

Las colecciones de Documentos de Trabajo del CIDE representan un medio para difundir los avances de la labor de investigación, y para permitir que los autores reciban comentarios antes de su publicación definitiva. Se agradecerá que los comentarios se hagan llegar directamente al (los) autor(es).

❖ D.R. © 2001, Centro de Investigación y Docencia Económicas, A. C., carretera México-Toluca 3655 (km. 16.5), Lomas de Santa Fe, 01210-México, D. F., tel. 727-9800, fax: 292-1304 y 570-4277. ❖ Producción a cargo del (los) autor(es), por lo que tanto el contenido como el estilo y la redacción son responsabilidad exclusiva suya.



NÚMERO 204

JOSÉ CARLOS RAMÍREZ

**LOS PROBLEMAS MÁS COMUNES EN EL PRONÓSTICO
DE RENDIMIENTOS DE ACTIVOS FINANCIEROS CON
DISTRIBUCIONES NO NORMALES.**

Resumen

El documento analiza los principales problemas relacionados con el pronóstico y optimización de activos financieros cuando sus series de rendimientos exhiben distribuciones de probabilidad no normales. La exposición comprende un análisis pormenorizado de las pruebas de normalidad univariadas y multivariadas para las acciones que forman el índice *Banamex-30* así como el empleo de algunas mezclas de distribuciones y de procesos estocásticos utilizadas para capturar el sesgo y exceso de kurtosis presentes en las distribuciones empíricas. Las conclusiones sostienen que el cálculo tradicional del valor en riesgo para portafolios con activos que tienen distribuciones leptokúrticas y sesgadas es poco fiable si antes no se construyen intervalos de confianza con base en funciones de probabilidad transformadas. Para el caso particular del índice *Banamex-30* las funciones que mejor describen la no normalidad de las series de rendimientos son la *t* de Student multivariada y dos modelos de heteroscedasticidad condicional tempo-dependiente.

Abstract

This paper deals with the main problems related to predictability and optimization of financial assets when data series are not normally distributed. The statistical analysis includes several normality tests on the daily and monthly returns series of *Banamex-30* stocks as well as an application of mixtures of probability distributions and stochastic processes in order to capture skewness and kurtosis. Conclusions drawn from this statistical analysis reveal that calculations of value at risk are not reliable on the basis of traditional mean-variance models if they do not include confidence intervals which are built on the grounds of transformed probability functions. For the *Banamex-30* stocks case, empirical time series conform better to two kinds of transformed functions, multivariate *t* Student distribution and time-dependent heteroskedastic models.

Introducción¹

Andrew Lo (1997) sostiene que si en enero de 1926 un individuo hubiera invertido \$1 en bonos mensuales del Tesoro de los EUA, uno de los activos financieros más seguros en el mundo, y lo hubiera dejado reinvertir por espacio de 70 años, el monto que hubiera recuperado en Diciembre de 1996 sería de \$14. Si, en cambio, dicho individuo hubiera hecho la misma inversión en S&P500, entonces la cantidad que hubiera cobrado al final del período sería del orden de \$1371. Lo más sorprendente de todo, continúa Andrew Lo, es que si a este longevo individuo se le hubiera ocurrido alternar su inversión total (el dólar mas sus intereses) entre los dos activos, de tal manera que sólo hubiera logrado invertir aquel de los dos que producía los más altos rendimientos al final de cada mes, la cifra que hubiera retirado en 1996 sería nada menos que de \$2,296,183,456. De esta manera, el mercado financiero le habría recompensado con creces su habilidad de pronosticar con perfección (*perfect foresight*) la estrategia de inversión que le garantizaba los mayores rendimientos sobre los dos activos financieros.

La moraleja del cuento es muy clara: los inversionistas que son proclives al riesgo están más interesados que ningún otro en pronosticar lo más adecuadamente posible el comportamiento del mercado, en la medida que esperan recibir mayores rendimientos por sus activos. Desafortunadamente la tarea de pronóstico no es simple, pues tanto la creciente volatilidad que experimentan los activos financieros desde hace más de dos décadas (y que incluye a los de renta fija) como la introducción de productos cada vez más complejos, hacen que la predicción sea, en ocasiones, un asunto muy retorcido. Los esfuerzos realizados para explicar la naturaleza de los movimientos de los precios y los rendimientos de los activos han sido inmensos, pero no necesariamente suficientes. La aplicación de herramientas muy sofisticadas en el análisis financiero, como los procesos y el cálculo estocásticos, las técnicas de optimización intertemporal y el desarrollo de disciplinas nuevas como la econometría financiera, no han sido capaces de prevenir quiebras de sociedades de inversión dirigidas, incluso, por los mejores exponentes de las finanzas.

Esto, obviamente, no quiere decir que la literatura no haya entregado buenas cuentas sobre el funcionamiento del mercado o que los matemáticos y economistas tengan que guardar sus fórmulas hasta que Dios se apiade de sus supuestos. Lo único que quiere decir es que los movimientos de los precios y los rendimientos de los activos están regidos, también, por componentes idiosincráticos que hacen que, algunas veces, la mejor estrategia de inversión obedezca a la suerte (Lo y Mackinlay 1990) o al conocimiento empírico del inversionista sobre el mercado (Zenios 1998).

¹ Miembro de la División de Economía del CIDE. El autor agradece la colaboración de Héctor Hernández.

Entre estos componentes cabe destacar la diferente estacionalidad de los rendimientos de los activos en algunos días de la semana o del año o la influencia de los anuncios de información sobre las ganancias de las empresas (véase Kon 1984).

La tarea de decidir si los rendimientos de los activos son o no pronosticables es, en buena medida, un asunto relacionado con su distribución de probabilidad. Si la distribución empírica es normal, entonces el pronóstico del rendimiento de un activo o de un portafolio se vuelve un problema fácil de resolver con cualquier modelo de media-varianza. El análisis del valor en riesgo (VeR) o la pérdida máxima esperada de cualquier portafolio en caso de presentarse un cambio en los factores de riesgo en determinado período de tiempo y dentro de un intervalo de confianza dado, se puede llevar a cabo sin mucha dificultad con el estudio del primer y segundo momentos de la distribución normal.² Pero si, en cambio, la distribución empírica no es normal, entonces la labor de pronóstico se complica, porque ahora hay que establecer si la serie de rendimientos de los activos se ajusta a una mezcla de distribuciones discretas, a un valor extremo o a un proceso estocástico en particular. Y en cualquiera de los casos la solución es ardua, pues además de que ya no es posible seguir utilizando a pie juntillas las técnicas tradicionales de VeR, los problemas para encontrar una ecuación de pronóstico para los rendimientos no son nada despreciables.

El objetivo de este trabajo es analizar las dificultades inherentes en la optimización de rendimientos de portafolios o de activos individuales cuando las distribuciones no son normales o, dicho de otra manera, interesa verificar en que medida los rendimientos de los activos son pronosticables cuando el primer y segundo momentos de una distribución no son normales estacionarios³. Las conclusiones principales del documento señalan que en México, al igual que en los países desarrollados, las series de rendimientos de los activos no siempre son normales estacionarias y, por lo tanto, el pronóstico de portafolios óptimos o de activos individuales es poco fiable con base en las técnicas habituales de VeR si no

² Hull y White (1998, p.9) ofrecen una definición muy intuitiva de lo que es VeR, en los siguientes términos: "Estamos X% seguros de que no perderemos mas que V dólares en los siguientes N días. La variable V es el VeR, la cual es una función de dos parámetros: N, el horizonte de tiempo y X, el nivel de confianza". Las referencias que haremos en torno al VeR a lo largo del documento están orientadas, única y exclusivamente, a ejemplificar la manera en que se afectan las técnicas de administración de riesgos cuando las distribuciones empíricas no son normales, pero sin profundizar en su estimación. El supuesto de normalidad estacionaria subyacente en su cómputo así como su uso generalizado en la estimación del riesgo del capital, hacen que el VeR sea un ejemplo a modo para ilustrar las dificultades asociadas con la violación de ese supuesto.

³ Aquí seguimos la recomendación hecha por Campbell et.al (1997, p.9) de concentrarnos en los rendimientos de los activos y no en sus precios, por dos razones: 1) porque para el inversionista promedio los mercados financieros pueden ser considerados competitivos y, por lo tanto, el tamaño de su inversión no afecta los cambios de precios; y 2) porque los rendimientos tienen propiedades estadísticas mas apropiadas que los precios, tales como estacionariedad y ergodicidad. En aras de la simplicidad aquí usaremos los términos activos, activos financieros y acciones como sinónimos a menos que se especifique lo contrario.

se aplican métodos estadísticos que incluyan funciones de probabilidad transformadas o procesos estocásticos alternativos. Las consecuencias de este resultado son importantes no sólo porque ponen en entredicho la extendida práctica profesional de suponer normalidad, sin probarlo, en el cálculo de volatilidades o de rendimientos esperados de ciertos instrumentos financieros, sino también porque alertan sobre el riesgo de ignorar procesos estocásticos alternativos que ayuden a explicar la verdadera naturaleza del fenómeno subyacente en la serie de datos.

El trabajo se divide en tres partes. En la primera se aplican las pruebas de normalidad (univariadas y multivariadas) al paquete accionario *Banamex 30* con el fin de enunciar los problemas más comunes en el pronóstico de los rendimientos de los activos cuando las distribuciones empíricas no son normales estacionarias. En la segunda parte se ensayan algunas soluciones basadas en la utilización de modelos de heteroscedasticidad condicional para aquellos activos cuyas series de rendimientos presentan sesgos y exceso de kurtosis (o, dicho más técnicamente, que presentan *desplazamientos cíclicos y desplazamientos ordenados en el tiempo*) en sus distribuciones. Finalmente en la tercera parte se discute la pertinencia de usar procesos estocásticos particulares en el proceso de optimización de portafolios. Las conclusiones incorporan una breve discusión acerca de los resultados alcanzados.

Los hechos estilizados sobre el supuesto de normalidad en los rendimientos de los activos financieros

No hay quizás supuesto más fuerte para la teoría de portafolios de media-varianza o los modelos de precios de los activos de capital que el relacionado con la forma de la distribución de los rendimientos de los activos. En general, se supone que esa distribución es normal multivariada con parámetros estacionarios a través del tiempo (Kon, 1984). La discusión en la literatura se reduce, en buena medida, a determinar si las distribuciones empíricas se ajustan a ese supuesto o, más concretamente, a verificar si las hipótesis de normalidad y de valores estacionarios para la media y la varianza son válidas para activos con rendimientos que mantienen cierta correlación entre sí.

En lo que toca a las pruebas de normalidad, los procedimientos incluyen varios pasos complementarios. El primero consiste en determinar si las series originales de rendimientos son univariadamente normales. Para tal efecto, se construyen las gráficas Q-Q como un medio expedito para observar la correlación existente entre el conjunto ordenado de datos observados $x_{(j)}$ y los cuantiles normales $q_{(j)}$. Si la pendiente de la recta compuesta por las coordenadas $(q_{(j)}, x_{(j)})$ es cercana a los 45 grados y el coeficiente de correlación r_Q (también llamado coeficiente de *rectitud*) entre esas cantidades es estadísticamente significativo, digamos al 5% del nivel de significancia como lo sugiere *RiskMetrics*TM (1995, p.51), entonces es posible

confiar en que el análisis rendimiento-riesgo de los activos, basado en el primer y segundo momentos de una distribución normal, es correcto. Si no es así, entonces, lo recomendable es corregir esos datos mediante transformaciones logarítmicas (método *logit* de proporciones y de correlaciones de Fisher) o de potencias del tipo Box-Cox a fin de darles a esos datos una apariencia más *normal* (véase Johnson y Wichern 1992, pp 164-171).⁴

Las correcciones no garantizan, sin embargo, el restablecimiento del supuesto de normalidad. La excesiva presencia de rendimientos más bajos o más altos que los previstos por una normal puede anular el efecto suavizador de la transformación operada e, incluso, hacer que el ajuste disminuya el valor original de r_0 .⁵ Por eso es que si, aún después de la transformación, el coeficiente de *rectitud* no satisface un valor crítico, entonces ya no es posible seguir haciendo inferencias sobre el valor esperado y la desviación estándar de la distribución empírica, debido a que en ese caso los estimadores no convergerían asintóticamente a una χ_v^2 , con v grados de libertad. Bajo esas condiciones, los pronósticos sobre el rendimiento esperado y la volatilidad de los activos estarían subestimados con relación a los valores de los parámetros de una distribución normal teórica (Zangari 1996).

El segundo paso consiste en corroborar esas pruebas univariadas, que son más bien de carácter valorativo o gráfico, con estimaciones estadísticas sobre el sesgo y exceso de kurtosis de los rendimientos de los activos.⁶ Las estimaciones son, por lo general, apoyadas con simulaciones tipo Monte Carlo para confirmar los resultados obtenidos con los estadísticos muestrales de sesgo y kurtosis. Los estadísticos de la

⁴ La característica común de estas transformaciones es que suponen que la distribución modificada es normal univariada o multivariada y que, por tanto, cualquier tipo de inferencia sobre los parámetros originales debe hacerse a partir de esa distribución. Un método alternativo basado en la familia de curvas de Pearson puede consultarse en Kaskey et.al (1980). De acuerdo con este método, el problema de transformación a la normalidad se reduce a resolver una ecuación diferencial de segundo orden sujeta a ciertas condiciones iniciales.

⁵ En este tipo de casos, el “efecto de arrastre” del operador empleado provoca que valores extremos se conviertan en valores moderados y éstos, a su vez, en valores extremos, alterando aún más el sesgo o la kurtosis de la distribución empírica.

⁶ El sesgo y la kurtosis son definidos, respectivamente, como: $\beta_1 = \mu_3^2 / \mu_2^3$ y $\beta_2 = \mu_4 / \mu_2$ donde μ_i es el i -ésimo momento alrededor de la media. Ya que para la distribución normal $\beta_1 = 0$ y $\beta_2 = 3$, las pruebas en relación a las hipótesis nulas de normalidad se hicieron considerando $y_1 = y_2 = 0$, bajo el entendido de que $y_1 = \sqrt{\beta_1}$ y $y_2 = \beta_2 - 3$. La contraparte muestral para los coeficientes de sesgo y kurtosis fueron definidos como $\sqrt{b_1} = m_3 / s^3$ y $b_2 = m_4 / s^4$, donde m_3 y m_4 son los momentos muestrales alrededor de la media y s la desviación de las observaciones respecto a la media muestral.

simulación son calculados con base en una distribución normal multivariada cuya matriz de varianzas y covarianzas es igual a la correspondiente matriz empírica.

Para ilustrar estos dos pasos se presentan la gráfica 1 y el cuadro 1, en los que se condensa la información relativa a los rendimientos diarios de las acciones más bursátiles de México que forman el paquete *Banamex 30*.⁷ La gráfica contiene los trazos Q-Q para la serie de rendimientos de activos no corregidos y corregidos con transformaciones de potencias λ^* . Los pares de puntos $(q_{(j)}, x_{(j)})$ desplegados en la gráfica arrojan un coeficiente de correlación r_Q inferior a 0.9953, que es el valor crítico para pruebas de normalidad del coeficiente de correlación con $\alpha = .05$ y $n > 300$, lo cual implica que no es posible aceptar la hipótesis de normalidad para ninguna serie de datos, incluso ni para aquellas corregidas con potencias λ^* del tipo Box-Cox, que maximizan el logaritmo de una función de verosimilitud normal $\ell(\lambda^*)$ ⁸.

La ausencia de normalidad en el paquete accionario *Banamex 30* también fue confirmada por las pruebas individuales de sesgo y kurtosis que se realizaron para cada una de las series diarias de activos. De acuerdo con el cuadro 1, tan sólo la serie de GCARSO-A1 mostró un comportamiento parcialmente *normal* al arrojar un *valor p* de 7.99% en su prueba de sesgo (no así en su prueba de kurtosis), que significa que la probabilidad de cometer error tipo 1 contra la hipótesis nula de normalidad es muy alta, al menos superior al 5% de nivel de significancia. Sin embargo, este caso no afecta la conclusión general, ya que al realizar las pruebas *ómnibus* de sesgo y kurtosis y de Shapiro-Wilk-Francia se confirmó el rechazo a la hipótesis nula de normalidad para GCARSO-A1 y todas las demás series con *valores p* iguales a

⁷ El paquete *Banamex-30* es un portafolio que consta originalmente, como su nombre lo indica, de igual número de acciones. Desafortunadamente, la falta de información para algunas acciones en determinados períodos de tiempo nos obligó a reducir el tamaño de la muestra a 21 series accionarias. Aún así ésta es muy grande pues abarca a series de 1541 observaciones diarias para cada una de las acciones, entre el 3 de enero de 1994 y el 24 de febrero de 2000. Los rendimientos fueron calculados

de acuerdo con la práctica habitual: $R_t = \ln\left(\frac{X_t}{X_{t-1}}\right)$, donde R_t es el rendimiento en el tiempo t de

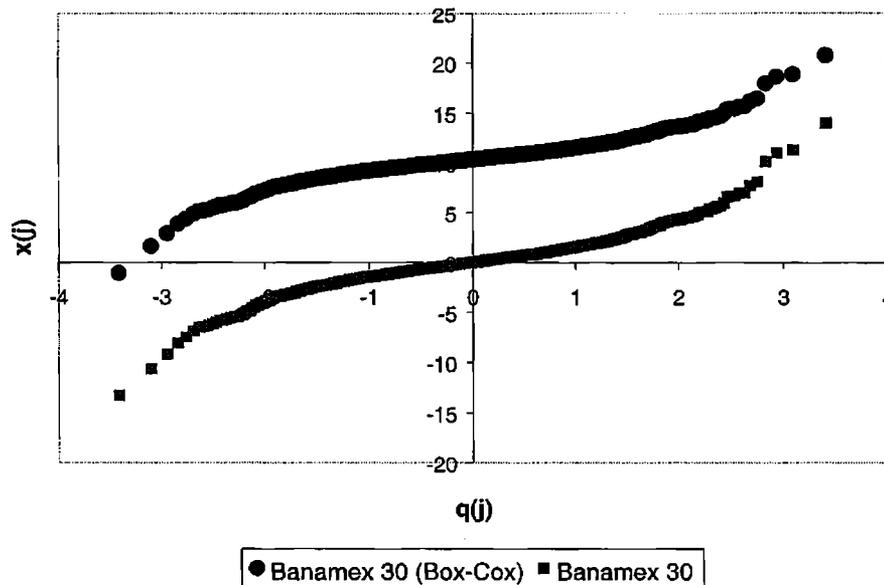
un activo diario y X_t es el precio del activo al cierre de cada día. Adicionalmente y para fines de comparación incluimos la serie del índice *Banamex 30*, tal como es computado por dicho banco. En el cálculo de cada serie de rendimientos diarios se hicieron los ajustes correspondientes para distintos años calendarios así como para los lunes de cada semana.

⁸ La expresión $\ell(\lambda^*) = -\frac{n}{2} \ln \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(x_j^{(\lambda^*)} - x^{(\bar{\lambda}^*)} \right)^2 \right] + (\lambda^* - 1) \sum_{j=1}^n \ln x_j$ es el logaritmo de

una función de verosimilitud normal, después de que ésta ha sido maximizada con respecto a los parámetros de la media y la varianza poblacionales.

cero.⁹ Los cálculos basados en simulaciones de Monte Carlo arrojaron los mismos resultados.

Gráfica 1
Q-Q Banamex 30 (observaciones diarias)



Coefficiente de rectitud Banamex 30 = 0.9631

Coefficiente de rectitud Banamex 30 (Box-Cox) = 0.9620

⁹ Las pruebas que aparecen en las últimas dos columnas de los cuadros 1 y 2 son llamadas pruebas ómnibus porque combinan el sesgo y la kurtosis en un solo estadístico. La prueba llamada conjunta es la ofrecida por D'Agostino y Pearson y consiste en estimar el estadístico $X^2(\sqrt{b_1}) + X^2(b_2)$ como una distribución χ^2_2 en la que cada componente es la desviación equivalente normal estandarizada. La prueba de Shapiro-Wilk-Francia es, por su parte, computada como $W = \frac{(b'x)^2}{nS^2}$, donde $b' = \frac{c'}{(c'c)^{1/2}}$, c_i es el valor esperado del i-ésimo estadístico de orden de una población normal y S la matriz muestral de varianzas y covarianzas. Esta prueba es más general que la conjunta pues, a diferencia de ésta última, contempla los casos en que el sesgo y la kurtosis no son independientes entre sí. Para mayores detalles véase Mardia (1980).

Cuadro 1
Pruebas de normalidad univariada para series de rendimientos de activos diarios

Activo	Sesgo	Valor p	Monte Carlo Valor p	Kurtosis	Valor p	Monte Carlo Valor p	Prueba conjunta Valor p	Shapiro-Wilk Valor p
ALFA.A	1.170	0.000	0.000	13.346	0.000	0.000	0.000	0.000
APASCO	0.777	0.000	0.000	6.196	0.000	0.000	0.000	0.000
BANACCI.O	0.295	0.000	0.000	2.979	0.000	0.000	0.000	0.000
BIMBO.A	0.267	0.000	0.000	3.304	0.000	0.000	0.000	0.000
CEMEX.CPO	0.247	0.000	0.000	6.159	0.000	0.000	0.000	0.000
CIFRA.V	0.548	0.000	0.000	5.893	0.000	0.000	0.000	0.000
COMERCI.UBC	0.636	0.000	0.000	11.479	0.000	0.000	0.000	0.000
DESC.B	0.624	0.000	0.000	4.537	0.000	0.000	0.000	0.000
ELEKTRA.CPO	0.667	0.000	0.000	8.225	0.000	0.000	0.000	0.000
FEMSA.UBD	0.501	0.000	0.000	12.466	0.000	0.000	0.000	0.000
GCARSO.A1	-0.016	0.000	0.000	4.851	0.799	0.578	0.000	0.000
GFNORTE.O	0.151	0.000	0.000	4.232	0.015	0.015	0.000	0.000
GMEXICO.B	0.765	0.000	0.000	3.643	0.000	0.000	0.000	0.000
ICA	-0.144	0.000	0.000	9.436	0.000	0.000	0.000	0.000
SAVIA.A	0.533	0.000	0.000	8.404	0.000	0.000	0.000	0.000
SORIANA.B	0.342	0.000	0.000	2.579	0.000	0.000	0.000	0.000
TAMSA	0.518	0.000	0.000	6.220	0.000	0.000	0.000	0.000
TELECOM.A1	0.389	0.000	0.000	4.292	0.000	0.000	0.000	0.000
TELMEX.L	0.626	0.000	0.000	3.221	0.000	0.000	0.000	0.000
TELEVISA.CPO	0.620	0.000	0.000	5.487	0.000	0.000	0.000	0.000
VITRO.A	0.905	0.000	0.000	9.101	0.000	0.000	0.000	0.000
BANAMEX-30	0.222	0.000	0.000	6.456	0.000	0.000	0.000	0.000

Hasta aquí no hay nada nuevo bajo el sol. El comportamiento de los rendimientos diarios en México sigue un patrón muy similar al descrito por varios autores para el caso de los EU y Europa (véase, por ejemplo, Affleck-Graves and McDonald, 1989). La ausencia de normalidad en los rendimientos diarios de los activos es un hecho de sobra conocido desde que Mandelbrot (1963) y Fama (1965) mostraron la presencia de colas gordas en las series del índice industrial Dow Jones.¹⁰ El sesgo y exceso de kurtosis de esas series dio pie a que se ensayaran criterios alternativos para subsanar el problema derivado de la falta de normalidad. Uno de ellos fue someter a prueba la hipótesis de normalidad en escenarios donde los rendimientos cubrían diferentes períodos de tiempo. La conclusión fue que, en efecto, la hipótesis era altamente

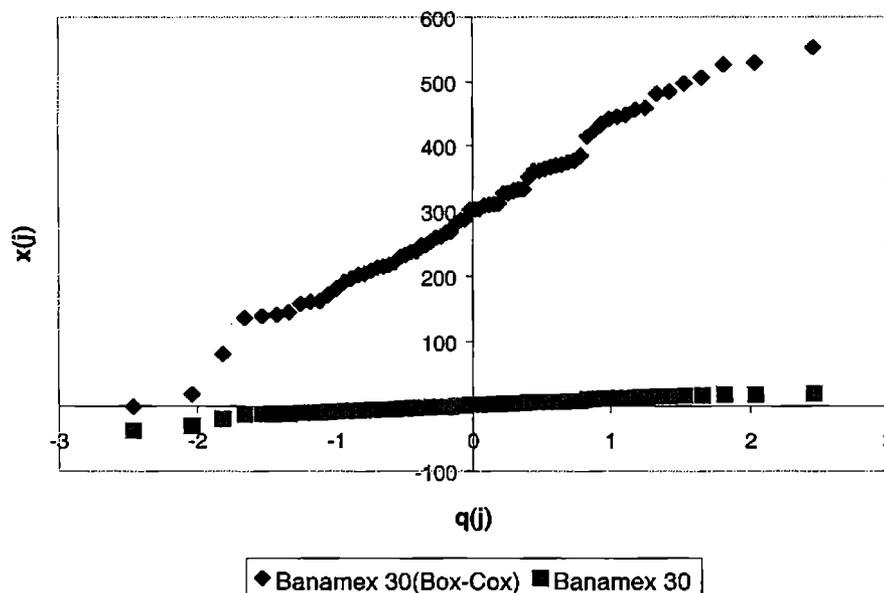
¹⁰ La presencia de colas gordas es debido, particularmente, al exceso de kurtosis de una distribución empírica con relación a la supuesta por una normal teórica. Este exceso incrementa la probabilidad de presenciar valores grandes y pequeños a costa de disminuir la probabilidad de ocurrencia de los valores moderados.

sensible a la periodicidad de la serie de los datos y que, por tanto, no eran triviales las consecuencias de tomar tal o cual intervalo de tiempo. El otro criterio consistió en asumir que la existencia de colas gordas era una indicación de que los cambios en los precios de los activos eran mejor captados por la distribución no normal estable de Pareto, con exponente característico menor que 2, que por una normal idéntica e independientemente distribuida. La evidencia aquí no fue tan favorable como en el otro criterio, debido a que autores como Blattberg and Gonedes (1974) encontraron que los exponentes característicos de la distribución de la suma intertemporal para los rendimientos sobre los activos individuales o portafolios aumentaba con el tamaño de la suma; lo cual era una abierta violación a la propiedad de estabilidad de la distribución de Pareto.

Los resultados obtenidos con el paquete *Banamex 30* confirmaron que la tarea de pronóstico de los rendimientos de los activos es muy distinta para series diarias que para series mensuales.¹¹ De acuerdo con la gráfica 2 y el cuadro 2, las series mensuales corregidas con la transformación de Box-Cox resultaron normales para el valor crítico correspondiente a $\alpha = .05$ así como para todas las pruebas ómnibus de sesgo y kurtosis. El punto a discusión es si esas pruebas son suficientes para hacer el pronóstico del cambio monetario en el valor de un portafolio. La respuesta no es inmediata pues además de que esos activos deben cumplir con la especificación de ser linealmente dependientes con respecto a un número de variables del mercado, es importante verificar si su correlación cruzada no afecta el supuesto de normalidad multivariada. Y aquí entramos al tercer paso requerido para probar normalidad en las series de rendimientos.

¹¹ Aquí seguimos la recomendación hecha por RiskMetrics™ (1995, p.68) de extrapolar los rendimientos mensuales a partir de las series no traslapadas de rendimientos diarios.

Gráfica 2
Q-Q Banamex 30 (observaciones mensuales)



Coefficiente de rectitud Banamex 30 = 0.9739
 Coeficiente de rectitud Banamex 30 (Box-Cox) = 0.9956

Cuadro 2

Pruebas de normalidad univariada para series de rendimientos de activos mensuales

Activo	Sesgo	Valor p	Monte Carlo Valor p	Kurtosis	Valor p	Monte Carlo Valor p	Prueba conjunta Valor p	Shapiro -Wilk Valor p
ALFA.A	-0.508	0.085	0.030	0.578	0.341	0.348	0.105	0.244
APASCO	-0.048	0.872	0.934	0.407	0.502	0.413	0.663	0.708
BANACCIO	0.033	0.912	0.934	1.382	0.023	0.046	0.132	0.013
BIMBO.A	0.564	0.056	0.093	0.410	0.499	0.492	0.096	0.055
CEMEX.CPO	-0.404	0.171	0.183	0.810	0.182	0.146	0.124	0.111
CIFRA.V	0.237	0.422	0.461	0.080	0.895	0.875	0.641	0.721
COMERCI.UBC	0.024	0.934	0.944	0.138	0.820	0.880	0.899	0.758
DESC.B	-0.320	0.277	0.366	1.235	0.042	0.052	0.095	0.225
ELEKTRA.CPO	0.266	0.367	0.320	0.959	0.114	0.065	0.174	0.094
FEMSA.UBD	-0.194	0.510	0.440	0.017	0.977	0.887	0.752	0.455
GCARSO.A1	-0.247	0.403	0.424	0.844	0.164	0.142	0.226	0.376
GFNORTE.O	0.190	0.520	0.486	1.428	0.019	0.044	0.102	0.032
GMEXICO.B	0.000	0.999	0.987	1.885	0.012	0.694	0.050	0.031
ICA	0.039	0.894	0.927	1.403	0.021	0.045	0.127	0.074

SAVIA.A	0.098	0.738	0.761	1.703	0.005	0.035	0.081	0.033
SORIANA.B	0.110	0.710	0.748	0.689	0.256	0.240	0.409	0.321
TAMSA	0.032	0.913	0.935	1.988	0.001	0.027	0.058	0.093
TELECOM.A1	-0.107	0.718	0.724	0.677	0.264	0.321	0.418	0.193
TELMEX.L	0.285	0.334	0.440	0.414	0.494	0.410	0.382	0.553
TELEVISA.CPO	0.031	0.917	0.937	1.670	0.006	0.036	0.089	0.102
VITRO.A	0.056	0.849	0.908	0.318	0.600	0.563	0.737	0.404
BANAMEX-30	0.000	1.000	0.969	0.131	0.695	0.641	0.926	0.683
X^2_{22}	44.544	0.003		19.521	0.612		0.385	

Nota.- La última fila de esta tabla contiene los valores de la prueba de normalidad multivariada para el estadístico de Wald que se asimila a una χ^2_v .

En efecto, una vez aceptada la hipótesis de normalidad univariada lo que procede es verificar si la serie de rendimientos es también normalmente multivariada, pues la primera no implica necesariamente a la segunda, para así descartar la presencia de cosesgos y cokurtosis en el análisis de rendimiento-riesgo de un portafolio.¹² Las pruebas incluyen un examen de normalidad bivariada y de momentos conjuntos y otro de orden generalizado con base en el estadístico de Wald.

El cuadro 3 exhibe el porcentaje de observaciones fuera de los contornos de las elipsoides de las 21 funciones de densidad normal bivariadas construidas al comparar las series de rendimientos de CIFRA, que en este caso se toma como base de referencia para fines meramente ilustrativos, contra cada una de las series de los activos. Si los contornos del elipsoide están balanceados en torno a los rendimientos medios de la distribución conjunta, \bar{R} , entonces lo que se espera es que éstos contengan un cierto porcentaje de los valores de los rendimientos bajo la superficie de esa distribución con probabilidad $1 - \alpha$, para asegurar normalidad bivariada. En términos formales, el elipsoide debe satisfacer la condición para una distribución de rendimientos normal v -dimensional $(R - \bar{R})S^{-1}(R - \bar{R}) \leq \chi^2_v(\alpha)$, con probabilidad $1 - \alpha$, donde $\chi^2_v(\alpha)$ es el centésimo percentil superior de un distribución chi cuadrada con v grados de libertad y S es la matriz muestral de varianzas y covarianzas de los rendimientos.

¹² Es bien conocido que distribuciones que son univariadamente normales pueden no ser normalmente multivariadas a causa de la presencia de efectos cruzados entre los rendimientos de los activos, y que distribuciones que no son univariadamente normales nunca pueden ser normalmente multivariadas (véase Johnson y Wichern, 1992).

Cuadro 3

Momentos conjuntos de sesgo y kurtosis y porcentaje de observaciones dentro de los contornos de densidad constante(observaciones mensuales)

Activo	Correlación	Cosesgo	Valor p	Cokurtosis	Valor p	%
ALFA.A	0.535	-0.044	0.586	0.061	0.807	45.833
APASCO	0.570	-0.095	0.257	0.030	0.911	51.389
BANACCI.O	0.527	-0.080	0.312	0.396	0.104	54.167
BIMBO.A	0.387	-0.071	0.282	-0.198	0.266	54.167
CEMEX.CPO	0.517	-0.292	0.000	0.017	0.944	50.000
COMERCI.UBC	0.599	0.070	0.426	0.008	0.977	50.000
DESC.B	0.530	-0.136	0.089	0.361	0.141	54.167
ELEKTRA.CPO	0.474	-0.293	0.000	0.195	0.368	58.333
FEMSA.UBD	0.722	0.115	0.270	-0.182	0.620	50.000
GCARSO.A1	0.737	0.098	0.354	0.414	0.274	50.000
GFNORTE.O	0.446	-0.232	0.001	0.412	0.042	55.556
GMEXICO.B	0.365	0.130	0.044	0.304	0.074	55.556
ICA	0.639	-0.028	0.759	-0.085	0.784	54.167
SAVIA.A	0.428	-0.104	0.137	0.425	0.029	51.389
SORIANA.B	0.639	0.013	0.888	-0.211	0.496	48.611
TAMSA	0.420	0.068	0.324	0.594	0.002	54.167
TELECOM.A1	0.610	-0.001	0.990	0.501	0.086	52.778
TELMEX.L	0.640	0.016	0.862	-0.245	0.430	52.778
TELEVISA.CPO	0.593	-0.194	0.025	-0.221	0.432	54.167
VITRO.A	0.555	-0.010	0.904	-0.243	0.346	52.778
BANAMEX-30	0.769	-0.043	0.699	0.158	0.696	50.000
Promedio						52.381

Nota.- CIFRA-V se toma como referencia para la estimación de los cosesgos y cokurtosis; en la columna 7 aparecen los porcentajes de observaciones fuera de los contornos de densidad.

El criterio adoptado en el cuadro 3 para garantizar normalidad bivariada es que el porcentaje de observaciones incluido por los contornos de densidad debe ser aproximadamente del 50%, de otra manera se sospecharía de la presencia de efectos de correlación cruzada entre los rendimientos de los activos y los de CIFRA. La conclusión es que el porcentaje promedio computado para esas funciones (52.38%) excede ligeramente al 50% de las observaciones que deberían ser contenidos por los contornos de densidad bivariados en la mayoría de los casos, con lo que se sospecha de la presencia de efectos cruzados o, mas propiamente, de cosesgos y cokurtosis entre las series. La prueba concluyente consiste en decidir si los cosesgos y cokurtosis de estas funciones y de las que resultan de comparar cada una de las series de activos entre sí, son espurios o reflejan, en realidad, la existencia de colas gordas y sesgadas en las distribuciones conjuntas.

El cuadro 3 presenta los momentos conjuntos de sesgo y kurtosis de cada serie de activos con relación a CIFRA. Los altos valores de p para cada serie indican que los

cosesgos y las cokurtosis arriba calculados son aparentemente espurios, debido a que no es posible rechazar la hipótesis de normalidad bivariada para niveles de significancia del 5%. La misma situación se repite al cambiar de base de referencia y comparar cada una de las combinaciones de series de rendimientos. De acuerdo con el último renglón del cuadro 2, los valores críticos del estadístico generalizado de Wald (que se comporta como una $\chi^2_v(\alpha)$) confirman que, en efecto, los momentos cruzados para cualquier combinación de series de rendimientos no afectan el supuesto de normalidad multivariada (NMV) de la muestra, con lo que el pronóstico del portafolio con estas series puede hacerse con el procedimiento habitual de VeR.¹³

La verificación del supuesto de NMV para series mensuales no resuelve, sin embargo, un problema crucial en la práctica financiera cotidiana y que consiste en que las técnicas de pronóstico basadas en los estimadores de VeR se desarrollan generalmente sobre bases diarias. Un estimador de VeR corresponde, de hecho, al valor crítico de una distribución de probabilidad de pérdidas y ganancias potenciales diarias de un portafolio (Kupiec (1995)). Por ese motivo, el verdadero problema derivado de la validación del supuesto de NMV se relaciona con el tratamiento de las series de rendimientos diarios que, como vimos, presentan colas gordas y sesgadas en su distribución.

Las soluciones a este problema han sido muchas y variadas pero las principales se encuentran resumidas en el documento técnico propuesto recientemente por el grupo de *RiskMetrics*TM (1996), cuyo método para medir exposición al riesgo de un portafolio es el más usado en varios países, entre los que se cuenta México. Para *RiskMetrics*TM (1996) los rendimientos siguen una distribución NMV condicional que no incondicional, lo cual quiere decir que aún cuando las series de rendimientos originales, R_t , no son NMV, éstas divididas por sus respectivas desviaciones estándar pronosticadas, σ_t , si son NMV con media cero y varianza 1. De esta manera, los tres métodos de pronósticos que propone *RiskMetrics*TM (1996) reconocen los cambios de volatilidad que presentan las distribuciones de rendimientos en el tiempo. El primer método de pronóstico es el llamado método estándar en el que la varianza de los rendimientos es una función del pronóstico de la varianza de los días previos y del cuadrado del rendimiento. Esto es:

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t \quad (1)$$

¹³ Esta conclusión es válida aun cuando se rechaza la hipótesis de normalidad para el sesgo (no así para la kurtosis). El estadístico de Wald (W) se calcula como $W = nb_2' [V(b_2)]^{-1} b_2 \sim \chi^2_N$; donde n es el número de observaciones en la muestra, b_2 es el vector de medidas de kurtosis (o b_1 si consideramos los sesgos) para los N activos, y $V(b_2)$ es la matriz de varianzas y covarianzas de las medidas de kurtosis (o $V(b_1)$ si consideramos la matriz correspondiente a las medidas de sesgos). La extensión de este indicador a pruebas de cosesgos y cokurtosis y de NMV basadas en una función generalizada de momentos para M -parámetros puede consultarse en Richardson y Smith (1993).

$$\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda) r_{t-1}^2$$

$$\text{donde: } r_t = \frac{R_t}{\sigma_t}$$

ε_t es una variable aleatoria normalmente distribuida con media 0 y varianza 1

σ_t^2 es la varianza de r_t , y

λ es un parámetro (o factor de decaimiento) que regula el peso de la varianza pasada.¹⁴

El segundo método es el de mezcla de normales y es introducido para medir más eficientemente la falta de simetría y exceso de kurtosis que, según evidencia mostrada por el mismo documento de *RiskMetrics*TM (1996), no es capturada por el método estándar cuando pronostica VeR con bandas de intervalo de confianza del 95% y 98% (Zangari, 1996). El nuevo método supone que los rendimientos son generados por el modelo:

$$r_t = \sigma_{1,t} \cdot \varepsilon_{1,t} + \sigma_{1,t} \cdot \delta_t \cdot \varepsilon_{2,t} \quad (2)$$

donde:

r_t es el rendimiento continuamente compuesto al tiempo t

$\varepsilon_{1,t}$ es una variable aleatoria normalmente distribuida con media cero y varianza 1

$\varepsilon_{2,t}$ es una variable aleatoria normalmente distribuida con media $\mu_{2,t}$ y varianza $\sigma_{2,t}^2$

δ_t es una variable 0/1 que toma el valor 1 con probabilidad p y 0 con probabilidad 1-p

$\sigma_{1,t}$ es la desviación estándar dada en el modelo estándar

Finalmente el tercer método, conocido como distribución generalizada de errores (DGE), es el más flexible de todos, porque además de corregir sesgo y exceso de kurtosis estima la volatilidad grupal (*volatility clustering*), que es otro de los problemas recurrentes en las series de rendimientos diarios (véase Kim y Kon 1994).¹⁵ A diferencia del método de mezcla de normales, el DGE tiene la ventaja de actualizar continuamente los cambios en la varianza de los rendimientos de los

¹⁴ RiskMetrics recomienda un valor de $\lambda = 0.94$ y un horizonte histórico de 74 días, en promedio, para llevar a cabo pronósticos de varianza con ventana de uno a diez días. Si vemos con detenimiento la ecuación de la varianza del modelo estándar podemos observar que RiskMetrics atribuye al pronóstico de la volatilidad un peso del 94% a la varianza actualizada del periodo de 74 días y sólo un 6% a la varianza del día en que se hace el pronóstico.

¹⁵ La volatilidad grupal se refiere al comportamiento seguido por los cambios en los precios ante un cambio previo en los precios de los activos. Si la volatilidad es positiva, entonces grandes (pequeños) cambios en los precios tenderán a seguir a grandes (pequeños) cambios en los precios. Si ésta es negativa, entonces se observará una relación inversa entre los cambios de precios.

activos. La gran variedad de formas que puede tomar la DGE, mediante la regulación del parámetro ν de su función de densidad $f(\xi)$, permite, también, hacer ajustes más precisos en el pronóstico de valores extremos en el primer y noventa y noveno percentil, como lo sugieren los cálculos computados por *RiskMetrics*TM en un análisis comparativo de los tres métodos (1996, p.242). En este método los rendimientos son generados por el modelo:

$$r_t = \sigma_t \xi_t \quad (3)$$

$$\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda) r_{t-1}^2$$

donde: ξ_t es una variable aleatoria distribuida como DGE con parámetro ν y función

de densidad $f(\xi_t) = \frac{\nu \exp\left(-\frac{1}{2} \xi_t |\lambda|^\nu\right)}{\lambda 2^{(1+\nu^{-1})} \Gamma(\nu^{-1})}$; Γ es la función gamma y

$\lambda = \left[2^{-\frac{2}{\nu}} \Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right) / (3/\nu)\right]^{\frac{1}{2}}$. Los demás parámetros son definidos de igual manera que

arriba.

Hecho el cálculo de los rendimientos y volatilidades para las series corregidas con cualquiera de los tres métodos, es importante comprobar si en efecto estos métodos dan cuenta de los problemas de sesgo y kurtosis antes de llevar a cabo la estimación definitiva del VeR de un portafolio. Las pruebas comprenden la construcción de intervalos de confianza con base en el enfoque de funciones estimadas (*estimating functions*) o la transformación de distribuciones de probabilidad que son supuestas normales multivariadas. Las primeras incluyen la comparación entre dos tipos de intervalos de confianza: uno que incorpora explícitamente el sesgo y la kurtosis de las series generadas por funciones estimadas y otro construido por métodos, como los vistos arriba, que suponen normalidad (véase Li 1999).¹⁶ La transformación de distribuciones consiste, por su parte, en el mapeo percentil por percentil de una distribución alternativa y una normal estándar (véase Hull y White 1998). La distribución alternativa es una transformación de la distribución empírica que restituye las propiedades de una distribución normal, capaz de reflejar las probabilidades de hasta tres desviaciones estándar en el rendimiento de los activos.

La aplicación de cualquiera de las pruebas permite calcular el VeR del cambio de una unidad monetaria en el valor de un portafolio en un día, ΔP , como:

$$\Delta P = \sum_{i=1}^n a_i \Delta r_i, \quad \forall a \in \mathfrak{R} \quad (1 \leq i \leq n), \quad \text{de acuerdo con una distribución de}$$

probabilidad transformada que es normal con media cero y desviación estándar

¹⁶ La longitud de los intervalos de confianza basados en las funciones estimadas está positivamente relacionada con la kurtosis y negativamente relacionada con el valor absoluto del sesgo.

$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_{ij} a_i a_j \sigma_i \sigma_j}$ (ρ_{ij} es el coeficiente de correlación entre Δr_i y Δr_j). De

esta manera, el VeR de un portafolio con un nivel de confianza, digamos del 99%, y con un horizonte de N días, es de $2.33 \sigma_p \sqrt{N}$, si se calcula con una distribución transformada, o el resultante de la longitud total (L) de un intervalo de confianza

$$L = \sqrt{\left[\left(\frac{b_2 + 2}{b_1} \right) + 4 \left(\frac{2.33 \sqrt{(b_2 + 2)(b_2 + 2 - b_1^2)}}{|b_1|} + 1 \right) \right] \sigma_p^2}$$

multiplicado por \sqrt{N} , si se aplican las funciones estimadas.¹⁷

Independientemente de las complicaciones surgidas en el cómputo del VeR, lo interesante de los dos últimos métodos de pronóstico de *RiskMetrics*TM (1996) es que resumen los esfuerzos realizados por varios autores para obtener una mejor especificación de aquellas distribuciones empíricas de rendimientos afectadas por cambios temporales en la media y la varianza (el otro gran tema asociado con las pruebas de normalidad). Desde que Blattberg y Gonedes (1974) mostraron que el modelo de Student era superior a la distribución paretiana estable en la descripción de series de rendimientos cuya distribución tenía parámetros no estacionarios, se han desarrollado dos grandes grupos de modelos alternativos para capturar las variaciones no estacionarias de la media y la varianza: los modelos de heteroscedasticidad tempo-independientes (como el de mezcla de normales) y los tempo-dependientes (como el DGE). La discusión acerca de cual de los dos tipos de modelos describe mejor las variaciones de los parámetros en una distribución es, a decir de Kim y Kon (1994) una cuestión empírica, que tiene mucho que ver con la naturaleza del instrumento financiero bajo consideración. Por esa razón, consideramos pertinente hacer una comparación de varios tipos de modelos pertenecientes a ambos grupos, a fin de tener una idea más precisa de la naturaleza del problema a resolver cuando se estima VeR con distribuciones no normales.

Comparación de métodos heteroscedásticos usados para corregir distribuciones de rendimientos de activos con parámetros no estacionarios.

La intuición detrás de la aplicación de los modelos heteroscedásticos en finanzas es relativamente simple. Como se sabe, los sesgos y excesos de kurtosis que presentan las distribuciones de los rendimientos son debidos a desplazamientos de sus parámetros entre un número finito de valores, ocasionados por cambios en la estructura de capital, eventos exógenos al mercado (desplazamientos de tiempo

¹⁷ En caso de que los activos no sean linealmente dependientes de un cierto número de variables del mercado se puede utilizar simulaciones tipo Monte Carlo, expansiones de Taylor para precisar la relación entre ΔP y Δr_i o escenarios de simulación en los que se definen aproximaciones discretas punto-M a la distribución de probabilidad de cada variable del mercado (véase Hull y White 1998).

ordenado) o por la mayor varianza de los rendimientos en algunos días de la semana (desplazamientos cíclicos). La persistencia con que los primeros desplazamientos explican el sesgo observado y los segundos el exceso de kurtosis, demanda, pues, la utilización de modelos de distribución que capturen las variaciones en la media y la varianza a través del tiempo.¹⁸ Entre estos modelos cabe mencionar, por un lado, a la distribución de Student, la mezcla discreta generalizada de distribuciones normales y el modelo mixto de difusión con salto (modelos de heteroscedasticidad condicional tempo-independientes, HCTI) y, por otro lado, a algunos modelos tipo GARCH (modelos de heteroscedasticidad condicional tempo-dependientes, HTCD).

En lo que toca a los modelos HCTI, no hay quizás nada más usual que comparar el poder descriptivo de la distribución t de Student con el de la mezcla de normales. La justificación radica en el alegato de que la distribución de Student captura más valores extremos que una normal estacionaria pero no la combinación de los desplazamientos cíclicos y estructurales, o de tiempo ordenado, de los parámetros de la distribución (Kim y Kon, 1994). Las pruebas contenidas en el cuadro 4 no parecen, sin embargo, confirmar los resultados encontrados para otros países pues, mientras que la distribución de Student describe mejor las series diarias de 15 activos, la mezcla de dos y tres normales sólo lo hace para 6 activos y el índice Banamex-30.

La conclusión se desprende al observar el signo del estadístico del logaritmo de la

tasa de verosimilitud,
$$\Lambda_{NS} = \frac{\ell(\theta_N/r)}{\ell(\delta/r)}$$
, entre una y más distribuciones normales y una distribución Student. Si el logaritmo de Λ_{NS} es positivo, entonces es más probable que la mezcla de normales genere los datos observados de una manera más confiable que la distribución de Student, contrario a lo que sucedería si el signo de Λ_{NS} fuera negativo. Los valores negativos del estadístico en los renglones del cuadro 4 indican que la distribución de Student es superior a la descripción hecha por una normal (Λ_{1S}) en todas las series de activos, pero no así al incluir la mezcla

Cuadro 4
Comparación entre una distribución Student y la mezcla discreta de normales generalizada

Activo	Λ_{1S}	Λ_{2S}	Λ_{3S}
ALFA.A	-0.659	295.965	ND
APASCO	-0.906	187.764	ND
BANACCIO	-0.841	ND	ND
BIMBO.A	-1.124	ND	ND

¹⁸ Con estos modelos el sesgo observado es explicado por desplazamientos en la media y las colas gordas por los desplazamientos en la varianza (véase Kon 1984).

CEMEX.CPO	-0.770	ND	ND
CIFRA.V	-0.858	147.306	184.021
COMERCI.UBC	-0.646	-23.913	ND
DESC.B	-0.848	ND	ND
ELEKTRA.CPO	-0.245	ND	ND
FEMSA.UBD	-0.580	ND	ND
GCARSO.A1	-0.872	123.809	ND
GFNORTE.O	-0.817	ND	ND
GMEXICO.B	-1.006	ND	ND
ICA	-0.648	-15.246	ND
SAVIA.A	-1.100	ND	ND
SORIANA.B	-1.100	ND	ND
TAMSA	-0.767	ND	ND
TELECOM.A1	-0.922	149.136	ND
TELMEX.L	-1.290	ND	ND
TELEVISA.CPO	-0.795	ND	ND
VITRO.A	-0.678	ND	ND
BANAMEX-30	-2.242	2.159	ND

de dos normales: en este caso los signos positivos de Λ_{2s} revelan una mayor capacidad descriptiva de la mezcla sobre la distribución Student en las series diarias de alfa, apasco, cifra, comerci, gcarso, ica, telecom y el índice Banamex-30. La inclusión de tres normales no mejora la potencia descriptiva del modelo de mezclas sobre la distribución de Student. Las pruebas se hicieron estimando las series de cada activo bajo el supuesto de que las distribuciones se comportaban como una distribución de Student y una mezcla de normales, de acuerdo con las siguientes funciones de verosimilitud:

$$L_T(\underline{\delta}) = \sum_{t=1}^T \log g(r_t / \underline{\delta}) \quad (\text{para la distribución t de Student})$$

$$\text{donde: la función de densidad } g(r_t / \underline{\delta}) = \frac{\Gamma[(v_s + 1)/2]}{\Gamma[v_s/2] \sqrt{\pi v_s}} \left\{ 1 + \frac{H_s}{v_s} (r_t - \mu_s)^2 \right\}^{-(v_s+1)/2}$$

μ_s es el parámetro de localización

H_s es el parámetro de escala

v_s son los grados de libertad; y

$$\ell(\underline{\theta} / r) = \prod_{t=1}^T \left[\sum_{i=1}^N \lambda_i p(r / \gamma_i) \right] \quad (\text{para la mezcla de funciones})$$

donde: $\gamma_i = (\alpha_i, \sigma_i^2)$; y

$p(r/\gamma_i)$ es la función de densidad normal con media α_i y varianza σ_i^2 .¹⁹

Para probar la robustez de este resultado comparamos el poder descriptivo de la distribución de Student con otros modelos competidores. La primera comparación incluye al modelo de difusión con saltos, también de HCTI, que ha sido usado para evaluar el efecto combinado de los eventos raros y las mayores volatilidades de los rendimientos en algunos días de la semana o del año sobre los parámetros de las distribuciones empíricas. La popularidad de esta mezcla de procesos estocásticos reside en su capacidad de capturar movimientos irregulares y bruscos que afectan los valores estacionarios de la media y la varianza en una forma muy parecida a como lo hacen los modelos con parámetros cambiantes en el tiempo.

La alta inestabilidad económica y financiera experimentada por México en el periodo bajo estudio, parece una argumento más que poderoso para justificar aquí su utilización.²⁰ Los cambios violentos en la volatilidad de los precios de los activos durante los primeros meses de 1995 dieron como resultado trayectorias de rendimientos caracterizadas por picos pronunciados y ondas de amplitud irregular, que se ajustan perfectamente a las descritas por la combinación de procesos de Poisson *compuestos y no homogéneos* con movimientos de Wiener de diferente varianza. La forma funcional de la ecuación de difusión con saltos que nosotros empleamos está expuesta en (4). Se trata de una forma típica, muy utilizada en la literatura, en la que se asume que cada vez que hay un arribo de información anormal existe un salto instantáneo en el precio de las acciones de tamaño J que es independiente de Z .²¹

¹⁹ Debido a las dificultades que enfrentamos en el cálculo de la función de densidad de probabilidad para la mezcla de normales, optamos por usar el método de estimación cuasibayesiana de máxima verosimilitud propuesto por Venkataraman (1997). La función a maximizar en este método es

$$\begin{aligned} ((p, \mu_n, \sigma_n, \sigma_\beta) | \{r_t\}) = \sum_t \log \left[\frac{p}{\sigma_n} \exp\left(-\frac{1(r_t - \mu_n)^2}{2\sigma_n}\right) + \frac{1-p}{\sigma_\beta} \exp\left(-\frac{1r_t^2}{2\sigma_\beta^2}\right) \right] - \frac{a_n}{2} \log(\sigma_n^2) - \frac{a_\beta}{2} \log(\sigma_\beta^2) \\ - \frac{b_n}{\sigma_n^2} - \frac{b_\beta}{\sigma_\beta^2} - \frac{c_n(m_n - \mu_n)^2}{2\sigma_n^2}, \text{ donde } a_n, b_n, c_n, m_n, a_\beta, b_\beta, \text{ son constantes no negativas que} \end{aligned}$$

reflejan creencias acerca de los parámetros que están siendo estimados.

²⁰ Para una explicación más detallada de la importancia teórica y empírica de los procesos de difusión con saltos en la explicación de la kurtosis véase Duffie y Pan (1997).

²¹ El computo de la función de densidad de este modelo requirió, primero, estimar la función de densidad de difusión $f(r) = (1 - \lambda)\phi(r; \alpha, \sigma^2) + \lambda\phi(r; \alpha, \sigma^2 + \delta^2)$ en la que $\phi(r; \alpha, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(r - \alpha)^2\right)$ y, luego, incorporar un proceso de Poisson truncado con densidad $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \phi(r, \alpha, \sigma^2 + n\delta^2)$. Los parámetros del modelo mixto fueron

$$\log(r_t) = \left(\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma Z(t) + \sum_{n=1}^{N(t)} J_n \quad (4)$$

donde: $Z(t)$ = proceso estandarizado de Wiener,

$N(t)$ = proceso de Poisson no homogéneo

J_n = una variable aleatoria normal con media cero y varianza σ_j^2

que representa el logaritmo de uno más el porcentaje de cambio en el precio del activo causado por el n-ésimo salto.

α = la tasa instantánea condicional esperada de rendimiento por unidad de tiempo del proceso de Wiener

σ^2 = varianza condicional instantánea de los rendimientos por unidad de tiempo del proceso de Wiener.

La segunda y última comparación comprende a los modelos EGARCH y de *Glosten, Jagannathan y Runkle* (GJR), cuya característica común es suponer que la media y la varianza en el tiempo t están condicionadas al conjunto de información disponible en $t-1, F_{t-1}$, de acuerdo con las siguientes ecuaciones:

$$m_t = E(r_t / F_{t-1}) \quad (5)$$

$$h_t = V(r_t / F_{t-1}) \quad (6)$$

donde los residuales o rendimientos no anticipados, son calculados como $\epsilon_t = r_t - m_t$. La utilidad de llevar a cabo un análisis conjunto de ambos modelos reside en las posibilidades de análisis que ofrecen las diferencias de sus supuestos sobre el conjunto de información relevante F_{t-1} y, en general, sobre la forma de las ecuaciones (5) y (6). Con base en ellos, uno puede modelar, por ejemplo, la media condicional con componentes autorregresivos y de promedios móviles de diferente orden y agregarle un coeficiente de respuesta a los cambios en la varianza contemporánea para series de rendimientos que acusan desplazamientos ordenados en el tiempo muy violentos. O, también, se les puede combinar con diferentes variantes de modelos ARMA para mejorar el ajuste de series afectadas por desplazamientos cíclicos (motivados por cambios en la varianza condicional) que alteran, a su vez, la dirección de los desplazamientos ordenados (motivados por cambios en la media condicional) o, simplemente, para capturar alguna característica

estimados por máxima verosimilitud empleando el método BFGS. Para una justificación teórica de la forma de estimación de los parámetros del modelo véase Ball y Torous (1985).

adicional que se considere relevante de las distribuciones de rendimientos no normales.²²

El procedimiento aquí adoptado consistió en suponer una misma ecuación de la media condicional, m_t del tipo ARMA (1,1) para los dos modelos (ecuación 7) y dos especificaciones diferentes para la varianza condicional, h_t^2 , en las que se incluyen los parámetros γ y k , usados para estimar la volatilidad grupal y apalancamiento, respectivamente (ecuaciones 8 y 9). Con el propósito de incorporar mayor variedad en la especificación de las varianzas se incluyeron los dos parámetros por separado en la ecuación (8) del modelo EGARCH(1,1) y en forma conjunta a través del parámetro η_1 , en la ecuación (9) del modelo GJR (1,1).²³

$$m_t = c_0 + br_{t-1} + a\varepsilon_{t-1} \quad (7)$$

$$\log(h_t^2) = \varpi + \beta \log(h_{t-1}^2) + \gamma \left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{h_{t-1}} \right| + k \frac{\varepsilon_{t-1}}{h_{t-1}} \quad (8)$$

$$h_t^2 = \varpi + \zeta \varepsilon_{t-1}^2 + \eta_1 d_{t-1} \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}^2 \quad (9)$$

La comparación de los modelos es un ejercicio a modo para verificar las bondades de las ecuaciones propuestas por *RiskMetrics*TM (1996), ya que visto con detenimiento el modelo de difusión con salto no es mas que una mezcla infinita de distribuciones normales (ecuación 2) en tanto que el EGARCH y el GJR son variantes de los modelos DGE descritos por la ecuación (3). De esta manera, los resultados obtenidos se reducen a confrontar el poder predictivo de las mezclas de normales (que incluye a la mezcla de procesos estocásticos) con el de modelos que

²² La característica que regularmente se le asocia a estos modelos es el efecto de apalancamiento (k), el cual es introducido para capturar la asimetría en las distribuciones de rendimientos ocasionada por malas noticias en el mercado accionario. En condiciones normales se espera que aumentos en la volatilidad condicional se expliquen por cambios negativos en el residual estandarizado o, dicho de otra manera, que las malas noticias disminuyan los precios de las acciones e incrementen el apalancamiento financiero y la volatilidad.

²³ Los parámetros de la ecuación (8) indican que si $\gamma > 0$ entonces la volatilidad condicional tenderá a aumentar o decrecer en razón proporcional al valor absoluto del residual estandarizado, con lo que se puede afirmar que cambios significativos en los precios de las acciones son precedidos por otros cambios significativos en los precios (volatilidad grupal). De la misma manera, y como se explicó en la nota de pie anterior, un valor negativo de k indica la existencia del efecto de apalancamiento. En el modelo GJR ambos parámetros son captados mediante la agregación del término de asimetría η_1 a un modelo GARCH en el que $d_{t-1} = 1$ si $\varepsilon_{t-1} < 0$ y $d_{t-1} = 0$ de otra manera. El impacto del residual cuadrado sobre la volatilidad condicional variará dependiendo si el residual de rezago 1 es positivo o negativo. Por esa razón en este modelo el efecto de apalancamiento se detecta si $\eta_1 > 0$.

privilegian la actualización de la varianza de los rendimientos de acuerdo a diferentes especificaciones.

Las conclusiones más sobresalientes las podemos agrupar en dos grandes grupos. El primero es de orden particular y se refiere a las mejoras en la capacidad descriptiva introducida por cada uno de los últimos tres modelos. De acuerdo con el cuadro 5, el modelo de difusión con saltos resultó adecuado para explicar el comportamiento de 20 de 21 de los activos y del índice *Banamex 30*. El rechazo a la hipótesis nula de igualdad de medias y varianzas a cualquier nivel de significancia (con valores p iguales a cero en todos los casos) indica que la presencia de información anormal sí afecta el precio de los activos, alterando con saltos la volatilidad de sus rendimientos.

La situación para los modelos EGARCH (1,1) y GJR (1,1) es ligeramente distinta, puesto que aún cuando ambos capturan la dependencia lineal en la media y la varianza a la vez que abaten la correlación serial en residuales y residuales al cuadrado ($Q(12)$ y $Q(12)$ al cuadrado), sus especificaciones no eliminan por completo el sesgo y exceso de kurtosis de las series de rendimientos (véase el cuadro 6). No obstante esto, los valores de los coeficientes de sus varianzas condicionales rezagadas, β , son significativamente positivos y menores que uno, lo que muestra que las series de rendimientos tienen un alto factor de persistencia (o larga memoria) sobre la varianza condicional del período anterior. En el caso concreto del EGARCH (1,1), las pruebas sobre los dos parámetros arrojaron resultados mixtos, ya que mientras el modelo comprobó la existencia de volatilidad grupal en todas las series con valores p iguales a cero, no dio cuenta de la presencia del efecto de apalancamiento en 21 activos. Los valores positivos de k en la mayoría de las series así como su pobre significancia estadística en 4 activos que presentaron signo negativo, confirman el rechazo a la hipótesis de que las malas noticias del mercado accionario disminuyen el precio de las acciones. El mismo resultado puede observarse en el modelo GJR, donde los valores positivos de η_i para 11 series de activos no resultaron significativos para niveles de significancia menores al 5%.²⁴

²⁴ La explicación a esta aparentemente extraña conclusión puede hallarse en el irregular comportamiento de las acciones durante el período bajo estudio. En concreto, después de los movimientos irregulares de los primeros meses de 1995 el mercado accionario entró en una fase relativamente estable que, con sus excepciones, se mantuvo hasta el final del período (de hecho, las acciones de la muestra siguen cotizando hoy en día); lo cual probablemente inhibió el efecto apalancamiento de las empresas durante 1995. La división del período puede, seguramente ayudar a hacer más notorio ese efecto en más número de acciones.

Cuadro 5
Proceso de difusión con salto

No.	Λ	α	σ^2	δ^2
ALFA.A	0.6443	-0.1720	0.3751	0.1879
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
APASCO	1.4688	-0.2806	0.2322	0.4920
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
BANACCI.O	1.2568	-0.1995	0.4754	0.3061
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
BIMBO.A	1.4953	-0.3141	0.4055	0.5243
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
CEMEX.CPO	0.6994	-0.1018	0.4171	0.2575
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
CIFRA-V	1.0512	-0.2389	0.3187	0.2057
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
COMERCI.UBC	0.9904	0.0454	0.3533	0.1882
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
DESC.B	0.4661	0.0319	0.3034	0.3397
	0.0000	0.2293	0.0000	0.0000
ELEKTRA.CPO	3.4168	-3.1226	-0.4299	0.5208
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
FEMSA.UBD	0.1393	0.2676	0.2875	0.4303
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
GCARSO.A1	-1.3239	1.5506	0.2608	0.3012
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
GFNORTE.O	0.0157	0.8644	0.8033	0.4983
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
GMEXICO.B	0.6700	-0.1833	0.3188	0.4117
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
ICA	0.6606	-0.0590	0.3764	0.2344
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
SAVIA.A	-1.1981	0.9658	0.2522	0.3070
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
SORIANA.B	NC	NC	NC	NC
TAMSA	0.5592	0.1527	0.3653	0.2499
	0.0000	0.0905	0.0000	0.0000
TELECOM.A1	0.2281	0.6146	0.3416	0.2437
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
TELMEX.L	0.5972	0.0680	0.3602	0.2330
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
TELEVISA.CPO	0.6874	0.0844	0.4407	0.3410
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
VITRO.A	0.0982	0.6886	0.3180	0.2546
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

BANAMEX-30	3.0245	-3.2211	-0.6177	0.3535
	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Cuadro 6
Modelos de heteroscedasticidad condicional tempo-dependientes

	ω	ζ	η	GJR				Q	Q^2
				B	b_1	b_2			
1	0.208	0.146	0.031	0.822	0.679	5.770	8.999	8.291	
	0.000	0.000	0.171	0.000			0.532	0.406	
2	0.489	0.119	0.089	0.796	0.658	5.596	2.917	18.971	
	0.000	0.000	0.000	0.000			0.983	0.041	
3	0.046	0.150	-0.143	0.907	0.513	5.091	12.465	6.908	
	0.000	0.000	0.000	0.000			0.255	0.734	
4	0.172	0.133	-0.074	0.891	0.493	5.122	20.242	11.717	
	0.000	0.000	0.000	0.000			0.027	0.304	
5	0.133	0.050	0.020	0.916	0.389	5.009	12.120	12.946	
	0.000	0.000	0.140	0.000			0.277	0.227	
6	0.145	0.108	-0.100	0.919	0.670	5.986	6.521	13.082	
	0.000	0.000	0.000	0.000			0.770	0.219	
7	0.242	0.095	0.026	0.863	0.412	6.229	7.053	8.312	
	0.000	0.000	0.102	0.000			0.720	0.598	
8	0.482	0.129	0.003	0.814	0.151	8.026	16.230	28.583	
	0.000	0.000	0.858	0.000			0.093	0.001	
9	0.393	0.132	-0.013	0.836	0.684	5.943	15.368	9.186	
	0.000	0.000	0.533	0.000			0.119	0.515	
10	0.129	0.104	0.014	0.889	0.846	8.523	16.078	5.451	
	0.000	0.000	0.464	0.000			0.097	0.859	
11	0.240	0.117	-0.072	0.893	0.798	7.297	8.575	13.691	
	0.000	0.000	0.000	0.000			0.573	0.188	
12	0.164	0.163	-0.121	0.875	0.343	4.316	6.627	14.290	
	0.000	0.000	0.000	0.000			0.760	0.160	
13	0.067	0.059	-0.056	0.961	-0.066	6.777	5.673	41.498	
	0.000	0.000	0.000	0.000			0.842	0.000	
14	0.986	0.139	0.109	0.679	0.635	5.173	11.515	16.214	
	0.000	0.000	0.000	0.000			0.319	0.094	
15	0.147	0.090	0.000	0.905	-0.228	13.587	8.874	3.704	
	0.000	0.000	0.996	0.000			0.544	0.960	
16	0.032	0.096	0.010	0.901	0.587	8.406	10.617	10.193	
	0.000	0.000	0.382	0.000			0.388	0.424	
17	0.587	0.130	-0.064	0.815	0.415	4.703	15.804	5.052	
	0.000	0.000	0.006	0.000			0.105	0.888	
18	0.164	0.073	0.007	0.905	0.572	6.626	8.141	7.702	
	0.000	0.000	0.561	0.000			0.615	0.658	
19	0.172	0.111	-0.080	0.902	0.676	6.289	9.255	9.173	

	0.000	0.000	0.000	0.000			0.508	0.516
20	0.095	0.092	-0.065	0.915	0.522	4.568	13.779	12.693
	0.000	0.000	0.000	0.000			0.183	0.241
21	0.148	0.075	-0.103	0.951	0.515	6.268	18.071	14.607
	0.000	0.000	0.000	0.000			0.054	0.147
22	0.550	0.110	0.010	0.834	0.870	7.897	6.965	12.821
	0.000	0.000	0.624	0.000			0.729	0.234

Cuadro 6 (continuación)
Modelos de heteroscedasticidad condicional tempo-dependientes

	EGARCH							
	ω	γ	k	β	b_1	b_2	Q	Q ²
1	-0.126	0.244	0.013	0.969	0.712	5.868	10.78	8.7441
	0.000	0.000	0.284	0.000			0.375	0.364
2	-0.089	0.324	-0.046	0.928	0.682	5.833	3.4543	18.924
	0.000	0.000	0.001	0.000			0.969	0.041
3	-0.135	0.193	0.091	0.987	0.47	4.969	7.8206	8.0672
	0.000	0.000	0.000	0.000			0.646	0.622
4	-0.100	0.190	0.049	0.981	0.455	4.64	20.018	14.354
	0.000	0.000	0.000	0.000			0.290	0.157
5	-0.039	0.102	0.013	0.980	0.431	5.319	12.689	19.743
	0.000	0.000	0.195	0.000			0.242	0.032
6	-0.093	0.166	0.057	0.983	0.588	5.552	6.237	22.826
	0.000	0.000	0.000	0.000			0.795	0.011
7	-0.095	0.193	-0.013	0.975	0.433	6.295	7.629	14.897
	0.000	0.000	0.208	0.000			0.655	0.136
8	-0.070	0.304	-0.015	0.925	0.111	8.733	17.872	22.19
	0.000	0.000	0.225	0.000			0.057	0.014
9	-0.065	0.263	0.020	0.939	0.669	5.924	14.535	7.272
	0.001	0.000	0.158	0.000			0.150	0.699
10	-0.108	0.245	0.007	0.970	0.939	9.871	17.086	5.204
	0.000	0.000	0.637	0.000			0.072	0.877
11	-0.101	0.180	0.062	0.984	0.763	7.076	8.814	17.926
	0.000	0.000	0.000	0.000			0.550	0.056
12	-0.109	0.217	0.085	0.968	0.359	4.391	7.496	18.459
	0.000	0.000	0.000	0.000			0.678	0.048
13	0.101	0.162	0.095	0.902	-0.324	9.28	4.598	16.611
	0.000	0.000	0.000	0.000			0.916	0.083
14	-0.003	0.321	-0.022	0.876	0.645	5.201	10.585	18.459
	0.924	0.000	0.153	0.000			0.319	0.048
15	-0.087	0.168	0.015	0.985	-0.087	11.711	9.505	4.573
	0.000	0.000	0.024	0.000			0.485	0.918
16	-0.120	0.202	0.003	0.982	0.563	7.871	10.27	11.409
	0.000	0.000	0.715	0.000			0.417	0.327

17	-0.019	0.190	0.044	0.936	0.416	4.596	16.136	7.43
	0.335	0.000	0.009	0.000			0.096	0.684
18	-0.015	0.145	0.021	0.957	0.607	7.66	9.926	17.882
	0.013	0.000	0.028	0.000			0.447	0.057
19	-0.075	0.167	0.062	0.972	0.685	6.506	8.462	12.689
	0.000	0.000	0.000	0.000			0.584	0.242
20	-0.083	0.154	0.046	0.975	0.532	4.575	11.944	12.792
	0.000	0.000	0.001	0.000			0.289	0.236
21	-0.074	0.138	0.033	0.986	0.594	5.445	15.135	15.804
	0.000	0.000	0.001	0.000			0.127	0.105
22	-0.025	0.244	-0.006	0.931	0.858	7.939	7.211	17.137
	0.208	0.000	0.660	0.000			0.705	0.071

El segundo grupo de conclusiones tiene que ver con la comparación de los modelos bajo el criterio de Schwarz (CS) de probabilidad posterior, expresado en la ecuación 10. El criterio ofrece una medida de información sobre el balance que existe entre la bondad del ajuste y la parsimonia del modelo. De acuerdo con (10), la especificación de un modelo es más probable, o tiene la probabilidad posterior mas alta, de predecir el comportamiento de una serie si el valor de CS es más pequeño, o equivalentemente, si el logaritmo de las probabilidades posteriores del modelo competidor con relación a una normal estacionaria es negativo.²⁵ Los cuadros 7 y 8 revelan, por un lado, que el modelo Student resultó ser la especificación más probable en 13 casos mientras que los modelos de difusión con salto, EGARCH y GJR registraron sólo un valor de CS mas pequeño en 6, 4 y 2 casos respectivamente; y, por otro lado, que al comparar los modelos entre sí la t de Student se desempeñó como mejor hipótesis alternativa contra la normal estacionaria, seguido muy de cerca por el EGARCH y GJR

$$CS = -2\frac{l}{n} + t\frac{\log n}{n} \quad (10)$$

donde l es el logaritmo de la función de máxima verosimilitud

²⁵ Algunos autores como Kim y Kon (1994) utilizan la expresión $CS = l - \frac{1}{2}t\log(n)$ que es equivalente a (10) pero con signo contrario, por lo que en sus estudios toman el mayor valor positivo de CS para seleccionar la especificación del modelo mas probable.

Cuadro 7
Criterio de Schwarz

	GJR	EGARCH	Difusión	Student	Mezcla
1	4.475	4.470	1.485	4.508	11.347
2	4.841	4.842	12.819	4.836	NA
3	3.895	3.912	1.246	4.002	NA
4	5.122	5.117	27.595	5.293	NA
5	4.423	4.427	1.197	4.377	NA
6	4.791	4.784	2.038	4.837	NA
7	4.634	4.623	6.948	4.596	NA
8	4.785	4.788	5.668	4.730	13.660
9	4.846	4.841	43.585	4.818	NA
10	4.921	4.905	8.931	4.866	43.227
11	4.998	4.987	7.037	4.952	17.029
12	4.657	4.658	7.608	4.745	NA
13	4.967	4.986	8.437	4.920	NA
14	4.662	4.657	1.457	4.588	NA
15	5.038	5.013	5.973	4.963	13.503
16	3.825	3.805	NA	3.811	NA
17	4.736	4.725	1.515	4.692	NA
18	4.723	4.738	14.795	4.592	NA
19	4.685	4.685	16.139	4.684	NA
20	4.293	4.289	14.466	4.286	NA
21	4.901	4.899	19.633	4.870	NA
22	4.958	4.957	23.322	4.839	NA

Cuadro 8
Comparación entre modelos con base en el criterio de Schwarz

Modelo	EGARCH (1,1)	GJR (1,1)	Student	Difusión con salto	Mezcla generalizada
EGARCH (1,1)	...	8	16	6	0
GJR (1,1)	15	...	17	6	0
Student	6	5	...	6	0
Difusión con salto	16	16	16	...	0
Mezcla	22	22	22	22	...

La escasa diferencia existente entre los valores de CS arrojado por estas tres últimas especificaciones en el cuadro 7 impiden, sin embargo, concluir que la distribución de Student sea la única alternativa posible para llevar a cabo el pronóstico del portafolio de los activos aquí incluidos. Cambios en la especificación de los modelos EGARCH o GJR, ya sea en su media o en su varianza, pueden

mejorar su potencia descriptiva con relación a la t de Student y, por ende, ofrecer mejor base para el pronóstico del rendimiento-riesgo de los activos. Por esa razón, es más recomendable construir dos tipos de escenarios en los que se incluya, por una parte, un análisis del VeR del portafolio donde la función transformada sea la distribución de Student multivariada y, por otra parte, un análisis usando alguna especificación de los modelos tipo GARCH. La adopción de cualquiera de los escenarios dependerá de la verificación del pronóstico arrojado por ambas especificaciones, ya sea mediante la prueba de cociente de fallas o de valores extremos como las sugeridas por Hull y White (1998) o Kupiec (1995). En un estudio elaborado recientemente (véase Ramírez y Hernández 2001) se encontró, por ejemplo, que la especificación EGARCH (1,1) capturaba adecuadamente las observaciones de los valores extremos fuera de los intervalos de confianza supuestos por una normal estacionaria, cuando el modelo era usado como una función transformada.

El uso de procesos estocásticos en la optimización de rendimientos de activos con distribuciones no normales.

La exposición anterior dejó en claro que la ausencia de normalidad en la distribución de rendimientos diarios supone diversos problemas técnicos que no siempre tienen una solución directa y convincente. Ni siquiera la introducción de procesos estocásticos en el pronóstico de estos rendimientos es una garantía de solución completa al problema de no normalidad, debido a que la elección de cualquier proceso conlleva su grado de penalización. Hay, por ejemplo, modelos que son más eficientes que otros en capturar algunas distorsiones evidentes de las distribuciones empíricas, como la leptokurtosis, pero que no dan cuenta de algunas causas explicativas de las colas gordas, como la volatilidad grupal. Las virtudes de unos pueden ser defectos de otros y viceversa, por lo que no hay método perfecto ni único: su eficiencia depende del instrumento financiero que se tome de referencia o de las condiciones del mercado particular.

Es por eso que encontrar modelos estadísticos alternativos que describan el comportamiento de distribuciones empíricas cuyos parámetros no son normales y estacionarios, es ante todo un problema conceptual que va más allá de restablecer el cálculo de VeR o de hacer pronósticos más fiables. Sin una reflexión adecuada de los problemas conceptuales que están asociados a cualquier aplicación de un modelo particular no es posible entender los límites involucrados en la optimización del rendimiento de un portafolio o un activo individual. Entre estos problemas cabe mencionar la selección adecuada de los procesos estocásticos para el estudio de determinados instrumentos financieros y los criterios necesarios para llevar a cabo una optimización eficiente.

¿Cómo se aplican los procesos estocásticos en finanzas?

El problema relativo a la selección adecuada de los procesos estocásticos es un asunto ligado con la función que éstos desempeñan en el campo de las finanzas. Como se discutió en la primera parte, la aplicación de procesos estocásticos al análisis de los rendimientos de los activos se justifica cuando no es posible asociar las series de rendimientos a una o a varias distribuciones normales o cuando se sospecha de la presencia de desplazamientos cíclicos y ordenados que afectan los valores estacionarios de la media y la varianza. El fallo a favor de los modelos tipo GARCH sobre la mezcla de distribuciones en nuestro ejercicio para México es, por ejemplo, una prueba de que los procesos estocásticos pueden generar mejores pronósticos que los modelos de media-varianza si son capaces de describir más fidedignamente las series de tiempo reales. El verdadero problema consiste en determinar si los datos pasados son útiles para pronosticar el futuro de los rendimientos diarios o, dicho de otra manera, en verificar si es posible asociarle un proceso estocástico a las distribuciones de datos no normales.

La respuesta se encuentra en los mismo procesos estocásticos, pues es mediante su aplicación que es posible decidir si los rendimientos de los activos son pronosticables o no. En efecto, los rendimientos son pronosticables si se rechaza la hipótesis nula de que las series de tiempo se comportan como una caminata aleatoria o una martingala. En caso contrario, las series de rendimientos no sirven de referencia para llevar a cabo pronósticos fiables.

Las pruebas sobre las diferentes versiones de las caminatas aleatorias (RW) se reducen a rechazar o aceptar las hipótesis de que los incrementos experimentados por las variables aleatorias son independientes e idénticamente distribuidos con media cero y varianza σ^2 en una ecuación con la siguiente forma estructural:

$$P_t = \mu + P_{t-1} + \epsilon_t, \quad \text{con } \epsilon_t \sim IID(0, \sigma^2)$$

donde P_t es el cambio de precio del activo en el tiempo t ; y

μ es el cambio de precio esperado o *drift*.

En términos generales se sostiene que esta ecuación es una caminata aleatoria del tipo 1 (RW1) si se cumplen los dos supuestos sobre los incrementos (es decir que $\epsilon_t \sim IID(0, \sigma^2)$); una caminata aleatoria del tipo 2 (RW2) si los incrementos son independientes pero no idénticamente distribuidos; y finalmente una caminata del tipo 3 (RW3) si los incrementos son dependientes pero no correlacionados. Debido a las dificultades inherentes a las estimaciones no paramétricas de RW2 y al poco realismo de los supuestos de RW1 en mercados que se caracterizan por tener rendimientos altamente correlacionados, las pruebas de caminatas aleatorias se concentran básicamente en evaluar los supuestos de RW3 (véase Campbell et,al.

1997). El énfasis puesto en verificar si los rendimientos están correlacionados o si conservan un patrón de reciprocidad entre ellos, ha llevado a poner en práctica pruebas basadas en índices de autocorrelación “rescalados” (como la Q de Pierce o de Ljung-Box), de razones de varianzas o de *lead-lag*, que son igualmente aplicadas para determinar la existencia de martingalas.²⁶ La comprobación de que los rendimientos conservan un patrón de correlación específico entre ellos no sólo implica el rechazo a la hipótesis nula de RW3 sino también a la de la martingala, pues de esa manera se supone que el mejor pronóstico del precio futuro no es, como lo supone un juego justo, el del precio actual de los activos sino también el de períodos pasados.

Los resultados expuestos en los cuadros 9 y 10 rechazan las hipótesis nulas de RW3 y de martingalas para el caso de México, con lo que se confirma una vez más que la ausencia de normalidad en los rendimientos diarios es en parte explicada por la alta correlación de los rendimientos. De acuerdo con el cuadro 9 la volatilidad de los rendimientos no crece linealmente con el tiempo sino, como lo comprueban las razones de varianza (VR), con el horizonte de inversión inmediato. La explicación obedece al hecho de que los rendimientos están positivamente correlacionados así como al rezago de tiempo que toma al mercado homogeneizar los rendimientos de los activos.²⁷

Los coeficientes de autocorrelación de los rendimientos de los activos son más altos en los primeros períodos que en los posteriores y, por tanto, los índices “rescalados” de dependencia de largo plazo son menos significativos a partir de cierto período. La evidencia es, sin embargo muy irregular, pues mientras que esos índices resultaron significativos para algunos activos durante todo el período considerado, para otros apenas mostraron correlación serial para el primer período. En cualquier caso, la dependencia entre los rendimientos de los activos no es homogénea ya que, como lo muestra el cuadro 10, hay un esquema de *lead-lag* en el que la correlación entre los rendimientos actuales de los activos de menor capitalización y los rendimientos pasados de los activos de mayor capitalización es siempre mayor que la correlación entre los rendimientos actuales de los activos de mayor capitalización y los rendimientos pasados de los activos de menor capitalización. El resultado se obtiene al comparar las matrices de autocovarianza que fueron construidas para tres tipos de portafolios de diferente bursatilización. Con excepción de un periodo, todas las entradas debajo de la diagonal de las matrices resultaron de signo contrario (positivos) que los valores arriba de las diagonales, lo que indica la existencia del citado patrón (véase Campbell, et.al., 1997).

²⁶ Muy brevemente decimos que una martingala es un proceso estocástico que satisface la condición de juego justo o equivalentemente que: $E[P_{t+1} - P_t / P_t, P_{t-1}, \dots] = 0$. Para mayor información consúltese Ross (1996).

²⁷ Cuando los rendimientos están correlacionados positivamente, la varianza de la suma de los rendimientos de dos períodos individuales será mayor que la suma de la varianza de los rendimientos de un período, con lo que las varianzas crecerán más que linealmente.

Cuadro 9
 Coeficientes de autocorrelación y tasas de varianza para rendimientos de activos
 diarios

Activo	Rezagos				No. k de observaciones restadas para formar VR			
	1	2	4	8	2	4	8	
ALFA.A	0.125 (0.000)	-0.074 (0.003)	-0.023 (0.386)	-0.014 (0.990)	1.124 (105.856)	1.072 (34.797)	1.007 (4.739)	
APASCO	0.011 (0.686)	-0.024 (0.456)	-0.025 (0.240)	0.018 (0.455)	1.011 (8.320)	0.982 (-5.222)	0.952 (-13.512)	
BANACCI.O	0.199 (0.000)	-0.029 (0.010)	-0.002 (0.602)	0.002 (0.513)	1.200 (98.908)	1.268 (148.673)	1.317 (118.335)	
BIMBO.A	0.049 (0.081)	0.011 (0.828)	-0.043 (0.094)	0.011 (0.711)	1.050 (54.433)	1.067 (42.410)	0.979 (-4.195)	
CEMEX.CPO	0.101 (0.000)	-0.003 (0.799)	0.016 (0.378)	0.034 (0.172)	1.100 (84.975)	1.132 (65.244)	1.165 (58.204)	
CIFRA.V	-0.008 (0.789)	-0.001 (0.958)	0.040 (0.095)	-0.027 (0.324)	0.992 (-5.320)	0.976 (-13.262)	0.992 (-2.728)	
COMERCI.UBC	0.013 (0.640)	0.000 (0.770)	0.045 (0.121)	-0.008 (0.643)	1.013 (10.216)	1.028 (13.045)	1.125 (42.126)	
DESC.B	0.137 (0.000)	0.006 (0.970)	0.012 (0.428)	-0.051 (0.036)	1.138 (140.035)	1.188 (110.666)	1.183 (73.893)	
ELEKTRA.CPO	0.154 (0.000)	0.021 (0.715)	0.030 (0.547)	-0.059 (0.005)	1.154 (137.757)	1.269 (134.553)	1.397 (130.580)	
FEMSA.UBD	0.044 (0.105)	-0.038 (0.138)	-0.015 (0.521)	-0.014 (0.575)	1.045 (30.322)	1.011 (3.694)	0.912 (-25.685)	
GCARSO.A1	0.098 (0.000)	0.009 (0.691)	0.026 (0.236)	-0.025 (0.256)	1.097 (90.603)	1.150 (76.906)	1.169 (60.807)	
GFNORTE.O	0.224 (0.000)	0.050 (0.866)	-0.003 (0.986)	-0.036 (0.144)	1.223 (216.291)	1.382 (216.054)	1.439 (175.853)	
GMEXICO.B	0.054 (0.020)	0.003 (0.869)	-0.027 (0.334)	0.037 (0.107)	NA NA	NA NA	NA NA	
ICA	0.043 (0.130)	0.009 (0.705)	0.051 (0.069)	0.005 (0.935)	1.044 (52.800)	1.083 (54.207)	1.198 (87.774)	
SAVIA.A	0.074 (0.004)	-0.049 (0.074)	0.001 (0.941)	0.055 (0.042)	1.075 (78.409)	1.049 (30.415)	1.043 (21.946)	
SORIANA.B	0.051 (0.083)	-0.017 (0.474)	-0.016 (0.700)	-0.056 (0.089)	1.051 (61.341)	1.045 (29.583)	0.991 (0.207)	
TAMSA	0.150 (0.000)	0.005 (0.496)	0.007 (0.834)	-0.024 (0.447)	1.151 (156.459)	1.244 (137.589)	1.274 (103.586)	
TELECOM.A1	0.073 (0.003)	0.042 (0.078)	0.043 (0.082)	-0.010 (0.701)	1.073 (78.717)	1.139 (80.842)	1.220 (91.043)	
TELMEX.L	0.011 (0.571)	0.006 (0.641)	0.015 (0.484)	-0.048 (0.065)	1.011 (12.201)	0.994 (-1.689)	0.944 (-18.537)	
TELEVISA.CPO	0.075	-0.005	0.006	-0.014	1.074	1.087	1.067	

	(0.002)	(0.741)	(0.624)	(0.592)	(84.218)	(55.834)	(27.208)
VITRO.A	0.026	-0.070	-0.018	-0.007	1.026	0.974	0.918
	(0.224)	(0.011)	(0.263)	(0.632)	(198.908)	(148.673)	(118.335)
BANAMEX 30	0.157	0.002	0.031	-0.015	1.157	1.230	1.329
	(0.000)	(0.702)	(0.403)	(0.407)	(131.434)	(109.714)	(110.062)

Nota.-De las columnas dos a la cinco aparecen los coeficientes de autocorrelación con sus respectivos valores p. Las tasas de varianza aparecen en las columnas 6-8. Los estadísticos robusto-heterocedásticos (Vz) aparecen debajo de su respectiva tasa de varianza. Vz se distribuye asintóticamente como una normal estándar.

CUADRO 10
Asimetría de las matrices de cross-autocorrelación
(análisis de existencia de *lead-lag*)

$$\hat{Y}(1) - \hat{Y}'(1) = \begin{bmatrix} 0 & -0.047 & -0.150 \\ 0.047 & 0 & -0.152 \\ 0.150 & 0.152 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{Y}(2) - \hat{Y}'(2) = \begin{bmatrix} 0 & -0.000 & -0.028 \\ 0.000 & 0 & -0.021 \\ 0.028 & 0.021 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{Y}(3) - \hat{Y}'(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0.000 & -0.064 \\ 0.000 & 0 & -0.048 \\ 0.064 & 0.048 & 0 \end{bmatrix}$$

Nota.- Diferencia entre matrices de autocorrelación y sus transpuestas para el vector de rendimiento de portafolio $X_t \equiv [R_{1t} R_{2t} R_{3t}]'$ donde R_{it} es el rendimiento en el día t del i -ésimo portafolio; $i=1,2,3$ (el portafolio 1 contiene las acciones de menor bursatilidad y así sucesivamente).

Los resultados tomados en conjunto revelan, pues, que con excepción de contados casos los rendimientos son pronosticables y que un proceso estocástico adecuado para describir la dependencia entre los activos es uno que capture la mayor varianza actual de los rendimientos (o con rezago 1), como es el caso de los modelos analizados en la sección pasada. La pregunta que aún sigue abierta es si las propiedades de esos modelos son superiores a las de otras mezclas de procesos que se han ensayado con bastante éxito en mercados desarrollados. Dos de esas mezclas

son las que resultan de combinar cadenas de Markov con caminatas aleatorias o de expandir los movimientos Brownianos geométricos o fraccionales.²⁸

Las pruebas que mezclan caminatas aleatorias con cadenas de Markov tratan de determinar si la probabilidad de ocurrencia de un rendimiento bajo es mayor después de observar una secuencia de períodos de ingresos altos o una secuencia de ingresos bajos. El resultado más recurrente es que los excesos de rendimientos y los rendimientos reales anuales no siguen la tendencia de una caminata aleatoria, debido a que rachas de bajos rendimientos siguen a rachas de rendimientos altos después de dos períodos (véase McQueen y Thorley 1991). Los activos de menor capitalización tienden a exhibir más correlación serial positiva que los de mayor capitalización, mientras que los de mayor capitalización tienden a seguir una caminata aleatoria (y por tanto no siempre son pronosticables).

Los movimientos Brownianos, por su parte, han sido utilizados en el pronóstico de los rendimientos de los activos de dos maneras. La primera consiste en mezclarlos con procesos de Poisson o confrontarlos con procesos alternativos como el de reversión geométrica a la media a fin de evaluar su poder descriptivo en series afectadas por leptokurtosis. La segunda manera está más centrada en ampliar el concepto original de los movimientos Brownianos, para modelar imperfecciones de los mercados financieros (véase Rogers 1996 y Takahashi 1996).

Los resultados revelan, por un lado, que el pronóstico del monto de la inversión acumulada en ciertos activos es igualmente eficaz con Brownianos geométricos que con movimientos geométricos de reversión a la media (Metcalf y Hassett 1995) y, por otro lado, que los movimientos brownianos geométricos puros no son adecuados para estudiar los problemas de fricciones, información imperfecta y dependencia de largo plazo entre los activos que existen en el mercado. Esta aparente situación ambigua de los movimientos brownianos no es más que un llamado de atención a su uso indiscriminado en los análisis de rendimientos, ya que mientras resultan muy valiosos para explicar series afectadas por cambios en su media estacionaria, son de poca utilidad teórica para explicar la existencia de arbitraje. De aquí que, como lo señala Takahashi (1996), sea necesario expandir el concepto de Browniano geométrico mediante la inclusión de conceptos como la ecuación de Langevin o la distribución de Kernel o simplemente adoptando Brownianos fraccionales.

²⁸ Las cadenas de Markov han mostrado ser muy útiles para estimar VeR en carteras de crédito al igual que los movimientos brownianos en valuación de opciones. Para una detallada aplicación de estos procesos estocásticos en la estimación del VeR ante diferentes tipos de riesgos para el caso de México véase Sánchez Cerón (2001).

Los criterios para llevar a cabo una optimización estocástica de los rendimientos

Una vez seleccionado el proceso estocástico adecuado para llevar a cabo el pronóstico del valor promedio y la varianza de los rendimientos y, en consecuencia, de la estimación del VeR bajo las nuevas condiciones, queda pendiente un problema de gran envergadura: ¿qué criterios deben adoptarse para optimizar el rendimiento de un portafolio en ambientes estocásticos? Evidentemente, la pregunta no es nada sencilla y su respuesta va más allá de los límites de un trabajo de esta naturaleza. Aquí nos concentraremos únicamente en destacar algunos aspectos teóricos relacionados con la optimización estocástica de los rendimientos sin considerar en absoluto las implicaciones prácticas del problema. La importancia de este último punto merece un estudio por separado.

Las dificultades inherentes a cualquier proceso de optimización de portafolios las podemos clasificar en generales y particulares. Las generales, como su nombre lo indica, son comunes a cualquier problema de maximización de ganancias esperadas de un portafolio y tienen que ver con problemas tan elementales como ¿qué optimizar? (definición del funcional objetivo), ¿qué restricciones utilizar? (definición de las ecuaciones de transición) ¿cómo plantear analíticamente el sistema de optimización? (¿mediante sistemas de “open-loop” o con sistemas de “feedback”?) y ¿qué técnicas son adecuadas para su solución? (¿uso de programación dinámica estocástica? o ¿programación entera o por red? ¿con restricciones lineales o no lineales?). Las particulares se refieren a las necesidades requeridas por cada uno de los dos grandes tipos de modelos existentes en finanzas: modelos de administración de riesgos y modelos de ingeniería financiera.

Aparentemente la respuesta a la pregunta qué optimizar es muy sencilla, y hasta cierto punto tautológica, pues lo que se espera es maximizar la ganancia esperada del portafolio. Sin embargo esta aparente sencillez es engañosa. Veamos por qué. La teoría moderna de portafolio nos dice que los riesgos sistemáticos son compensados de tal manera que los rendimientos instantáneos esperados sobre todos los activos son iguales en equilibrio y que todos los activos con los mismos atributos tienen el mismo rendimiento esperado a fin de eliminar el arbitraje. Al eliminar el riesgo sistemático, lo que queda es una posición libre de riesgo más un riesgo no sistemático. Y como la tasa esperada de rendimiento sobre la posición debe ser igual a la tasa libre de riesgo para que no exista arbitraje, lo que queda sin explicar es precisamente ese riesgo no sistemático. Así que si consideramos que mayores rendimientos esperados implican mayor exposición al riesgo entonces lo que debemos optimizar es un portafolio que tiene la propiedad escondida de maximizar un riesgo no controlado.

A este problema conceptual se le agrega otro relacionado con la selección del universo de activos seleccionados. Para ilustrar este punto supongamos que nuestro objetivo sea maximizar el rendimiento neto de un portafolio sujeto a las restricciones

de valor presente y duración, en un modelo de inmunización. Si incluimos bonos corporativos de baja calidad, el modelo de inmunización seleccionara esos bonos en virtud de que ellos ofrecen un mayor rendimiento que los bonos libres de riesgo. De esta manera se espera obtener una ganancia especulando en riesgo crédito y riesgo sectorial sin una medida de la exposición a esos dos factores de riesgo. Si ahora restringiéramos nuestra atención a los bonos que no tienen riesgo de liquidez, tendríamos que nuestra optimización resultaría en un portafolio de dos bonos, uno muy largo y uno muy corto, para cumplir con la restricción de duración (y mantener el portafolio con tasas de interés libre de riesgo). Sin embargo, ahora el portafolio está expuesto al riesgo derivado de la forma de la curva (*shape risk*) y, como consecuencia, el portafolio deberá ser frecuentemente rebalanceado para satisfacer la restricción de duración, incurriendo en altos costos de transacción y riesgos de liquidez que no estaban contemplados en el modelo original de optimización. Así que para alcanzar mayor estabilidad y reducir el *shape risk*, sea necesario imponer condiciones de segundo orden al modelo. El resultado redundará en un flujo de efectivo menos disperso y en una reducción del riesgo, pero sin eliminar la exposición al riesgo de volatilidad. Esto obligará a seguir agregando restricciones de mayor orden con la consecuencia de que, en el límite, tendríamos un modelo de flujo de efectivo y no uno de inmunización, como inicialmente lo suponíamos (Zenios, 1998).

Por todo esto es importante no utilizar los modelos de optimización en forma indiscriminada o mecánicamente. Es necesario indicar con precisión que riesgos incorpora el modelo en el proceso de optimización y en esto el papel del administrador de portafolios es crucial. El administrador deberá ser capaz de formular objetivos claros, establecer las restricciones económicas e institucionales, seleccionar un adecuado universo de activos y analizar los riesgos y rendimientos: "La optimización hará mejor a un buen administrador de portafolio y peor a uno malo" (Zenios 1998,13).

En formatos de optimización dinámica estocástica estos problemas son igualmente válidos. La definición de un funcional es crucial para asegurar buenos resultados, ya sea si se seleccionan funciones de utilidades hiperbólicas con diferentes parámetros de aversión al riesgo o se utilicen portafolios compuestos. La inclusión de activos que estén expuestos a diferentes clases de riesgos no sistemáticos hará el problema de optimización innecesariamente complejo e intratable. El conocimiento de los hechos estilizados, arriba señalados, sobre el comportamiento de los rendimientos de ciertos activos es crucial para formular el problema. La razón es que la mezcla de activos cuyos rendimientos obedecen a diferentes procesos estocásticos puede dejar sin especificar la ecuación de transición y, con ello, la ecuación de recursividad de Bellman (que es esencial para encontrar el portafolio óptimo).

La literatura sobre optimización estocástica aplicada a finanzas ha dado respuesta satisfactoria a problemas de maximización de utilidad en modelos de difusión donde

se incluye un activo riesgoso que sigue un movimiento Browniano geométrico y un activo sin riesgo (Merton, 1971); un activo que sigue un proceso de Wiener y otro que se comporta como un proceso de Poisson (Merton 1971); y tres activos con diferentes características (Fischer, 1975). También se han ensayado problemas de optimización con procesos de Markov con diferentes alternativas de decisión, para los que se han construido *matrices generadoras* de gran dimensión. Para los tres primeros modelos se ha encontrado, no sin grandes problemas, formas cerradas para la solución de la ecuación diferencial parcial de segundo orden no lineal de Bellman.²⁹ Pero esto no significa que esa sea la regla. La solución analítica de problemas que incluyan más activos con mezcla de procesos no conocidos hasta ahora o que presenten valores esperados no finitos, violaría el supuesto requerido por la integral de *Ito* (que es una martingala, con esperanza finita) y por tanto no habría solución para la ecuación diferencial estocástica.³⁰

Los problemas relativos a los modelos de administración de riesgo se refieren a la necesidad de considerar tanto los atributos genéricos como los específicos de los activos, en un mundo donde los primeros atributos no son comerciados en el mercado. Y es que lo que se comercia son activos que, de suyo, son paquetes de atributos. De aquí que la administración de riesgo esté envuelta en el problema de controlar simultáneamente la interacción de muchos activos y sus atributos con el fin de conformar una determinada exposición del portafolio. A esto hay que agregar diversos requerimientos institucionales en la construcción del portafolio, que actúan como restricciones en el problema de optimización. En el caso de los modelos de ingeniería financiera los problemas tienen que ver con la creación de productos que en buena medida son nuevos paquetes de viejos atributos. Estos paquetes tienen que mejorar las condiciones de riesgo de los anteriores productos y ser rápidamente agregados al mercado. En ambos tipos de modelos la aplicación de las técnicas de optimización estocásticas es incipiente y basada en modelos muy agregados (Zenios, 1998). Representan, por decirlo brevemente, la zona inexplorada de la modelística en finanzas.

²⁹ En particular para el segundo ejemplo fue necesario utilizar el lema generalizado de Ito y la forma expandida del Hamiltoniano. La forma funcional de cada control fue encontrada bajo ciertos supuestos restrictivos, debido a que no siempre es fácil proponer candidatos de solución exactos para la ecuación de Bellman.

³⁰ En problemas estocásticos discretos que son dinámicos las restricciones son mayores, pues el formato de programación dinámica requiere que los activos que se incluyan presenten una cualidad esencial: que tanto su funcional como su ecuación dinámica (que es una ecuación en diferencia estocástica) sean aditivos. De otra manera no se podría encontrar la política de control para los múltiples períodos del horizonte de inversión. Esto traería como consecuencia que el sistema de feedback requerido para ajustar los controles a las variables de estado (y de esa manera calcular los jacobianos o funciones de valor óptimos) en cada etapa sea inaplicable.

Conclusiones

El documento hace énfasis en el hecho, muchas veces soslayado por la práctica financiera, de que la evaluación del supuesto de normalidad estacionaria es esencial para formular un análisis adecuado del riesgo-rendimiento de un activo o de un portafolio. El reconocimiento de la recurrente violación de ese supuesto en las distribuciones empíricas de los instrumentos financieros por algunos autores ha dado lugar a un buen número de técnicas orientadas a la detección y corrección de series de datos afectados por leptokurtosis, sesgo y volatilidad grupal. En la primera parte del texto se discute la manera en que se deben alternar las técnicas de detección de sesgos y colas gordas, según la periodicidad de los rendimientos, así como su eventual transformación con potencias del tipo Box-Cox. En la segunda parte, se ensayan y comparan algunos modelos recomendados por las compañías consultoras de riesgo más prestigiosas del mundo con el fin de evaluar su poder correctivo.

Los resultados obtenidos en ambas partes confirman que los rendimientos diarios no son normales estacionarios, no así los mensuales, y que, por tanto, el análisis de VeR del paquete Banamex-30 requiere de modelos alternativos para el cálculo y pronóstico de su media y varianza. Los modelos más descriptivos de las series de rendimientos no normales resultaron, de acuerdo con el criterio de Schwarz, los modelos de Student, EGARCH, en buena medida parecido al DGE recomendado por *RiskMetrics*TM y el llamado modelo GJR. La conclusión sugerida en el texto es que la adopción de cualquiera de las tres especificaciones requiere de pruebas de verificación de sus estimaciones sobre el VeR antes de optar por alguno de ellos, ya que aun cuando la distribución de Student resultó ser el modelo con más alta probabilidad de explicar las series no normales, los otros dos modelos podrían mejorar su capacidad descriptiva al combinarlos con otros modelos de media y varianza. La selección de determinado modelo debe hacerse, pues, sobre bases conceptuales.

La contribución del trabajo no se reduce, sin embargo, a mostrar la combinación de técnicas para evaluar normalidad multivariada y su eventual corrección por modelos alternativos sino, fundamentalmente, a llamar la atención sobre la infinidad de problemas conceptuales que significa decidir si el pronóstico se puede basar o no en la serie de datos pasados, seleccionar tal o cual proceso estadístico no normal o determinar qué criterios son adecuados para optimizar el rendimiento de un portafolio en ambientes estocásticos. Los argumentos discutidos en la tercera parte ofrecen elementos para una discusión más avanzada sobre estos delicados aspectos, ya que insisten en que no hay reglas fijas para la selección de determinados modelos estocásticos ni algoritmos únicos para corregir la no normalidad de las distribuciones empíricas. La gama de problemas que supone tratar con tasas de interés, tipos de cambio o bonos de distinta calidad es muy distinta a la de los rendimientos de acciones, por lo que es importante dejar en claro que cada instrumento financiero requiere su evaluación particular. De cualquier manera el ejercicio aquí desarrollado

es importante porque traza los lineamientos generales de una evaluación pormenorizada del supuesto de normalidad y de sus implicaciones para el análisis del VeR.

Bibliografía

- Affleck-Graves J. and McDonald B. (1989), "Nonnormalities and Test of Asset Pricing Theories", **The Journal of Finance**, 44, pp. 889-908.
- Ball C. A. and Torous, W. N. (1985), "On Jumps in Common Stock Prices and Their Impact on Call Option Pricing", **The Journal of Finance** 40:155-73.
- Blattberg R. And Gonedes N. (1974), "A Comparison of the Stable and Student Distributions as Statistical Models for Stock Prices", **Journal of Business** 47:244-80.
- Campbell, J. Y., Lo, A. W. and MacKinlay A. C. (1997), **The Econometrics of Financial Markets**, Princeton University Press.
- Duffie, D. and Pan, J. (1997), "An Overview of Value at Risk", **Journal of Derivatives**, Vol 4, No. 3, pp. 7-49.
- Fama, E. (1965), "Portfolio Analysis in a Stable Paretian Market", **Management Science**, 11, pp. 404-419.
- _____(1965), "The Behavior of Stock Market Prices", **Journal of Business**, 38:34-105.
- Fischer, S. (1975), "The Demand for Index Bonds", **Journal of Political Economy**, 83, 509-534.
- Hull, J and White, A. (1998). "Value at Risk When Daily Changes in Market Variables are not Normally Distributed", **The Journal of Derivatives**, Vol 5. No. 3, pp. 9-19.
- Johnson, R. A. and Wichern, D. W. (1992), **Applied multivariate statistical analysis**, Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall.
- Kaskey, G., Kolman B., Krishnaiah, P. R. and Steinberg, L. (1980), "Transformations to Normality", **Handbook of statistics**, vol 1, *Analysis of variance*. Amsterdam: North-Holland.
- Kim, D. and Kon, S. (1994), "Alternative Models for the Conditional Heteroscedasticity of Stock Returns", **Journal of Business** 67:563-98.
- Kon, S. J. (1984), "Models of Stock Returns-A comparison", **Journal of Finance** 39:147-165.
- Kupiec, P. H. (1995), "Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models" **The Journal of Derivatives**, 3, Winter, pp. 73-84.
- Li, D. X. (1999), **Value at Risk Based on the Volatility, Skewness and Kurtosis**, Riskmetrics Group, New York.
- Lo, A. W. (1997), "Fat Tails, Long Memory, and the Stock Market Since the 1960's", **Economic Notes by Banca Monte dei Paschi**, vol 26 (2), pp. 213-246.
- Lo, A. W. and Mackinlay C. (1990), "Data Snooping Biases in Tests of Financial Asset Pricing Models", **Review of Financial Studies**, 3, pp. 431-468.
- _____(1990), "When are Contrarian Profits Due to Stock Market Overreaction?", **Review of Financial Studies**, 3, pp. 175-208.
- Mandelbrot, B. (1963), "New Methods in Statistical Economics", **Journal of Political Economy**, 71, pp. 421-440.

- _____(1963), "The Variation of Certain Speculative Prices", **Journal of Business**, 36 pp.394-419.
- Mardia, K. V. (1980), "Test of Univariate and Multivariate Normality", **Handbook of statistics**, Vol 1, *Analysis of variance*, Amsterdam: North-Holland.
- McQueen, G. and Thorley, S. (1991), "Are Stock Returns Predictable? A Test Using Markov Chains", **The Journal of Finance**, vol 46 (1), March, pp. 239-263.
- Merton, R. (1971), "Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model", **Journal of Economic Theory**, 3, December.
- Metcalf, G. E. and Hassett, K. A. (1995), "Investment Under Alternative Return Assumptions Comparing Random Walks and Mean Reversion", **Journal of Economic Dynamics and Control**, 19 pp. 1471-1488.
- Ramírez, J.C y Hernández H. (2001), **El Cálculo de Valor en Riesgo en Ausencia de Normalidad**, (mimeo).
- Richardson, M. and Smith, T. (1993), "A Test for Multivariate Normality in Stock Returns", **Journal of Business**, 66:295-321.
- RiskMetrics™ (1995), **Technical Document**, J. P. Morgan.
- _____TM (1996), **Technical Document**, J. P. Morgan/Reuters.
- Rogers, L. C. G. (1996), "Arbitrage with Fractional Brownian Motion", **Mathematical Finance**, vol 7 (1), January, pp. 95-105.
- Ross, M. S. (1996), **Stochastic processes**, John Wiley & Sons. Inc.
- Sánchez Cerón (2001); **Valor en Riesgo y Otras Aproximaciones**, Valuación, análisis y riesgo A.C. México.
- Takahashi, M. (1996), "Non-ideal Brownian Motion, Generalized Langevin Equation and its Application to the Security Market", **Financial Engineering and the Japanese Markets**, 3: 87-119 Kluwer Academic Publishers, Netherlands.
- Venkataraman, S. (1997), "Value at Risk for a Mixture of Normals Distributions: The Use of Quasi-Bayesian Estimation Techniques", **Economic Perspectives**, Federal Reserve Bank of Chicago, Marzo/abril 2-13.
- Zangari, P. (1996), "Test of Conditional Normality", **RiskMetrics™ -Technical Document**, J. P. Morgan/Reuters.
- Zenios S. A. (1998), **Financial Optimization**, Cambridge University Press.