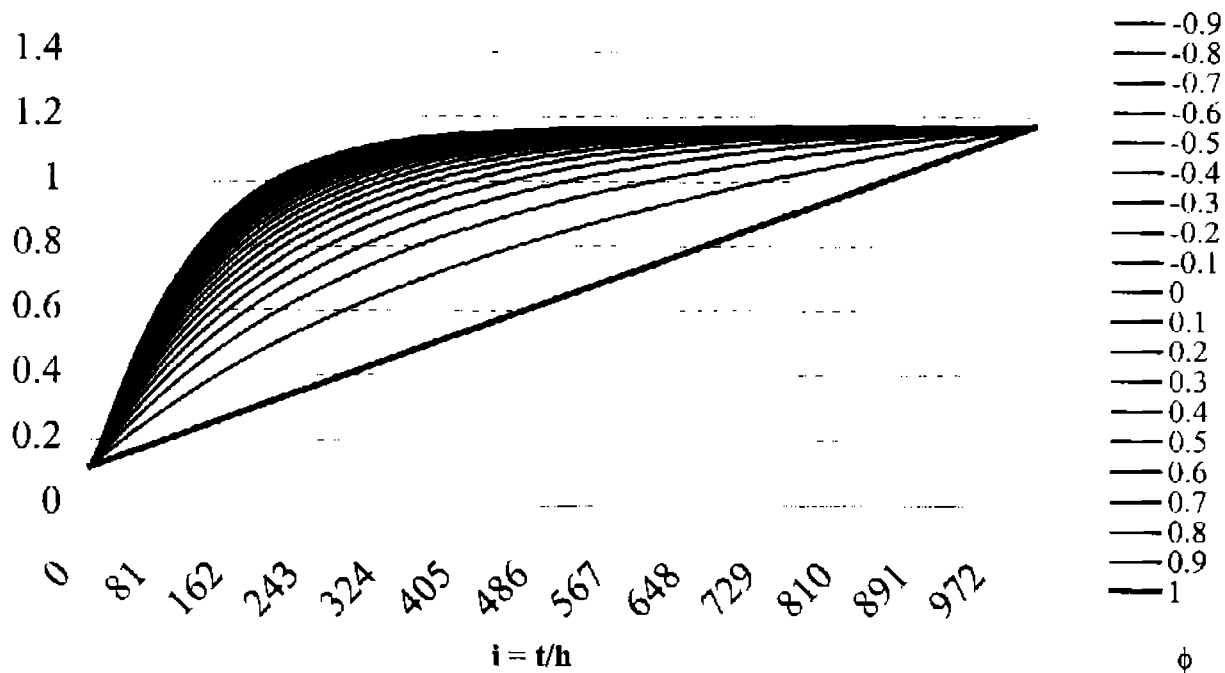
Habiendo mostrado que el cálculo que implica el método de la ecuación del calor es factible en la práctica, queda ahora demostrar teóricamente que las aproximaciones efectivamente convergen a las soluciones del problema. Los cálculos numéricos muestran que se tienen errores globales que pueden ser acumulados, por lo cual es necesario lograr una estimativa precisa de estos, con el fin de establecer la exactitud de las soluciones durante el cálculo de las mismas.

### ***Bibliografía***

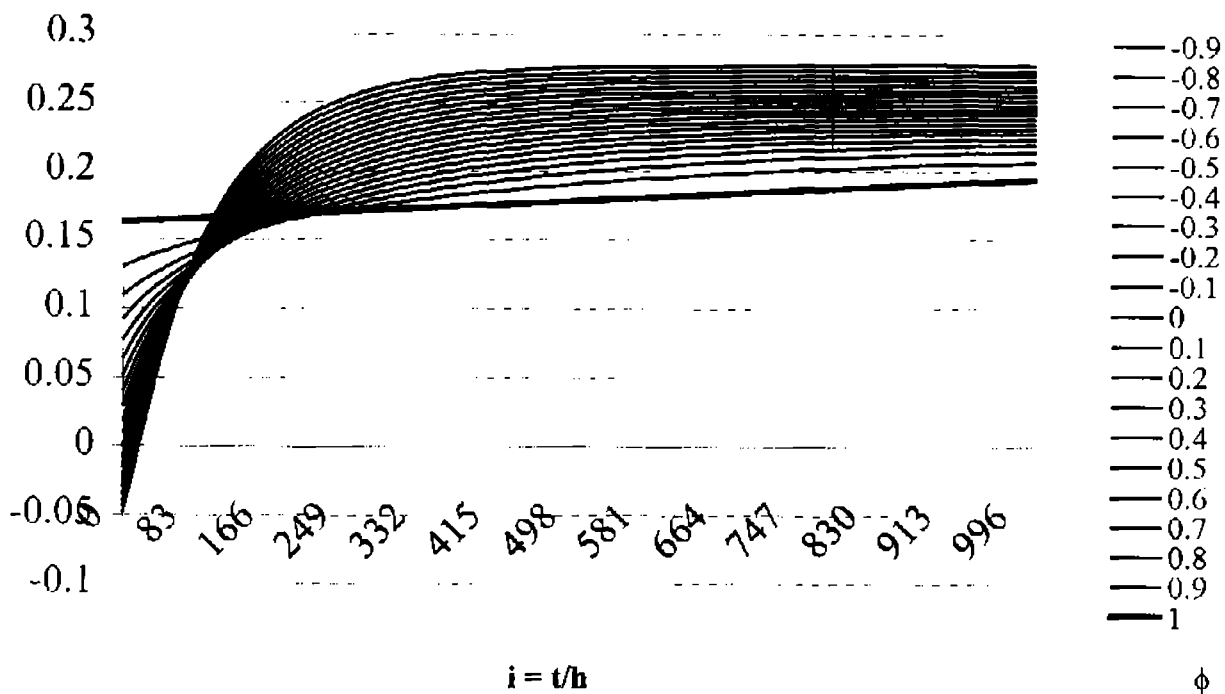
Mayer, D. y López J. (1998), "Solución numérica del problema de Ramsey mediante la ecuación del calor", Documento de Trabajo del CIDE, División de Economía, N° 114.

**Gráficas I Modelo de Ramsey para un agente y varios valores de  $\phi$**   
**Derivadas de r y w aproximadas numéricamente con diferencias centradas**

**Gráfica I.1 Capital**



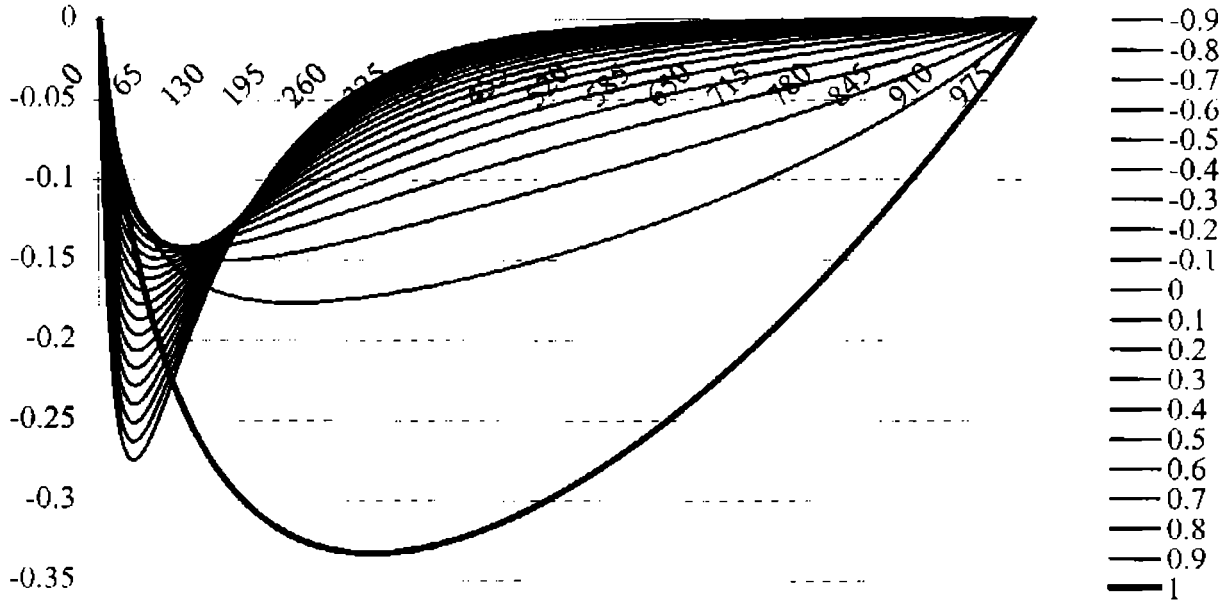
**Gráfica I.2 Consumo**



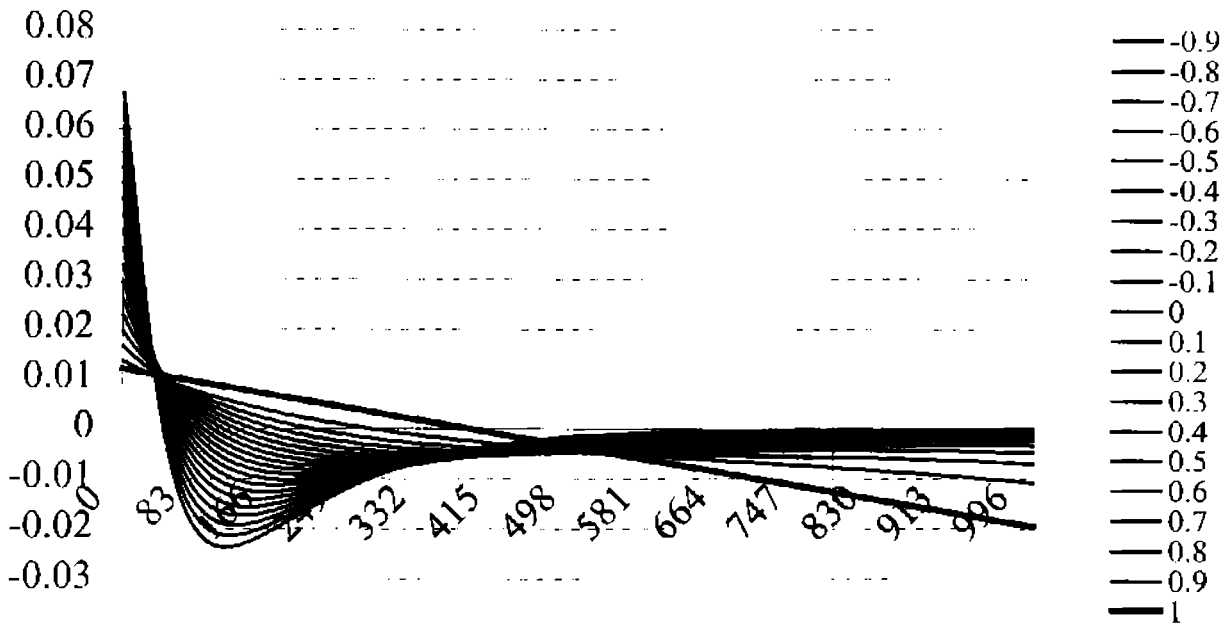
### Gráficas I (continúa)

Razón de los resultados obtenidos aproximando las derivadas de  $r$  y  $w$  analíticamente y numéricamente con diferencias centradas

#### Gráfica I.3 Capital



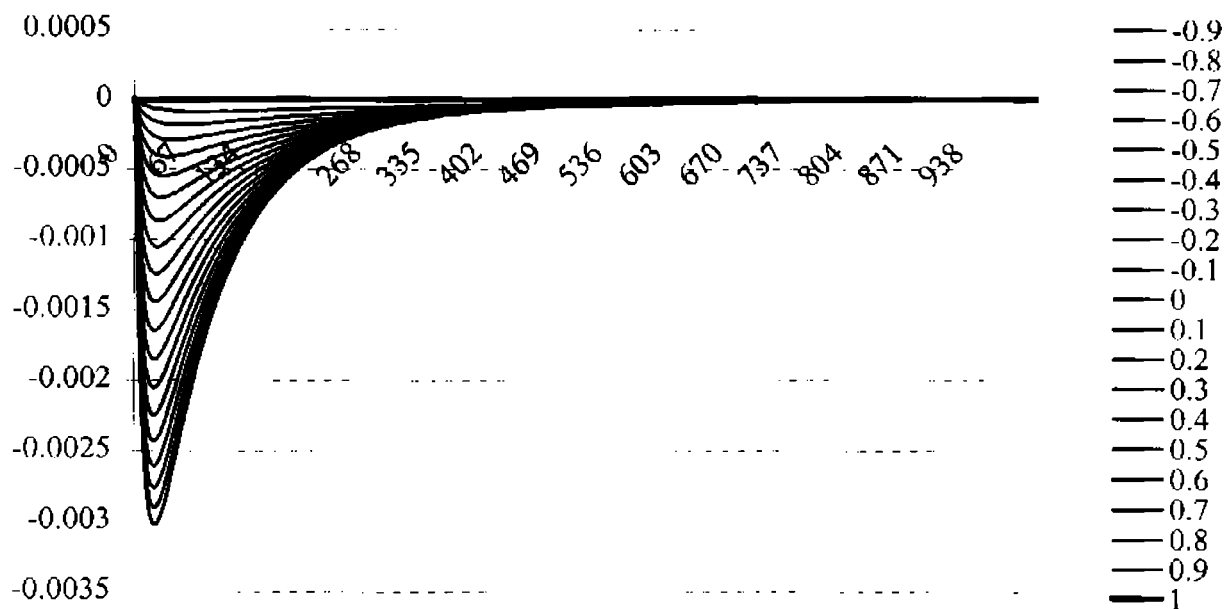
#### Gráfica I.4 Consumo



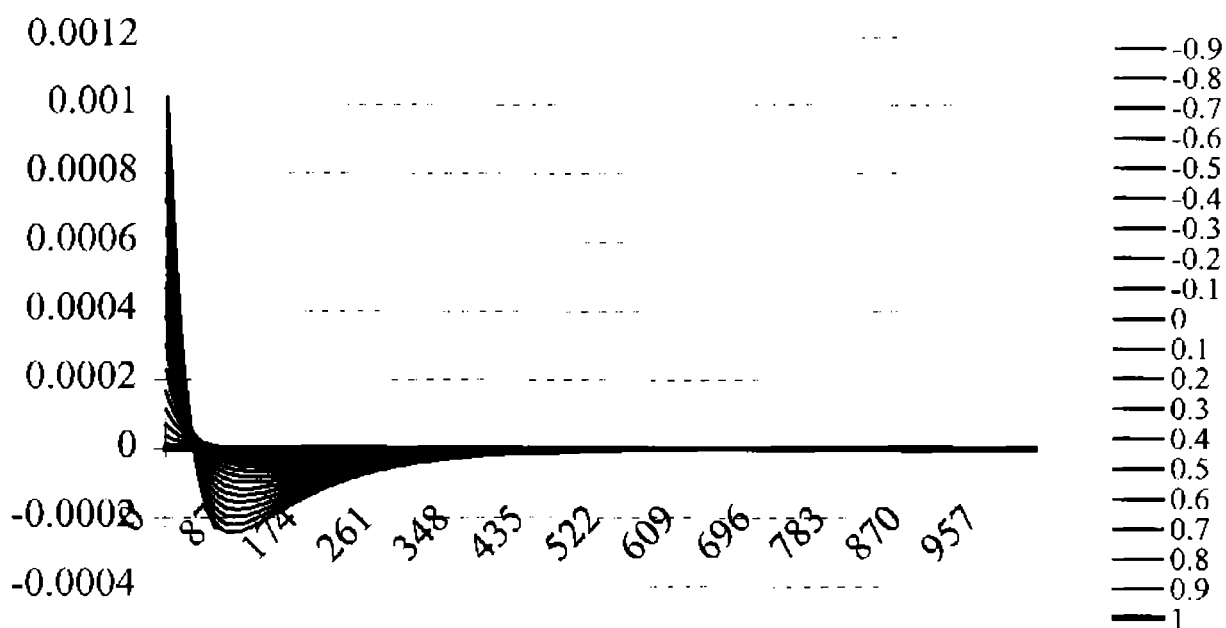
### Gráficas I (continúa)

Razón de los resultados obtenidos aproximando las derivadas de  $r$  y  $w$  numéricamente con diferencias adelantadas y centradas

#### Gráfica I.5 Capital

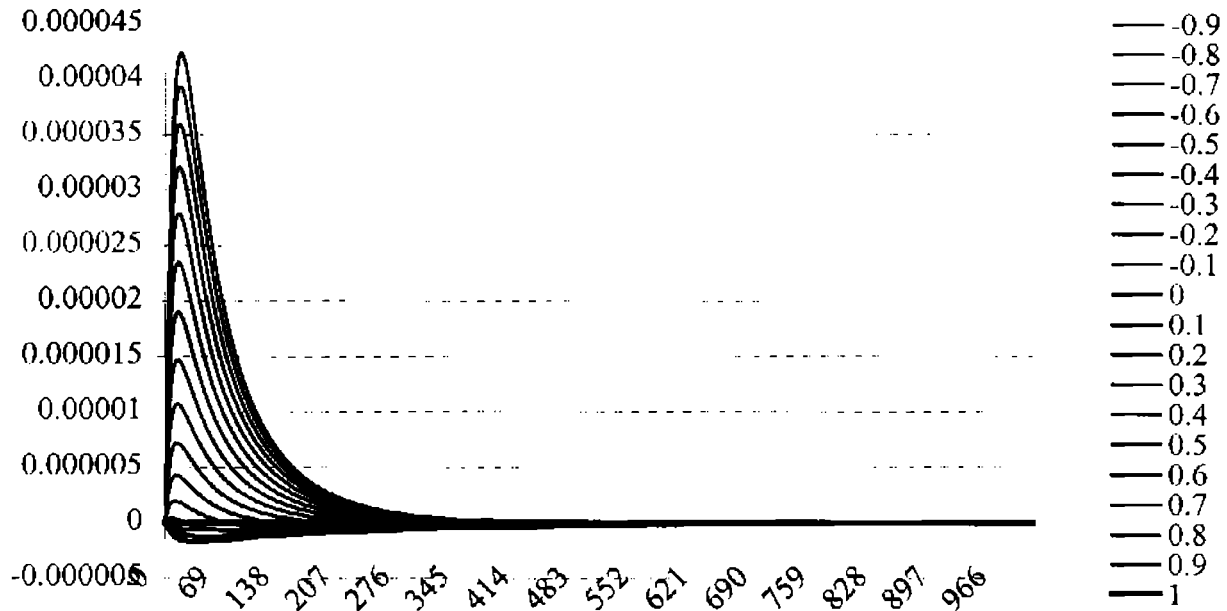


#### Gráfica I.6 Consumo

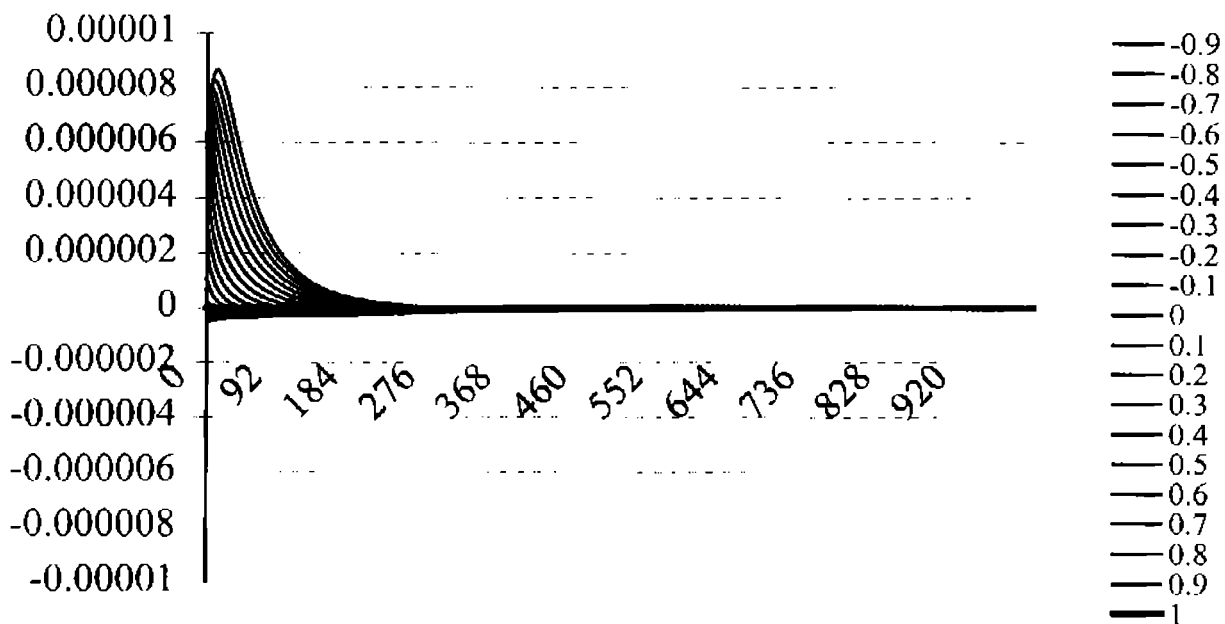


**Gráficas II Modelo de Ramsey para un agente y varios valores de  $\phi$**   
**Razón entre los resultados obtenidos con  $h = 0.01$  y con  $h = .05$**   
**(Derivadas de  $r$  y  $w$  aproximadas numéricamente con diferencias centradas)**

**Gráfica II.1 Capital**



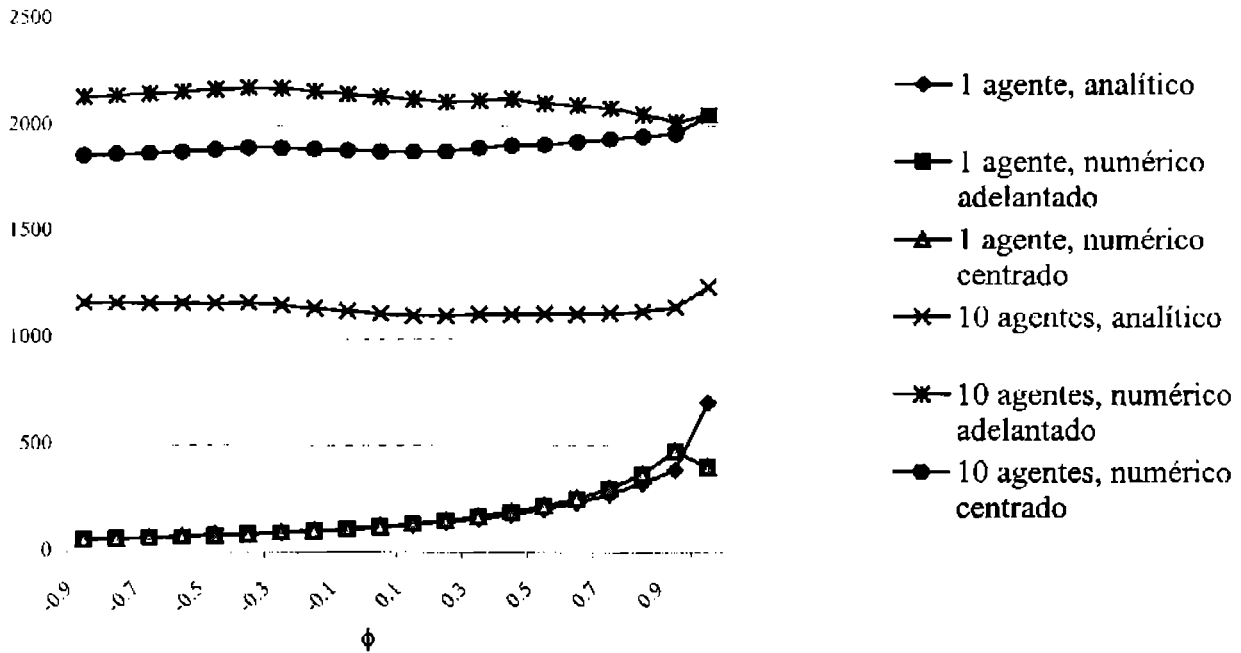
**Gráfica II.2 Consumo**



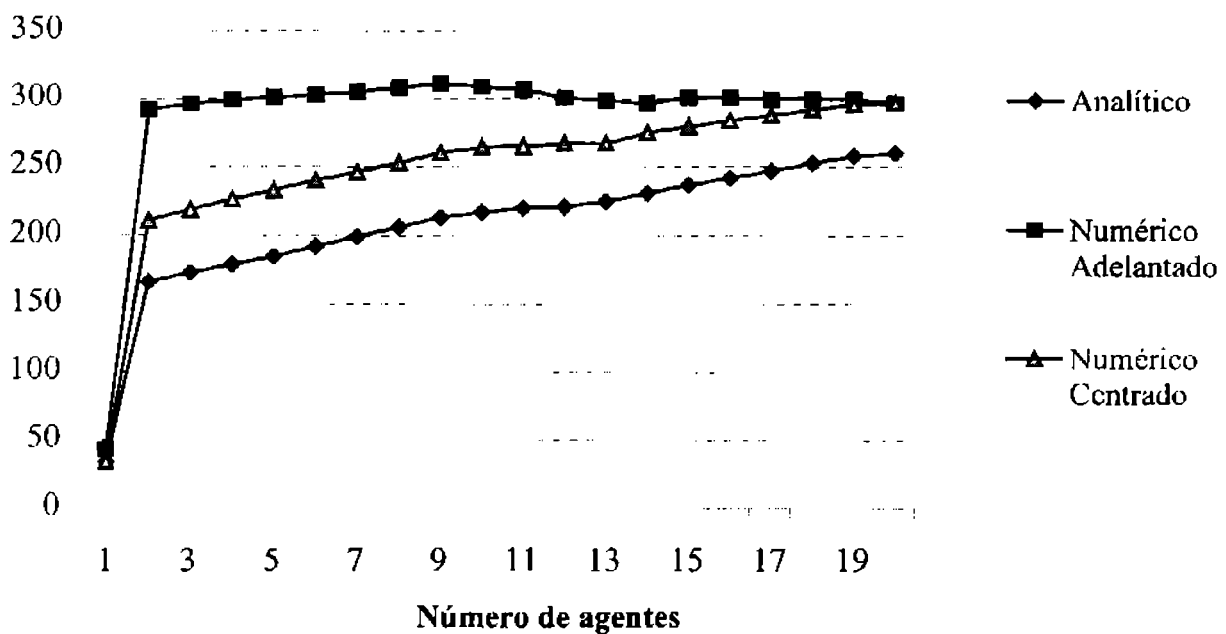


### Gráficas III. Número de iteraciones

**Gráfica III.1** Recorrido en  $s$  para varios valores de  $\phi$   
Número de iteraciones (no optimizadas)



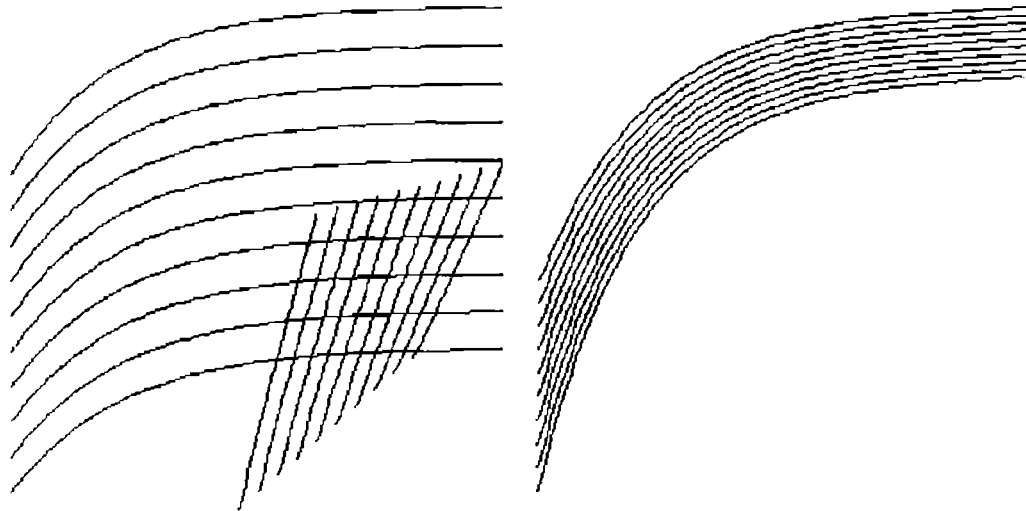
**Gráfica III.2** Recorrido en  $s$  según el número de agentes



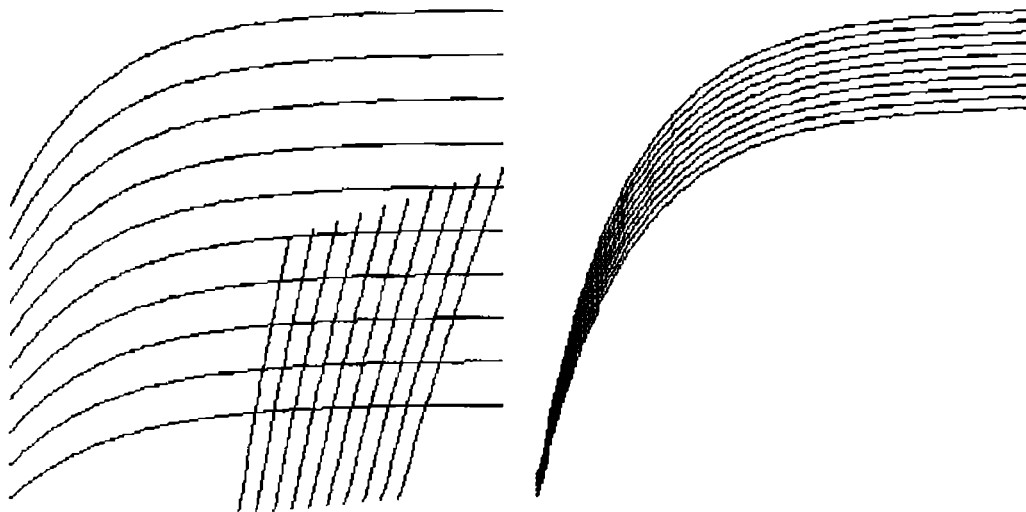
**Gráficas IV. Comparación de los métodos de aproximación de las derivadas de  $r$  y  $w$ .**

**Cada gráfica muestra las trayectorias de los 10 agentes; las de capital y consumo se encuentran en los paneles izquierdo y derecho, mientras que de forma sobrepuesta se muestra el diagrama de fase.**

**Gráfica IV.1 Aproximación analítica**

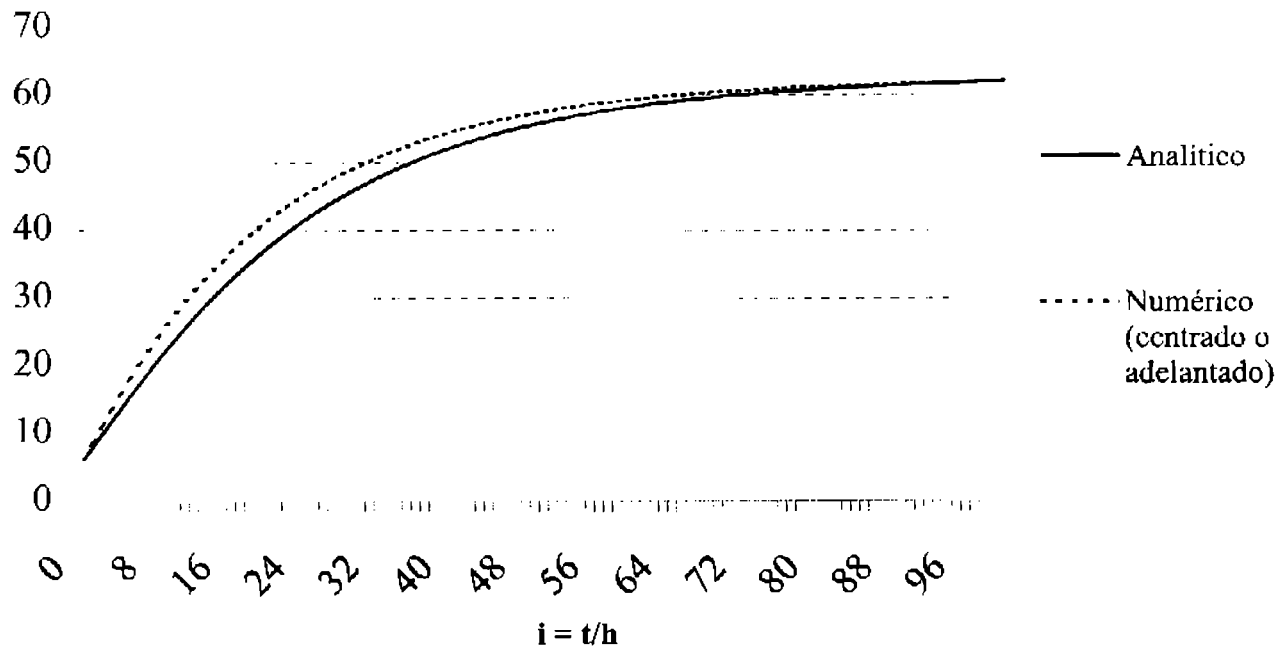


**Gráfica I.2 Aproximación numérica con diferencias centradas (los resultados con diferencias adelantadas son similares)**

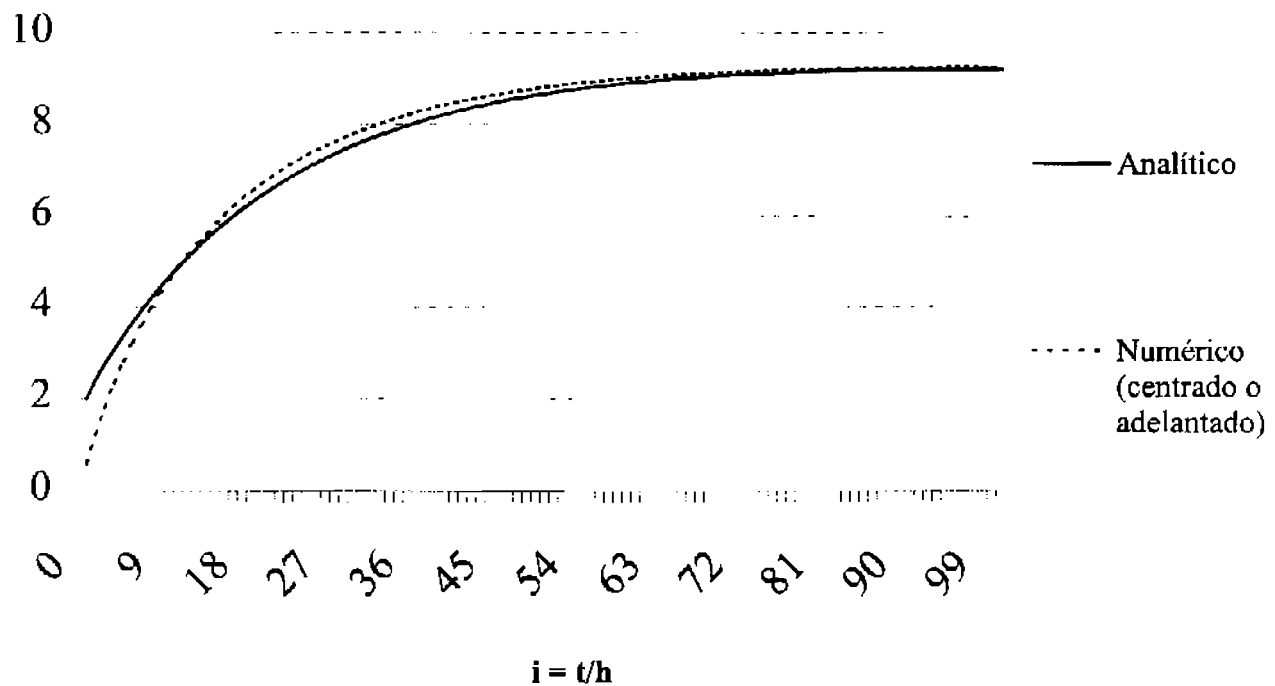


**Gráficas V. Comparación de métodos,  $\phi = 0$ .  
Problema de un agente**

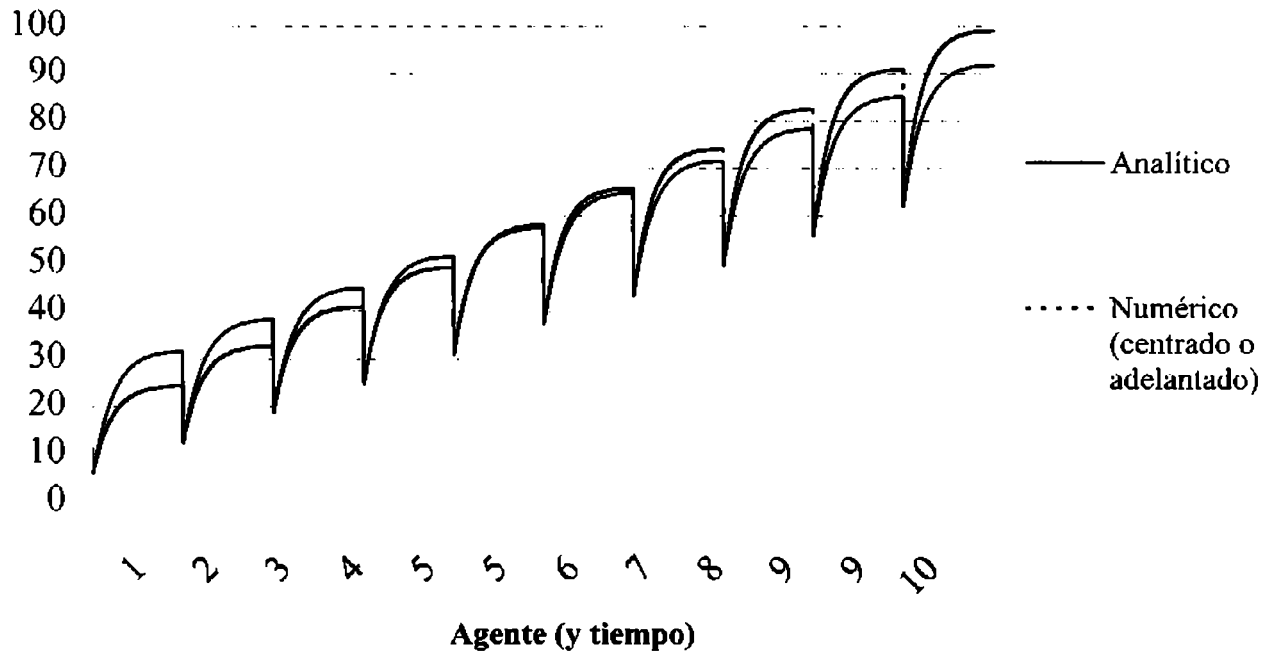
**Gráfica V.1 Capital**



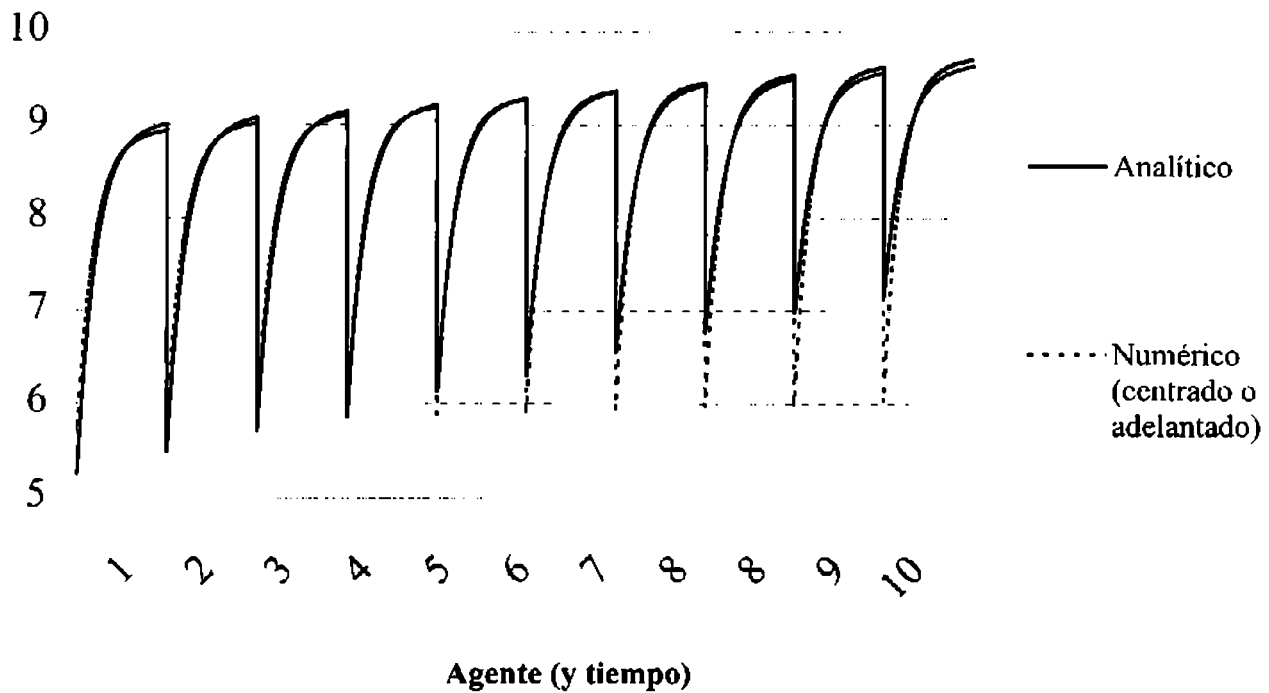
**Gráfica V.2 Consumo**



**Gráficas V (Continúa)**  
**Diez agentes**  
**Gráfica V.3 Capital**



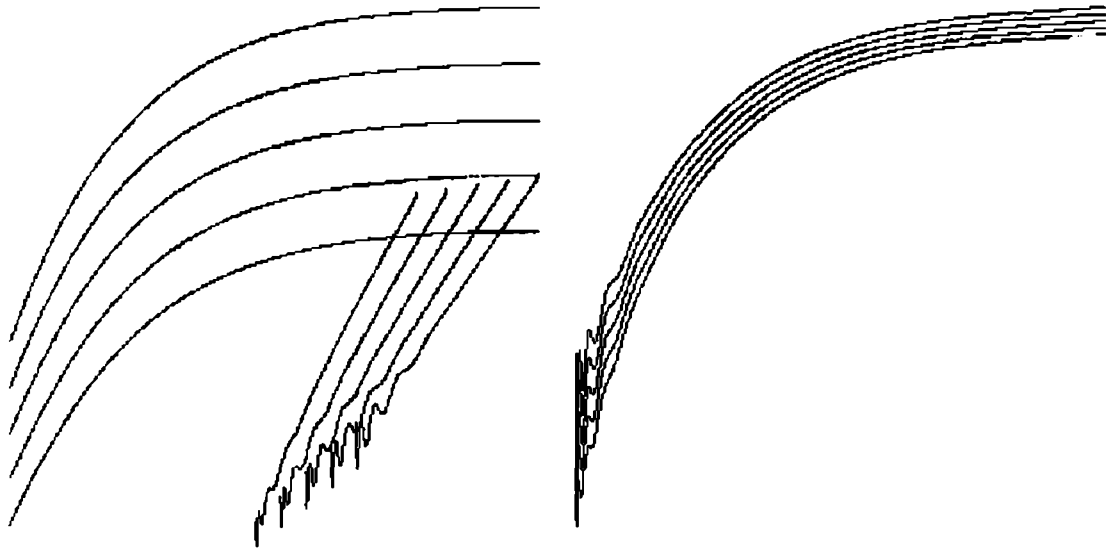
**Gráfica V.4 Consumo**



**Gráficas VI. Inestabilidad del método Cranck-Nicholson ( $\theta = \frac{1}{2}$ )**  
**Resultados inestables para parámetros en que el método  $\theta = 1$  es estable**

**Cada figura muestra las trayectorias de  $N$  agentes; las de capital y consumo se encuentran en los paneles izquierdo y derecho, mientras que de forma sobrepuesta se muestra el diagrama de fase.**

**Gráfica VI.1  $N = 5$**



**Gráfica VI.2  $N = 6$**

