

Las colecciones de Documentos de Trabajo del CIDE representan un medio para difundir los avances de la labor de investigación, y para permitir que los autores reciban comentarios antes de su publicación definitiva. Se agradecerá que los comentarios se hagan llegar directamente al (los) autor(es). ❖ D.R. © 2002, Centro de Investigación y Docencia Económicas, A. C., carretera México - Toluca 3655 (km.16.5) Lomas de Santa Fe, 01210 México, D. F., tel. 727-9800, fax: 292-1304 y 570-4277. ❖ Producción a cargo del (los) autor(es), por lo que tanto el contenido como el estilo y la redacción son responsabilidad exclusiva suya.  
05-marzo 2002.



**NÚMERO 227**

---

**José Carlos Ramírez y Rogelio Sandoval**

**PATRONES NO LINEALES EN LOS RENDIMIENTOS DE LAS  
ACCIONES DE LA BMV: UNA PRUEBA BASADA EN CADENAS DE  
MARKOV DE SEGUNDO ORDEN**

## ***Resumen***

En este trabajo se aplica la metodología desarrollada por McQueen y Thorley (1991) para caminata aleatoria a títulos de capital negociados en la Bolsa Mexicana de Valores. Se examinan los rendimientos diarios de un portafolio compuesto por acciones de alta bursatilidad mediante una cadena de Markov de segundo orden que evita el supuesto de normalidad. Se presentan y discuten los resultados del análisis empírico y las pruebas sobre las probabilidades de transición. Asimismo se calculan las probabilidades estacionarias del proceso y se investiga si la cadena de Markov es ergódica y por lo tanto estacionaria (en covarianza). Finalmente se desarrollan pronósticos basados en las estimaciones obtenidas.

## ***Abstract***

In this paper, the procedure developed by McQueen and Thorley (1991) to test for a random walk is applied to securities traded in the Mexican Stock Exchange. The daily returns of a portfolio made up of highly traded securities are examined by means of a second-order Markov chain avoiding the normality assumption. The results of the estimations and the tests on the transition probabilities are presented and discussed. Also, the stationary probabilities are computed and the ergodicity of the chain is analysed in order to know if the chain is (covariance) stationary. Finally, forecasts based on the estimations are provided.

## 1. Introducción

La formulación estándar de un pronóstico bajo el supuesto de *eficiencia absoluta* de mercados eficientes, es que las series de los rendimientos de las acciones siguen el comportamiento descrito por una caminata aleatoria sin tendencia, lo cual equivale a decir que no hay componentes pronosticables en las series. Una forma de verificar esta propiedad es aplicando pruebas estadísticas que revelen el grado de autocorrelación entre los rendimientos, como las presentadas por Fama y French (1988) y Lo y Mackinlay (1988) en dos de los clásicos trabajos sobre el tema. Las pruebas estadísticas establecen que en caso de que los índices rezagados de autocorrelación no difieran significativamente de la hipótesis nula de la caminata aleatoria, en la que se supone que los incrementos de los rendimientos son dependientes pero no correlacionados, entonces uno puede confiar en que ningún buen pronóstico puede desarrollarse sobre la base de los datos históricos. El grueso de las investigaciones hechas para los países desarrollados reporta la existencia de autocorrelación negativa en las series de los rendimientos anuales y positiva en la de los rendimientos semanales, con lo cual concluyen que, en términos generales, existen componentes transitorios y predecibles en las series de esos datos (véase Campbell, *et al* 1997). El rechazo sistemático a la hipótesis de la caminata aleatoria en estas investigaciones no implica, sin embargo, la violación al supuesto de *eficiencia relativa* de mercados eficientes, puesto que es posible esperar que algunos inversionistas que operan en estos mercados desarrollen sus pronósticos sobre la base de una tecnología de información superior al promedio que les permita realizar sus operaciones con arbitraje.<sup>1</sup>

Algunos autores como McQueen y Thorley (1991) critican las pruebas estadísticas que utilizan estos trabajos porque no toman en cuenta las burbujas especulativas, el efecto de las noticias sobre el precio de las acciones y la variación temporal de los rendimientos, tan presentes en cualquier mercado financiero. Estos elementos, a decir de los autores, producen patrones no lineales en el comportamiento de los rendimientos que no son captados por las pruebas tradicionales que suponen linealidad. Para salvar este obstáculo, sugieren la construcción de pruebas alternativas en las que la hipótesis de la caminata aleatoria esté contenida en la estructura de las probabilidades de transición de una cadena de Markov ; de tal suerte que si la hipótesis no es rechazada entonces las probabilidades no tendrían estructura y los rendimientos presentes de las acciones serían igualmente probables sin importar la secuencia de rendimientos anteriores.

El objetivo de este trabajo es aplicar, con algunas modificaciones, la prueba desarrollada por McQueen y Thorley (1991) a títulos de capital comerciados en la Bolsa Mexicana de Valores. Para tal efecto se utilizan los rendimientos diarios de un portafolio compuesto por acciones de alta bursatilidad a fin de evitar el problema de correlación espuria causada por el comercio "infrecuente" de títulos. La elaboración de este ejercicio se justifica no sólo por

---

<sup>1</sup> Debido a la confusión que puede introducir la idea de pronóstico en mercados eficientes, Lo (1997) recomienda utilizar el supuesto de eficiencia relativa en lugar del de eficiencia absoluta ya que éste último acepta la existencia de arbitraje sólo en caso de que haya *ineficiencias* de mercado y no por efecto de ventajas competitivas permanentes (como tener, por ejemplo, superior capacidad de innovación financiera) como lo hace, en efecto, la primera versión.

los innumerables problemas técnicos asociados con los modelos lineales heteroscedásticos tan comúnmente usados en finanzas, y que en el caso mexicano arrojan resultados poco robustos (para este punto véase Ramírez 2001), sino porque los métodos estocásticos no lineales ofrecen una solución alternativa más convincente a la falta de normalidad de los rendimientos diarios de las acciones (véase Venegas 2001 y Lorenzo-Váldez 2002). En este contexto, la conclusión principal del documento, que consiste en el rechazo a la hipótesis de la caminata aleatoria para esos títulos, sugiere la existencia de un patrón de pronóstico de las acciones mexicanas que no necesariamente se ajusta a la práctica habitual de corrección del sesgo y exceso de curtosis de las series y que, por tanto, evita los problemas de especificación, ajuste y parsimonia de los modelos heteroscedásticos.

El documento está organizado de la siguiente manera. En la segunda sección se expone el modelo basado en Neftci (1984), Falk (1986) y McQueen y Thorley (1991), que asocia a los rendimientos de las acciones una cadena de Markov de segundo orden. En la tercera se presentan los resultados de la estimación y las pruebas sobre las probabilidades de transición. En la cuarta sección se calculan las probabilidades de equilibrio de la cadena y se investiga si ésta es ergódica y, por lo tanto, estacionaria. En la quinta sección se elaboran los pronósticos. Y en la última se hace hincapié en las principales conclusiones y posibles extensiones del trabajo.

## 2. El Modelo

El modelo expuesto a continuación tiene su origen en los trabajos sobre ciclos económicos desarrollados por Neftci (1984) y Falk (1986). En estos trabajos, los autores evalúan la asimetría de los ciclos económicos bajo la hipótesis de que si las series son simétricas a lo largo del ciclo, las probabilidades de transición entre los estados de la cadena de Markov asociada deben ser iguales. McQueen y Thorley (1991) extienden este razonamiento para probar la existencia de una caminata aleatoria en las series de rendimientos de las acciones cotizadas y negociadas en la Bolsa de Valores de Nueva York. De acuerdo con la nueva idea, McQueen y Thorley argumentan que si los rendimientos siguen una caminata aleatoria entonces las probabilidades de transición de la cadena deben ser también iguales. En caso contrario, los rendimientos presentes pueden ser pronosticados con base en la probabilidad de los rendimientos bajos o altos registrados en periodos anteriores más no en los rendimientos pasados en sí. Esto evita tratar con todos los problemas asociados con la falta de normalidad multivariada habida cuenta que, como se ha reportado extensivamente en la literatura (véase Ramírez 2001 y Venegas-Martínez, 2001 para el caso de México), las series de rendimientos de las acciones presentan sesgos y excesos de curtosis que hacen insostenible ese supuesto. Con una cadena de Markov, las series de los rendimientos no requieren seguir una distribución normal siempre y cuando la cadena asociada sea estacionaria.

La estructura de un modelo de este tipo requiere, primero, ordenar la serie de rendimientos de acuerdo con una secuencia  $I_t$  definida de la siguiente forma:

$$I_t = \begin{cases} 1 & \text{si } r_t > R \\ 0 & \text{si } r_t < R \end{cases}$$

donde  $P_t$  es el precio del activo en el tiempo  $t$ ,  $r_t = \ln(P_t/P_{t-m})$  es su rendimiento ( $m=1$  para rendimientos diarios,  $m=5$  para semanales, etc) y  $R$  es una medida de la esperanza matemática. Los rendimientos aparecen así divididos por la secuencia en rendimientos altos y bajos con respecto a  $R$ . Ahora bien, si consideramos a  $S_T = \{i_1, i_2, \dots, i_T\}$  como una realización de  $\{I_t\}$ , podemos definir a la función de verosimilitud de la cadena de Markov de segundo orden<sup>2</sup> como:

$$L(S_T) = P(I_2 = i_2, I_1 = i_1) \prod_{s=0}^{T-3} P(I_{T-s} = i_{T-s} | I_{T-s-2} = i_{T-s-2}, I_{T-s-1} = i_{T-s-1})$$

la cual, una vez incorporadas las probabilidades de transición y las del estado inicial,

$$P(I_k = 0 | I_{k-2} = i, I_{k-1} = j) = \lambda_{ij}, \quad i, j = 0, 1$$

$$P(I_2 = i_2, I_1 = i_1) = \pi_0$$

la podemos reexpresar de la siguiente manera

$$L(S_T, \Lambda, \pi_0) = \pi_0 \prod_{i,j=0}^1 \lambda_{ij}^{N_{ij}} (1 - \lambda_{ij})^{M_{ij}}, \quad i, j = 0, 1$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{00} & \lambda_{01} & \lambda_{10} & \lambda_{11} \end{bmatrix}'$$

donde  $N_{ij}$  representa el número de secuencias de *ceros* y *unos* tales que  $(I_t=0/I_{t-2}=i, I_{t-1}=j)$ ,  $i, j=0, 1$  y  $t=3, 4 \dots T$ , y  $M_{ij}$  el número de secuencias con el patrón  $(I_t=1/I_{t-2}=i, I_{t-1}=j)$ ,  $i, j=0, 1$  y  $t=3, 4 \dots T$ . Finalmente, la forma logarítmica (o función de log-verosimilitud) de la anterior ecuación es:

$$\ln \{L(S_T, \Lambda, \pi_0)\} = \ln(\pi_0) + \sum_{i,j=0}^1 \{N_{ij} \ln(\lambda_{ij}) + M_{ij} \ln(1 - \lambda_{ij})\}$$

Como se puede observar, la función de log-verosimilitud depende de las probabilidades de transición y de la probabilidad del estado inicial. Esto puede representar un problema ya que tomar en cuenta el estado inicial implica utilizar métodos numéricos engorrosos para obtener los estimadores máximo verosímiles. Por esa razón asumiremos que el número de observaciones es grande, como en efecto es el caso en este trabajo, para obviar el cálculo de la probabilidad del estado inicial<sup>3</sup> en la estimación. De esta manera, al resolver las condiciones de primer orden del problema de maximización de  $\ln(L)$ , ignorando  $\pi_0$ , se obtienen los siguientes estimadores:

<sup>2</sup> En la siguiente sección se justificará la elección del orden del proceso de Markov con fundamento en el criterio de información de Schwarz y en evidencia experimental.

<sup>3</sup> Neftei (1984) demuestra que  $\pi_0$  se puede expresar como una función de los  $\lambda_{ij}$ 's, y la estimación de las probabilidades de transición necesita de métodos iterativos.

$$\lambda_{ij} = \frac{N_{ij}}{N_{ij} + M_{ij}}, \quad i, j = 0, 1$$

Las matrices de ocurrencias y de probabilidades de transición de la cadena de Markov de segundo orden resultantes de estos estimadores se resumen en el Cuadro 1<sup>4</sup>.

**Cuadro 1. Ocurrencias y probabilidades de transición.**

Estados anteriores	Ocurrencias		Probabilidades		
	Estado actual		Estado Actual		
	0	1	0	1	
0	0	$N_{00}$	$M_{00}$	$\lambda_{00}$	$1 - \lambda_{00}$
0	1	$N_{01}$	$M_{01}$	$\lambda_{01}$	$1 - \lambda_{01}$
1	0	$N_{10}$	$M_{10}$	$\lambda_{10}$	$1 - \lambda_{10}$
1	1	$N_{11}$	$M_{11}$	$\lambda_{11}$	$1 - \lambda_{11}$

La prueba de la hipótesis de la caminata aleatoria se reduce en este contexto a hacer un contraste de igualdad entre todas las probabilidades de transición o a comparar las probabilidades  $\lambda_{00}$  y  $\lambda_{11}$ , como una opción sugerida por la posible presencia de burbujas racionales. Los estadísticos comúnmente utilizados para tal efecto son la de razón de verosimilitudes y la prueba de Wald, que al igual que el multiplicador de Lagrange se distribuye asintóticamente como una  $\chi^2$  con un número de grados de libertad igual a las  $k$  restricciones. El estadístico de razón de verosimilitudes se define como sigue:

$$RV = 2(\ln L(\hat{\Lambda}) - \ln L(\tilde{\Lambda})) \approx \chi_k^2$$

donde  $L(\hat{\Lambda})$  es la función de verosimilitud evaluada en los estimadores irrestrictos y  $L(\tilde{\Lambda})$  en la restricción. La región de confianza de la hipótesis  $\lambda_{00} = \tilde{\lambda}_{00}$ ,  $\lambda_{11} = \tilde{\lambda}_{11}$  se puede graficar como el contorno de una  $\chi^2$  con dos grados de libertad para un nivel de significación dado de acuerdo con la relación:

$$2(\ln L(\hat{\Lambda}) - \ln L(\tilde{\Lambda})) = \chi_2^2(1 - \alpha)$$

Asimismo la prueba de Wald para la hipótesis  $H_0: \lambda_{00} = \lambda_{11}$  se define como sigue:

<sup>4</sup> Mas adelante se demostrará como este proceso de Markov de segundo orden se puede representar con una matriz de transición de un proceso de primer orden, donde los diferentes estados vienen dados por las realizaciones del proceso de segundo orden.

$$PW = \frac{(\hat{\lambda}_{00} - \hat{\lambda}_{11})^2}{\sigma^2(\hat{\lambda}_{00}) + \sigma^2(\hat{\lambda}_{11})} \approx \chi_1^2$$

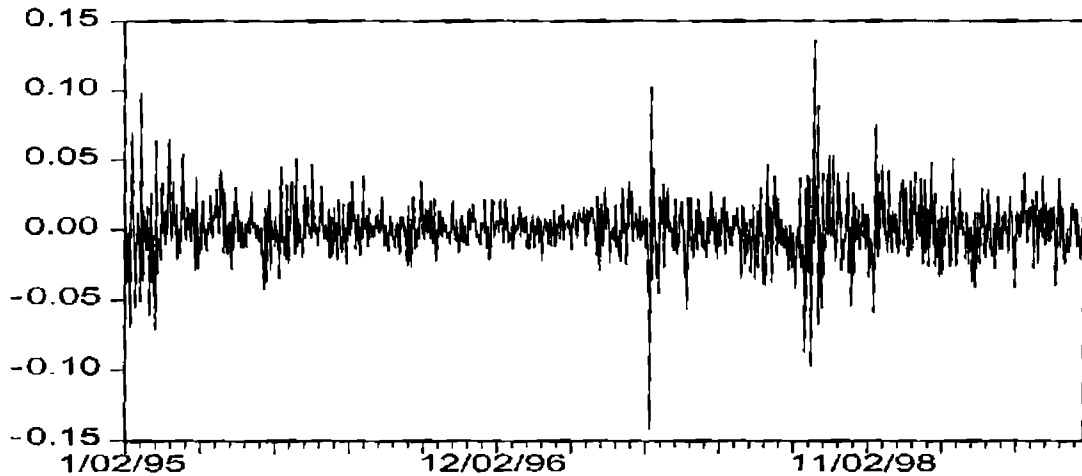
$$\text{donde } \sigma^2(\lambda_{ij}) = \frac{\lambda_{ij}(1 - \lambda_{ij})}{N_{ij} + M_{ij}}$$

### 3. ESTIMACIÓN Y PRUEBAS

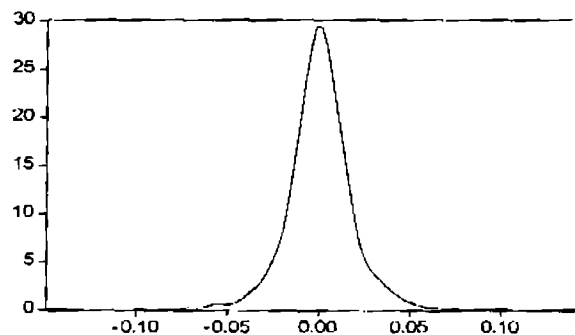
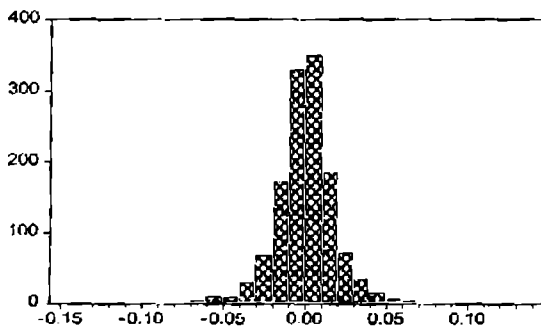
Para llevar a cabo la estimación del modelo se utilizan los rendimientos de 21 acciones de alta bursatilidad cotizadas y negociadas en la Bolsa Mexicana de Valores. Los rendimientos diarios (días hábiles) se calculan como  $r_t = \ln(P_t/P_{t-1})$  siguiendo la costumbre en la literatura. El periodo muestral comprende del 03/1/1994 al 24/2/2000. La serie analizada es el rendimiento nominal de un portafolio con pesos iguales para los 21 activos elegidos. El cuadro 2 detalla los activos, su volumen diario promedio y su tasa de comercio, calculada como el porcentaje de días en la muestra que registraron actividad.

**Cuadro 2. Activos de la cartera.**

Activo	Volumen Promedio	Actividad (%)
ALFA.A	1047149	99,55
APASCO	435828	99,87
BANACCI.O	2162045	99,55
BIMBO.A	340843	94,55
CEMEX.CPO	1667267	99,87
CIFRA.V	2754756	99,87
COMERCI.UBC	1315604	99,42
DESC.B	557136	98,44
ELEKTRA.CPO	832660	95,14
FEMSA.UBD	1646087	99,94
GCARSO.A1	1524607	100,00
GFNORTE.O	446300	86,38
GMEXICO.B	690932	96,99
ICA	693675	99,81
SAVIA.A	671616	99,61
SORIANA.B	485192	94,75
TAMSA	112822	87,61
TELECOM.A1	514651	58,30
TELMEX.L	15567421	99,94
TLEVISA.CPO	225522	99,68
VITRO.A	721581	99,74

**Gráfica 1. Rendimientos de la cartera.**

Los rendimientos de la cartera a lo largo del periodo muestral se presentan en la Gráfica 1. Como se aprecia, la serie fluctúa consistentemente alrededor de cero, aunque es posible apreciar que su varianza no es constante a lo largo del tiempo. Las Gráficas 2 y 3 muestran las propiedades de la distribución de los rendimientos de la cartera, y el Cuadro 3 reporta sus estadísticos descriptivos. La primera gráfica presenta el histograma de la serie, y como era de esperarse, se encuentra centrada en cero, con un ligero sesgo positivo y una curtosis con valor de 10.42170 (lo cual es indicativo de su exceso con respecto a una normal estándar). La Gráfica 4 nos muestra la estimación de kernel de Epanechnikov de la densidad de la serie, usando un ancho de banda de Silverman con valor  $h=0,0066$ . De nuevo, resalta el exceso de curtosis de los rendimientos, que es confirmado por la prueba de Jarque-Bera, que rechaza enfáticamente la normalidad de los datos. Ramírez (2001), al analizar la distribución de las series individuales de rendimientos de los activos de esta cartera, concluye que no tienen una distribución normal multivariada. Los resultados sugieren que una prueba que supone de inicio normalidad estaría sesgada, por lo que la aplicación del contraste de McQueen y Thorley parece adecuado.

**Gráficas 2 y 3. Histograma y distribución estimada de los rendimientos de la cartera**

R



**Cuadro 3. Estadísticos descriptivos de los rendimientos de la cartera.**

Estadístico	
Media	0.000753
Mediana	0.000776
Desviación Estándar	0.018948
Sesgo	0.059838
Kurtosis	10.42170

La medida de expectativas que se utilizó en el presente trabajo para dividir a los datos en altos y bajos consiste en un promedio móvil de los rendimientos diarios del año anterior. Utilizando esta media móvil, se construyó la serie  $\{I_t\}$  de *unos y ceros*, y se procedió a clasificar los rendimientos de acuerdo con los valores de las pasadas realizaciones. Con el fin de encontrar el grado óptimo de la cadena de Markov, se utilizó el criterio de información de Schwarz (CS), definido de la siguiente manera:

$$CS = \frac{-2\ln(L)}{T} + \frac{k \ln(T)}{T}$$

$$k = 2^p + 2^{p-1}(2^p - 1)$$

donde  $p$  es el orden de la cadena de Markov,  $T$  es el número de observaciones y  $\ln(L)$  es la función de log-verosimilitud evaluada en los parámetros que la maximizan. El número de parámetros estimados,  $k$ , es la suma de los estimados de las probabilidades de transición (primer término de la suma)<sup>5</sup> y sus varianzas y covarianzas (segundo término). El criterio de selección para esta formulación del CS consiste en tomar el modelo con el menor valor absoluto del estadístico. El Cuadro 4 nos muestra los valores para cadenas de Markov de primero, segundo y tercer orden.

**Cuadro 4. CS para distintos órdenes de la cadena de Markov**

$p$	$\ln(L)$	$T$	$k$	CS
1	-721.10	1291	3	1,1338
2	-699.22	1290	10	1,1396
3	-684.59	1289	36	1,2622

Al observar los resultados reportados en el cuadro 4, y siguiendo el criterio de minimizar CS, pareciera ser que la cadena de primer orden es el óptimo. Sin embargo, se puede constatar que la función de log-verosimilitud la cadena de primer orden es menor que la del segundo orden, además de que la diferencia entre los CS de las cadenas de primero y

<sup>5</sup> No se contabilizan las medias en este cálculo puesto que la media muestral de una distribución Bernoulli con probabilidad de éxito  $p$  es el estimador mismo de  $p$ .

segundo órdenes es mínima. Esto es, la pérdida de parsimonia debida al mayor número de parámetros a estimar en la cadena de segundo orden no hace menos verosímiles a sus estimadores. Si uno observa los resultados para la cadena de tercer orden, la pérdida de parsimonia es considerable, por lo que el CS es considerablemente mayor a los demás, a pesar de que la función de log verosimilitud evaluada en sus parámetros es la mayor de las tres. Esto, aunado a la evidencia experimental citada por McQueen y Thorley (1991)<sup>6</sup> hacen que consideremos que el orden adecuado para la cadena de Markov sea el segundo.

**Cuadro 5. Ocurrencias y probabilidades de transición estimadas.**

<u>Estados anteriores</u>		<u>Ocurrencias</u>		<u>Probabilidades</u>	
		<u>Estado actual</u>		<u>Estado Actual</u>	
		<u>0</u>	<u>1</u>	<u>0</u>	<u>1</u>
0	0	160	107	0,5993	0,4007
0	1	67	105	0,3895	0,6105
1	0	106	104	0,6199	0,3801
1	1	104	576	0,1529	0,8471

Desviaciones estándar de las Probabilidades de Transición

$\sigma(\lambda_{00})$	0,02999
$\sigma(\lambda_{01})$	0,03718
$\sigma(\lambda_{10})$	0,03712
$\sigma(\lambda_{11})$	0,01380

El cuadro 5 reporta la estimación de las probabilidades de transición y sus desviaciones estándar. La estimación de las probabilidades de transición revela una fuerte correlación positiva en los rendimientos de la cartera, esto es: la probabilidad de obtener un rendimiento bajo luego haber tenido una secuencia de dos rendimientos bajos es mayor a la de obtener un rendimiento bajo luego de dos altos. Este resultado es similar a los obtenidos por McQueen y Thorley (1991) y Lo y MacKinlay (1988) en sus análisis de las series semanales. La alta frecuencia de los datos parece inducir este comportamiento, puesto que al analizar rendimientos anuales McQueen y Thorley encuentran una fuerte correlación negativa, lo cual es un hecho reportado en la literatura como la "función característica de autocorrelación" de los rendimientos. Para analizar la significancia de esta correlación y probar así la hipótesis de la caminata aleatoria, desarrollamos las pruebas de razón de verosimilitud (RV) y de Wald ya mencionadas anteriormente. El cuadro 6 presenta los resultados.

<sup>6</sup> Los autores citan los resultados obtenidos por Kroll, Levy y Rapoport (1988), que concluyen que los inversionistas se comportan como si su memoria fuera de dos periodos.

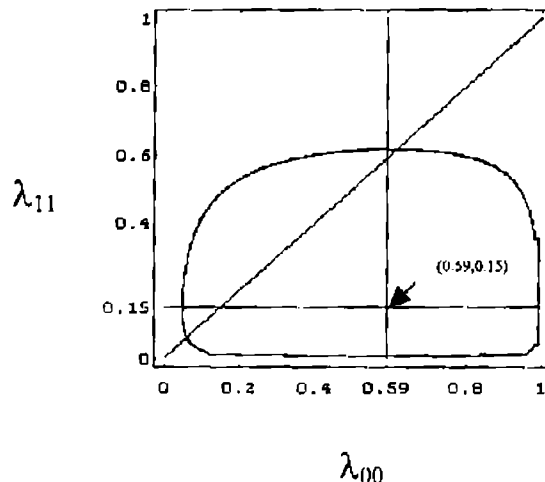
**Cuadro 6. Pruebas de Hipótesis sobre las probabilidades de transición de la cadena de Markov de segundo orden.**

$H_0$	RV	p-value	Wald	p-value	$\chi_1^2(5\%)$	$\chi_1^2(1\%)$
$\lambda_{00}=\lambda_{11}$	179.53	0.00	182.75	0.00	3.84	6.63

$H_0$	RV	p-value	$\chi_3^2(5\%)$	$\chi_3^2(1\%)$
$\lambda_{00}=\lambda_{01}=\lambda_{10}=\lambda_{11}$	253.31	0.00	7.82	11.34

De acuerdo con los resultados del cuadro, las dos hipótesis nulas son enfáticamente rechazadas. La primera es rechazada tanto por la prueba de razón de verosimilitudes como por la prueba de Wald. Los valores de los estadísticos de prueba son muy similares, por lo que podemos confiar en su comportamiento asintótico. La segunda hipótesis es también rechazada con fuerza, por lo que podemos concluir que los rendimientos no se comportan como una caminata aleatoria puesto que la correlación positiva que presentan es significativa. Los resultados son confirmados por dos pruebas adicionales que aparecen en la gráfica 4, donde se presenta la región de confianza para la hipótesis nula  $H_0 : \lambda_{00} = \tilde{\lambda}_{00}, \lambda_{11} = \tilde{\lambda}_{11}$ .

**Gráfica 4. Región de confianza para  $H_0 : \lambda_{00} = \tilde{\lambda}_{00}, \lambda_{11} = \tilde{\lambda}_{11}$**



Esta prueba revela gráficamente la existencia de correlación positiva entre los rendimientos de la cartera. La recta de  $45^\circ$  indica la restricción o aquellas combinaciones de  $\lambda_{00}$  y  $\lambda_{11}$  que son idénticas. Valores por encima de la recta representan puntos donde  $\lambda_{00} < \lambda_{11}$ , y muestran una correlación negativa, pues es mayor la probabilidad de obtener rendimientos altos luego de una secuencia de dos bajos. A su vez, los puntos por debajo de la recta revelan

correlación positiva. Las regiones representan el contorno de  $2(\ln L(\hat{\Lambda}) - \ln L(\tilde{\Lambda})) = \chi_2^2(1 - \alpha)$ , donde  $\alpha=1\%$  en el área mayor y  $\alpha=10\%$  en la que se encuentra dentro de ella. El énfasis con el que se rechaza la hipótesis nula es mucho menor en este caso, debido a que una parte de los elipsoides se encuentra cruzando la recta de  $45^\circ$ , no obstante que la mayor parte de su área se encuentra dentro de la región inferior de la gráfica.

Se hizo una prueba mas, esta vez sobre las medias condicionales de los rendimientos de la cartera, con los resultados reportados en el Cuadro 7. La prueba consistió en condicionar a los rendimientos de los dos periodos pasados usando la media móvil de un año para dividir a los rendimientos en altos y bajos. De este modo  $R_{10}$  pasó a ser la media de los activos que tuvieron un rendimiento alto dos periodos atrás y uno bajo en el anterior, y así sucesivamente. El estadístico utilizado fue uno de diferencia de medias, que se distribuye como una F, con un número de grados de libertad en el numerador igual al número de medias en comparación menos uno y en el denominador a un número igual a las observaciones menos el número de medias en comparación.

**Cuadro 7. Medias condicionales y pruebas de igualdad entre ellas.**

	Ocurrencias	Media	Desviación Estándar	Desviación Estandar de la Media Condicional
$R_{00}$	380	-0.002124	0.017983	0.001101
$R_{01}$	275	0.003924	0.012710	0.000969
$R_{10}$	275	-0.001982	0.012607	0.000964
$R_{11}$	360	0.001842	0.021545	0.000826

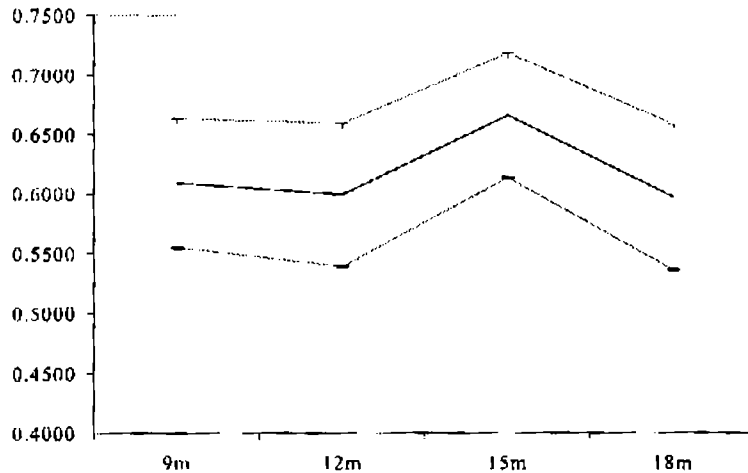
$H_0$	Grados de libertad	Estadístico F	p-value
$R_{00} = R_{11}$	(1,738)	7.10	0.007
$R_{00} = R_{11} = R_{01} = R_{10}$	(3,1286)	5.66	0.000

De nueva cuenta, se observa evidencia de correlación positiva, puesto que la media condicionada en dos rendimientos bajos anteriores es negativa y la condicionada en dos rendimientos altos es positiva, con lo cual se obtienen rendimientos bajos si los dos anteriores han sido bajos, y altos si los dos anteriores han sido altos. Las hipótesis nulas se rechazan enfáticamente en ambas pruebas, lo cual confirma los resultados obtenidos al analizar las probabilidades de transición.

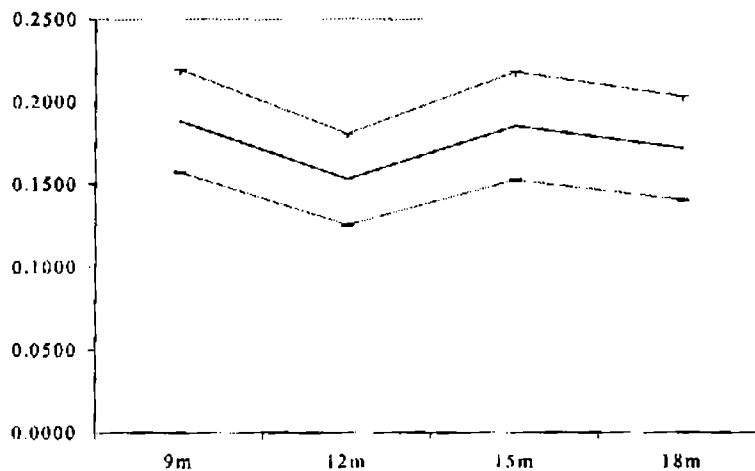
Dado que la elección de la medida de expectativas es un componente crucial en esta prueba se realizó un análisis de sensibilidad ante distintas medidas, con el fin de mostrar la robustez de los resultados. Para este propósito se tomaron medias móviles de 6, 15 y 18 meses, además de los resultados reportados a 12 meses, y se construyeron las correspondientes series  $I_t$ , con las que se estimaron las probabilidades de transición y los estadísticos de prueba. Las Gráficas 5 y 6 muestran los estimadores de  $\lambda_{00}$  y  $\lambda_{11}$  para las

distintas longitudes del promedio móvil, además de presentar bandas de  $\pm 2$  desviaciones estándar.

**Gráfica 5. Análisis de sensibilidad de  $\lambda_{00}$**



**Gráfica 6. Análisis de sensibilidad de  $\lambda_{11}$**



Una vez más se aprecia que los estimadores no tienen cambios abruptos, ni se observa que las desviaciones se alejen demasiado entre sí. Los gráficos muestran también que la correlación positiva sigue presente para las distintas medidas de expectativas utilizadas para dividir en altos y bajos a los rendimientos, ya que para cualquiera de esas medidas es mayor la probabilidad de obtener rendimientos bajos dados rendimientos bajos en los dos periodos anteriores que la de obtener altos. Asimismo las pruebas reportadas anteriormente para el promedio móvil a un año siguen siendo válidas, pues las hipótesis nulas de igualdad entre todas las probabilidades de transición y entre  $\lambda_{00}$  y  $\lambda_{11}$  se rechazan para niveles de

significancia marginal menores al 1%. Con todo esto se puede concluir que los resultados de la prueba son robustos ante la medida de expectativas utilizada.

#### 4. PROBABILIDADES ESTACIONARIAS DE LA CADENA

De particular interés en el estudio de las cadenas de Markov es la existencia de las probabilidades estacionarias. En el caso concreto de este trabajo su importancia es crucial, puesto que como se mencionó antes, la prueba no requiere que la serie de rendimientos originales sea normalmente distribuida, y ni siquiera estacionaria, siempre y cuando la cadena de Markov asociada sea estacionaria.

Neftci (1984) desarrolla la expansión asintótica de la probabilidad del estado inicial, que arroja como resultado las probabilidades estacionarias. El vector de probabilidades iniciales  $[\pi_{00} \quad \pi_{01} \quad \pi_{10} \quad \pi_{11}]'$  se relaciona con cuatro posibles eventos:  $\{I_2 = 0, I_1 = 0\}$ ,  $\{I_2 = 0, I_1 = 1\}$ ,  $\{I_2 = 1, I_1 = 0\}$ ,  $\{I_2 = 1, I_1 = 1\}$ . Dado que las secuencias  $\{1, 1, 1\}$  y  $\{1, 1, 0\}$  como  $\{0, 0, 0\}$  y  $\{0, 0, 1\}$  son eventos disjuntos, se tiene que:

$$P(I_2 = 1, I_1 = 1) = P(I_2 = 1 | I_1 = 1, I_0 = 1)P(I_1 = 1, I_0 = 1) + P(I_2 = 1 | I_1 = 1, I_0 = 0)P(I_1 = 1, I_0 = 0)$$

$$P(I_2 = 0, I_1 = 0) = P(I_2 = 0 | I_1 = 0, I_0 = 0)P(I_1 = 0, I_0 = 0) + P(I_2 = 0 | I_1 = 0, I_0 = 1)P(I_1 = 0, I_0 = 1)$$

Las restantes probabilidades se encuentran de manera similar, obteniéndose el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \pi_{11}(t) \\ \pi_{00}(t) \\ \pi_{10}(t) \\ \pi_{01}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0 & \lambda_{10} & 0 \\ 0 & \lambda_{00} & 0 & \lambda_{01} \\ 0 & 1 - \lambda_{00} & 0 & 1 - \lambda_{01} \\ 1 - \lambda_{11} & 0 & 1 - \lambda_{10} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_{11}(t-1) \\ \pi_{00}(t-1) \\ \pi_{10}(t-1) \\ \pi_{01}(t-1) \end{bmatrix}$$

Merece la pena detenerse un momento a observar la matriz de coeficientes del anterior sistema. En ella se está presentando una cadena de Markov de segundo orden bajo la forma de una cadena de primer orden, en la que ahora tenemos una matriz de transición con 4 estados para una cadena de primer orden, cuando las probabilidades de transición que se estimaron anteriormente fueron para una cadena de segundo orden con 2 estados. De esta manera tenemos ahora 4 estados de una cadena de primer orden que nos dan información acerca de la cadena original de segundo orden. Esto permite describir el sistema de una manera más compacta, tras sustituciones sucesivas, como  $\Pi(t) = A^n \Pi(t-n)$ . El vector de probabilidades estacionarias es  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi(t) = \Pi^*$ .

La solución de este sistema de ecuaciones no es más que el vector de probabilidades estacionarias:

$$\Pi^* = A \Pi^*$$

$$1' \Pi^* = 1$$

Ahora bien, dado que una de las ecuaciones del sistema es redundante, eliminamos la ecuación correspondiente a  $\pi_{10}$ , para obtener en forma desplegada los eigenvectores:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda_{10} & -(1-\lambda_{11}) \\ -(1-\lambda_{00}) & \lambda_{01} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & (1-\lambda_{00}) & (1-\lambda_{11}) \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_{00} \\ \pi_{01} \\ \pi_{10} \\ \pi_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Una vez resuelto el sistema se obtienen las probabilidades estacionarias como función de las probabilidades de transición:

$$\pi_{00} = \frac{(1-\lambda_{11})\lambda_{01}}{2(1-\lambda_{00})(1-\lambda_{11}) + \lambda_{01}(1-\lambda_{11}) + \lambda_{10}(1-\lambda_{00})}$$

$$\pi_{11} = \frac{(1-\lambda_{00})\lambda_{10}}{2(1-\lambda_{00})(1-\lambda_{11}) + \lambda_{01}(1-\lambda_{11}) + \lambda_{10}(1-\lambda_{00})}$$

$$\pi_{01} = \pi_{10} = \frac{(1-\lambda_{11})(1-\lambda_{00})}{2(1-\lambda_{00})(1-\lambda_{11}) + \lambda_{01}(1-\lambda_{11}) + \lambda_{10}(1-\lambda_{00})}$$

Sustituyendo los valores estimados en la sección 2 para las probabilidades de transición, se computan las probabilidades estacionarias de la cadena asignada a los rendimientos de la cartera estudiada en este trabajo:

$$\pi_{00} = 0.2624, \quad \pi_{11} = 0.1975, \quad \pi_{01} = \pi_{10} = 0.2699$$

Las probabilidades estacionarias nos dan información acerca del estado inicial, y en este caso se repite el mismo patrón observado en las probabilidades de transición. Las probabilidades estacionarias se pueden ver como incondicionales, lo que se refleja en el hecho de que se agrupan en un vector, una matriz de 4x1, y no una matriz de 4x4. Este vector nos da la probabilidad de encontrarse en el estado ij en todo tiempo, en particular en el estado inicial y en el estado estacionario.

Como se mencionó mas arriba, esta prueba no requiere que la serie original de rendimientos sea estacionaria siempre y cuando la cadena de Markov asociada sea estacionaria. Esta información la podemos obtener del análisis de los valores propios de la matriz de transición. La cadena es ergódica si los uno de los valores propios de la matriz es igual a la unidad y los restantes son menores a uno en valor absoluto (o en módulo, de ser valores complejos). Si la cadena es ergódica, esta es estacionaria en covarianza. La matriz de transición en este caso es de rango 4, por lo que esperamos encontrar 4 valores propios. Para esto utilizamos el ordenamiento de columnas usado para encontrar las probabilidades estacionarias, sabiendo que los valores propios son invariantes ante permutaciones de las columnas de la matriz. El Cuadro 8 presenta los valores propios y sus valores absolutos.

**Cuadro 8. Valores propios de la matriz de transición.**

Valor propio	Multiplicidad	Valor absoluto o módulo
1	1	1
0.3294	1	0.3294
-0.2886 + 0.4628 i	1	0.5454
-0.2886 - 0.4628 i	1	0.5454

La matriz tiene 4 valores propios distintos, dos reales y un conjugado complejo. En efecto, uno de los valores propios es uno, y los restantes son menores a la unidad ya sea en valor absoluto o en módulo, por lo que la cadena es ergódica y por tanto estacionaria en covarianza. De esta manera concluimos que la prueba se encuentra bien especificada.

### 5. PRONÓSTICOS

Dado que la cadena de Markov utilizada para hacer la prueba es ergódica, es posible hacer pronósticos con ella. Con el ordenamiento de columnas usado para calcular las probabilidades ergódicas, se puede indizar las columnas de la matriz de transición de acuerdo con los correspondientes estados. De esta manera, la primera columna se puede denotar como (1,1), la segunda como (0,0) y así sucesivamente. Consideremos ahora a  $\varepsilon_t$  como un vector aleatorio correspondiente a la columna (i,j) de una matriz identidad de dimensión 4 usando el ordenamiento de columnas descrito anteriormente. Esto permitirá que la primera columna, correspondiente al estado (1,1) sea un vector con un uno en la primera posición y ceros en las restantes, lo mismo para los demás ordenamientos. Consideremos también a  $S_t$  como una realización de la cadena de primer orden, de forma que si  $S_t=ij$ ,  $i,j=0,1$ , el elemento correspondiente según el ordenamiento de columnas de la matriz identidad sea una variable aleatoria que toma el valor de la unidad con probabilidad  $\lambda_{ij}$  o  $1 - \lambda_{ij}$  dependiendo de su posición en la matriz de transición, y cero en otro caso. Esta variable aleatoria es un experimento de Bernoulli y como tal tiene un valor esperado igual a su probabilidad de tomar uno como valor. Bajo estas condiciones, la esperanza condicional de  $\varepsilon_{t+1}$  dado  $S_t=ij$  viene dada por la correspondiente columna de la matriz de transición de la cadena de Markov de primer orden, denotada como  $L$ . Además ya que la realización es igual a la correspondiente columna de la matriz identidad de dimensión 4, se tiene que :

$$E[\varepsilon_{t+1} | \varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots] = E[\varepsilon_{t+1} | \varepsilon_t] = L\varepsilon_t$$

donde la primera igualdad se desprende de la propiedad markoviana. De esta manera, es posible expresar la cadena de Markov de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{t+1} &= L\varepsilon_t + v_{t+1} \\ v_{t+1} &= \varepsilon_{t+1} - E[\varepsilon_{t+1} | \varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots] \end{aligned}$$

donde la media de  $v_t$  es un vector de ceros de dimensión 4. El valor esperado de  $\varepsilon_{t+m}$  se puede obtener, mediante sustituciones sucesivas, de la siguiente expresión:



$$\varepsilon_{t+m} = v_{t+m} + L v_{t+m-1} + L^2 v_{t+m-2} + L^3 v_{t+m-3} + \dots + L^{m-1} v_{t+1} + L^m \varepsilon_t$$

Dado que la media de  $v_t$  es cero, el valor esperado de  $\varepsilon_{t+m}$  condicionado en la información en  $t$  es igual a:

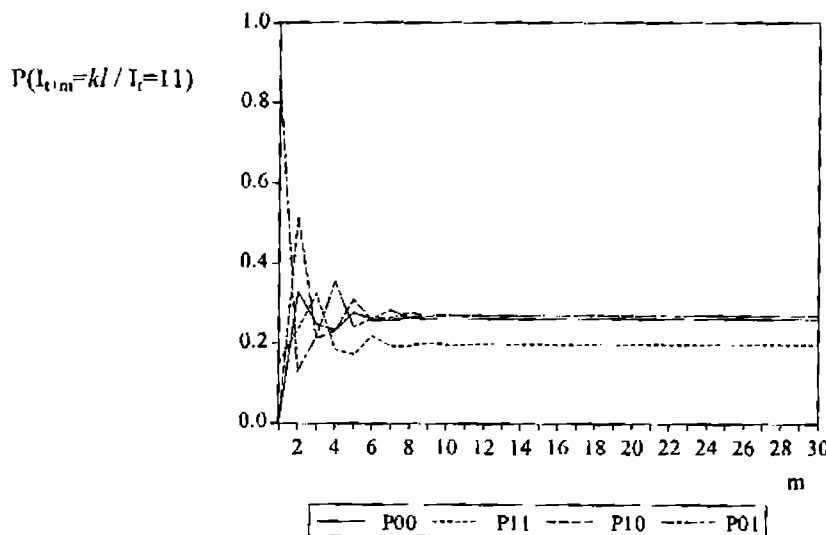
$$E[\varepsilon_{t+m} | \varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots] = L^m \varepsilon_t$$

De esta manera, se pueden pronosticar las probabilidades de transición de la cadena en  $t+m$  elevando a la potencia  $m$  la matriz de transición y multiplicándolo por el correspondiente vector de la base canónica de  $\mathbb{R}^4$ , usando el ordenamiento de columnas de la matriz de la cadena de Markov de primer orden. Así, por ejemplo, el pronóstico  $m$  periodos adelante dado que en  $t$  la cadena se encontraba en el estado  $S_t=11$  es igual a:

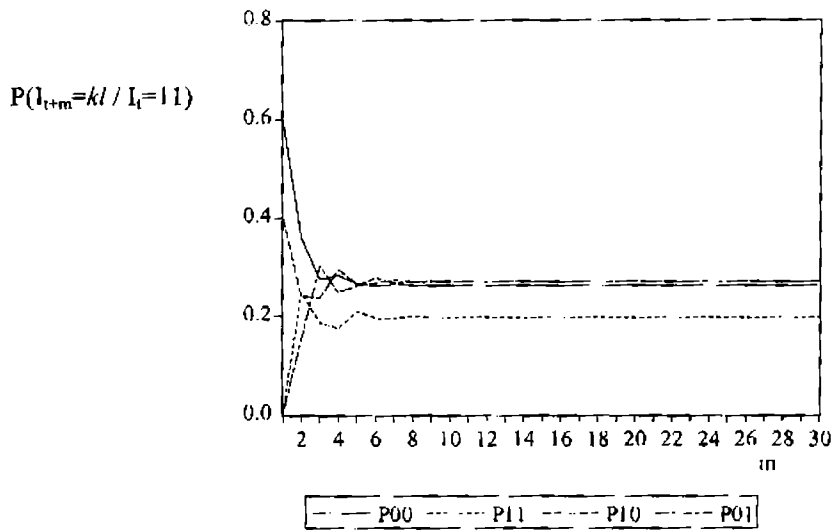
$$\begin{bmatrix} P[S_{t+m} = 11 | S_t = 11] \\ P[S_{t+m} = 00 | S_t = 11] \\ P[S_{t+m} = 10 | S_t = 11] \\ P[S_{t+m} = 01 | S_t = 11] \end{bmatrix} = L^m e_{11}$$

En virtud de que la cadena de Markov asociada a la serie de rendimientos es ergódica las probabilidades pronosticadas tenderán a converger a sus probabilidades estacionarias. Las Gráficas 7 y 8 nos muestran los pronósticos para un horizonte de 30 días dado que en  $t$  la cadena se encontraba en el estado  $S_t=11$  y  $S_t=00$ . Las gráficas están rotuladas como  $P_{ij}$  de acuerdo con el estado alcanzado en  $t+m$ .

**Gráfica 7. Probabilidades pronosticadas para  $t+m$  dado que  $I_t=11$**



**Gráfica 8. Probabilidades pronosticadas para  $t+m$  dado que  $I_t=00$**



Las gráficas muestran la rapidez con la que los pronósticos tienden a su media incondicional, esto es, a la probabilidad estacionaria del estado correspondiente. Y aunque la escala utilizada no permite apreciarlo con claridad, la convergencia se alcanza alrededor de  $m=26$ , aún cuando muchos periodos atrás las fluctuaciones alrededor de la media incondicional son marginales. Este hecho nos indica que el horizonte de pronóstico de este modelo es muy corto, esto es, nos puede dar predicciones muy inmediatas antes de asentarse en sus valores estacionarios. La cortedad del pronóstico no implica que la variable aleatoria  $\varepsilon_t$  efectivamente se estacione en esos valores, simplemente nos dice que pasado cierto punto los pronósticos del modelo serán constantes. Por esta razón y recordando que los datos utilizados en este trabajo corresponden a días hábiles, uno puede asegurar con confianza que el horizonte de pronóstico del modelo es de aproximadamente unas dos o tres semanas, alcanzándose al mes aproximadamente la media incondicional.

## 6. CONCLUSIONES

El documento busca probar la hipótesis de la caminata aleatoria para los rendimientos nominales de una cartera de activos de alta bursatilidad con pesos iguales, expandiendo la metodología propuesta por McQueen y Thorley (1991). Después de asociarle una cadena de Markov de segundo orden a la serie de rendimientos diarios de la cartera, se encontró que la estructura de las probabilidades de transición de la cadena revelan la existencia de una fuerte autocorrelación positiva. La significancia estadística de este resultado se probó mediante diversos métodos, encontrándose en todos que la hipótesis nula de la caminata aleatoria era enfáticamente rechazada. Los resultados de estas pruebas son robustos ante distintas medidas de expectativas, como lo señala el análisis de sensibilidad realizado. En particular se reportó una significativa autocorrelación positiva en los rendimientos, lo cual implica que existen componentes predecibles en la serie de los retornos de la cartera. Una vez calculadas las probabilidades estacionarias de la cadena, se encontró evidencia de que

esta correlación sigue un patrón que se repite en el estado estacionario. También se demostró que la cadena asociada a la serie de rendimientos es ergódica y por tanto estacionaria en covarianza, por lo que las pruebas se encuentran bien especificadas. Por último, se aprovecharon las estimaciones usadas en las pruebas y el hecho de que la cadena es ergódica para hacer pronósticos sobre los estados futuros, dada la información contenida en la matriz de transición estimada, y se observó que es posible obtener pronósticos con un horizonte relativamente corto (2 o 3 semanas).

Entre las limitaciones de los resultados reportados podemos destacar la poca variedad en la periodicidad de las series. El trabajo utiliza solamente rendimientos diarios por razones de simplicidad computacional y para asegurar la convergencia asintótica en los resultados. Un análisis similar usando rendimientos mensuales, por ejemplo, requeriría del estudio de las propiedades de muestra pequeña de los estimadores y las pruebas estadísticas utilizadas. McQueen y Thorley estiman la distribución empírica de sus estadísticos de prueba mediante simulación dado que el número de observaciones que utilizan es muy pequeño. Por otro lado, las probabilidades de transición obtenidas en este trabajo obvian las probabilidades del estado inicial puesto que se trabaja con un gran número de observaciones, pero la estimación para rendimientos mensuales requeriría de su tratamiento explícito. Asimismo, un análisis extensivo del mercado accionario mexicano implicaría la inclusión de activos menos bursátiles que los usados aquí, por lo que la correlación espuria debida al comercio infrecuente tendría que ser modelada explícitamente. Por último, cabe mencionar que los estudios sobre el tema señalan que el análisis de portafolios ponderados por tamaño puede inducir diferencias no triviales en los resultados, que no son captados por nuestro portafolio de pesos iguales. Todos estos refinamientos quedan también como posibles extensiones al presente trabajo. De cualquier manera, el resultado principal del trabajo no es sólo que se encontró evidencia de la existencia de componentes pronosticables en los rendimientos de acciones de alta bursatilidad sino, fundamentalmente, que hay una metodología explícita para encontrarlos.

**Bibliografía**

- Campbell, J. Y., Lo, A.W. y MacKinlay, A.C. (1997) *The Econometrics of financial Markets*, Princeton University Press.
- Fama, E. y French, K. R. (1988), "Permanent and Temporary Components of Stock Prices", *Journal of Political Economy* 96, pp.246-273.
- Falk, B, (1986), "Further Evidence on the Asymmetric Behavior of Economic Time Series over the Business Cycle", *Journal of Political Economy* 94, pp. 1906-1109.
- Freund, J. E. y Walpolc, R. E. (1990), *Estadística Matemática con Aplicaciones*, 4ª. Ed. México: Prentice-Hall Hispanoamericana.
- Greene, W. H. (1999), *Análisis Económico*, 3ª. Ed. Madrid, Prentice Hall.
- Grossman, S. I. (1996), *Algebra Lineal*, 5ª. Ed. Santafé de Bogotá: McGraw-Hill.
- Hamilton, J.D., (1994), *Time Series Analysis*, Princeton, New Jersey: Princeton University Press.
- Kroll, Y., Levy, H. y Rapoport, A., 1988, Experimental tests of the mean-variance model of portfolio selection, *Organizational Behavior and Human Decision Process* 42, pp. 338-410, citado por McQueen y Thorley (1991), p.242.
- Lo, A. W., (1997), Fat Tails, Long Memory and the Stock Market since the 1960's, *Economic Notes by Banca Monte de Paschi*, vol26(12) pp 213-246.
- Lo, A. W. y MacKinlay, A. C. (1988), "Stock Market Prices do not Follow Random Walks: Evidence from a Simple Specification Test", *Review of Financial Studies* 1, pp. 41-66.
- Lorenzo-Valdés, A., (2002), "Pruebas de no linealidad de los rendimientos del mercado mexicano accionario: coeficientes de Lyapunov", *Estudios Económicos*, por aparecer.
- McQueen, G. Y Thorley, S. (1991), "Are Stock Returns Predictable? A test Using Markov Chains", *Journal of Finance* 56, pp. 239-263.
- Neftci, S. N. (1984), "Are Economic Time Series Asymmetric over the Business Cycle?", *Journal of Political Economy* 92, pp. 307-328.
- Ramírez, J. C. (2001), "Los Problemas más Comunes en el Pronóstico de Rendimientos de Activos Financieros", Documento de Trabajo n. 204, *Centro de Investigación y Docencia Económicas*.
- Venegas-Martínez, F., (2001), "Opciones, cobertura y procesos de difusión con saltos: una aplicación a los títulos de GCARSO", *Estudios Económicos*, vol. XVI, n. 2, pp. 203-226.