

NÚMERO 266

JUAN M. TORRES ROJO

Predicción de distribuciones multimodales  
con mezclas de distribuciones Weibull

JUNIO 2003



**CIDE**  
[www.cide.edu](http://www.cide.edu)

• Las colecciones de **Documentos de Trabajo** del CIDE representan un medio para difundir los avances de la labor de investigación, y para permitir que los autores reciban comentarios antes de su publicación definitiva. Se agradecerá que los comentarios se hagan llegar directamente al (los) autor(es).

• D.R. © 2003. Centro de Investigación y Docencia Económicas, carretera México-Toluca 3655 (Km. 16.5), Lomas de Santa Fe, 01210, México, D.F.  
Tel. 5727•9800 exts. 2202, 2203, 2417  
Fax: 5727•9885 y 5292•1304.  
Correo electrónico: publicaciones@cide.edu  
www.cide.edu

• Producción a cargo del (los) autor(es), por lo que tanto el contenido así como el estilo y la redacción son su responsabilidad.

## Resumen

---

*Se muestra un procedimiento para ajustar distribuciones diamétricas multimodales, típicas de poblaciones forestales de clima templado con varias especies o sometidas a tratamientos de manejo forestal extensivo. El procedimiento consiste en aplicar un algoritmo (Silverman, 1981) para evaluar el número de modas en la distribución. Posteriormente para una distribución con  $m$  modas, se ajusta una distribución Weibull mezclada con  $m$  mezclas. El procedimiento se ejemplifica con una muestra de distribuciones diamétricas bimodales obtenida de un inventario de bosques en el Estado de México. Los ajustes se comparan con el procedimiento tradicional que usa un modelo Weibull de una moda. Las comparaciones muestran una amplia diferencia a favor del modelo bimodal, que se manifiesta en una mejor bondad de ajuste de la distribución predicha y un menor sesgo en la predicción de los momentos de la distribución. Se enfatiza la necesidad de estudios sobre dinámica de poblaciones que permitan identificar las variables de estado que ayuden a definir el número de modas en una población.*

**PALABRAS CLAVE:** *Mezcla de Weibulls, distribuciones multimodales, predicción de distribuciones, evaluación de modas.*

## Abstract

---

*A procedure to fit multimodal diameter distributions is presented. This type of distributions are typical of temperate forest populations with several species or populations under extensive forest management. The procedure consists of applying an algorithm (Silverman, 1981) to estimate the number of modes in a distribution. Then, given a distribution with  $m$  modes a Weibull distribution with  $m$  mixtures is fitted. The procedure is tested with a sample of bimodal diameter distributions obtained from a forest inventory carried out in the state of Mexico. Fits are compared against the traditional procedure of fitting a model with one mode. Comparisons show a large difference in favor of the binomial model since these fits have better goodness of fitness for the predicted distribution as well as smaller bias in the prediction of distribution moments. The need of additional studies on population dynamics which identify the state variables defining the number of modes is emphasized.*

**Keywords:** *Weibull mixtures, multimodal distributions, diameter distribution prediction, evaluation of modes.*



## Introducción

---

El procedimiento de predicción de distribuciones diamétricas a través de atributos de rodales mejor conocido como "predicción explícita" se ha convertido en la herramienta más socorrida para la predicción de estructuras arboladas. Desde su introducción (Bailey, 1972) el procedimiento se ha aplicado a distribuciones unimodales, ya sea con datos completos o con datos truncados o censurados (Zanakis, 1979). La mayor parte de estas aplicaciones se ha realizado en rodales coetáneos, aunque recientes aplicaciones han extendido el procedimientos a rodales incoetáneos (Návar y Contreras, 2000). En todos estos trabajos el procedimiento ha resultado bastante eficiente, sobre todo en casos cuando las distribuciones son unimodales, cuando existen pocas o nulas categorías vacías en la distribución y cuando no hay truncamientos. Sin embargo, si alguno de estos requisitos no se cumple la estimación de los parámetros no es robusta y la posterior predicción de tales estimadores se hace compleja.

La extensión del procedimiento a rodales multimodales o multiespecíficos limita el uso de distribuciones unimodales, ya que en estos casos la presencia de mayor cantidad de modas o huecos en la distribución viola el supuesto más básico en todo ajuste, aquel de que el modelo elegido es el correcto. A pesar de ello, se han realizado intentos por describir estructuras multiespecíficas con distribuciones unimodales, en algunos casos con buenos resultados (Návar y Contreras, 2000), olvidando que tales estimaciones son meras aproximaciones a una estructura que no es en realidad la más apropiada. El modelaje de distribuciones multimodales es un problema que se ha abordado en áreas muy diversas, desde salud para modelar la distribución de presiones sanguíneas de distintos grupos genéticos (Swales, 1985), hasta aplicaciones en censos remotos para identificar cultivos (Woodward, et al., 1984). En estas aplicaciones se ha utilizado exitosamente el procedimiento de "mezcla de normales", que consiste en estimar los parámetros de una proporción de varias distribuciones normales, cada una representando una moda de la distribución empírica u observada. El procedimiento también se ha extendido a otras distribuciones como la Weibull (Ishwaran, 1996), aunque el uso de mezclas de normales ha sido el más popular. La extensión de la metodología de mezcla de distribuciones a la predicción de distribuciones diamétricas ha sido propuesto en trabajos recientes para modelar distribuciones de *Fagus sylvatica* L. (Hessenmöller y Gadow, 2001), sin embargo su aplicación práctica ha sido todavía muy rudimentaria.

La predicción de distribuciones diamétricas multimodales reviste especial importancia en el caso de México por dos razones: i) El procedimiento de

"predicción explícita" es el procedimiento de predicción de distribuciones diamétricas más usado en el país, incluso, sistemas de estimación de cortas como el Sistema de Conservación y Desarrollo Silvícola (SICODESI) lo usa en sus rutinas de predicción, de aquí que resulta importante contar con un procedimiento más eficiente de predicción. ii) Las prácticas de cosecha maderable realizadas en México tanto con el método de desarrollo silvícola, como con el Método Mexicano de Ordenación de Montes (los dos métodos más usados en el país), han originado masas arboladas de varios pisos (modas) y en muchos casos han favorecido el desarrollo de otras especies, lo que ha dado por resultado estructuras multimodales e irregulares. Es por ello que una metodología que permita usar el procedimiento de "predicción de parámetros" con estructuras tan complejas como la de los bosques mexicanos resulta tan atractiva.

El presente trabajo muestra la forma en que se pueden estimar estructuras multimodales teniendo como base una forma funcional, en este caso la distribución Weibull. Solo con la finalidad de identificar un objetivo de trabajo se plantea la hipótesis de que existen diferencias entre los ajustes realizados con distribuciones unimodales y aquellos realizados con mezclas de distribuciones en poblaciones naturales con más de una moda.

El documento se ha organizado de la siguiente forma. En la siguiente sección se presenta una breve descripción del modelo de mezcla de distribuciones; el procedimiento de selección de la muestra y la descripción del procedimiento de ajuste de mezcla de distribuciones Weibull. Inmediatamente después se muestran los resultados de ajustes tanto con distribuciones unimodales como con distribuciones multimodales. Finalmente se presentan una breve discusión y la conclusión general del trabajo.

## **Metodología**

### *El modelo de mezcla de distribuciones Weibull*

El problema de estimar una mezcla de normales fue introducido por Quandt y Ramsey (1978). Originalmente solo consideraba el caso más simple, aquel de dos proporciones de normales, sin embargo, la extensión de este modelo al caso de distribuciones Weibull es directa. Tal problema se puede plantear como la estimación de los parámetros  $(\gamma_1, \gamma_2, \theta_1, \theta_2, \lambda)$  de una muestra en la variable aleatoria y tal que:

$$y \sim W(\gamma_1, \theta_1) \text{ con probabilidad } \lambda$$

$$y \sim W(\gamma_2, \theta_2) \quad \text{con probabilidad } (1 - \lambda)$$

lo que se convierte en una distribución de probabilidades del tipo:

$$f(y) = \begin{cases} \lambda \left( \theta_1 \gamma_1^{-\theta_1} y^{\theta_1-1} \exp \left( -\left( \frac{y}{\gamma_1} \right)^{\theta_1} \right) \right) + (1 - \lambda) \left( \theta_2 \gamma_2^{-\theta_2} y^{\theta_2-1} \exp \left( -\left( \frac{y}{\gamma_2} \right)^{\theta_2} \right) \right) & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Donde todos los parámetros son estrictamente positivos (incluyendo  $\lambda$ ) y el rango de  $y$  está definido dentro de  $[0, \infty)$ , mientras que  $\lambda \in (0, 1)$ . Evidentemente, el problema se puede extender a definir una mezcla de varias proporciones  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  en una distribución de densidad mezclada de la forma:

$$f(y) = \sum_{j=1}^m \lambda_j f_j(y)$$

Donde el número de componentes (modas)  $m$  es conocido y las funciones de densidad  $[f_j(y)]$  son de la misma familia paramétrica, mientras que las ponderaciones ( $\lambda_j$ ) están restringidas a formar una combinación convexa  $\left( \text{i.e., } \sum_{j=1}^m \lambda_j = 1; \lambda_j \geq 0, \forall j = 1, 2, \dots, m \right)$ .

La estimación de los parámetros de una mezcla de distribuciones no es complicada ya que para algunas distribuciones (normal) los estimadores de momentos son estimadores consistentes y relativamente fáciles de calcular. Sin embargo, para el caso de mezclas de normales, el uso de estimadores de máxima verosimilitud genera problemas dado que la función de verosimilitud resulta ser no acotada en ausencia de restricciones adicionales, por lo que los algoritmos deben dirigirse a encontrar el mejor máximo local (Schmidt, 1982) definido por las restricciones sobre los valores que pueden tomar los parámetros. Existen varias formas de realizar la estimación para mezclas de normales univariadas (aproximación no lineal, distancia mínima, funciones generadores de momentos entre otros), e incluso se conocen sus propiedades de convergencia (Everitt y Hand, 1981; Titterton et al., 1985). En la mayoría de los algoritmos los procedimientos dependen del número de distribuciones dentro de la mezcla y algunas características de los límites de las distribuciones tales como valores mínimos y máximos de la variable

aleatoria. Tales algoritmos se han extendido para la estimación de mezclas de distribuciones Weibull (Ishwaran, 1996) con resultados variados.

El procedimiento de ajuste de mezclas de distribuciones es muy popular con la mezcla de normales. Ello se debe a que los problemas que se han resuelto con este procedimiento presentan dos o más modas muy bien definidas. Sin embargo, el uso de normales no permite la flexibilidad que presenta la mezcla de distribuciones Weibull, ya que por ejemplo una función de densidad definida por la mezcla de dos normales no se considera bimodal a menos que las medias estén separadas por al menos dos desviaciones estándar (Roeder, 1994), algo que regularmente no se tiene en distribuciones diamétricas. Es por ello que en distribuciones donde no se cumplen estos requerimientos el uso de modelos de mezclas de funciones normales no siempre puede ser una estrategia apropiada de ajuste. Por su parte, la mezcla de distribuciones Weibull permite mayor flexibilidad en cuanto a la separación de las modas y la forma de cada una de ellas.

Por otra parte, una distribución Weibull puede estar compuesta de dos o de tres parámetros. El tercer parámetro que ocasionalmente se añade en aplicaciones prácticas es el parámetro de localización. Tal parámetro es importante en distribuciones unimodales, sobre todo cuando las distribuciones son muy regulares, como por ejemplo en masas coetáneas, sin embargo, en poblaciones donde se tiene un amplio rango de categorías (sobre todo de categorías pequeñas) tal parámetro podría ser obviado. Hessenmöller y Gadow (2001) realizaron estimaciones de mezclas de distribuciones Weibull usando distribuciones de tres parámetros, aunque dado que no reportan la significancia de los estimadores en cada muestra resulta difícil señalar si el parámetro de localización es significativo en cada moda. Una desventaja adicional de un modelo de tres parámetros es que aumenta el número de parámetros, lo que complica el proceso de estimación.

### *Aplicación empírica*

Para ejemplificar el procedimiento de ajuste se tomó una muestra aleatoria de 2,500 sitios de muestreo de una dimensión equivalente a 0.1 ha, obtenida de los sitios levantados en el Segundo Estudio Dasonómico del Estado de México (Rodríguez, 1991). La muestra contiene información de rodales puros y mezclados de diferentes especies del género *Pinus* (*Pinus michoacana* Martínez, *P. montezumae* Lamb, *P. douglasiana* Martínez y *Pinus teocote* Schtdl et Cham), mezclado con *Abies religiosa* (HBK) Schtdl et Cham y algunas especies de los géneros *Quercus* y *Alnus*, que crecen en el Estado de México. De esta muestra se seleccionaron aquellos sitios que tuvieran una estructura diamétrica con dos modas.



La definición de la bimodalidad de una estructura es un tema controversial, ya que los criterios de división de modas pueden ser muy diferentes. Existen varias pruebas que se han desarrollado para identificar diferentes modas de distribuciones normales (Izenman y Sommer, 1989; McLachlan y Basford, 1988; Crawford et al., 1992, son excelentes referencias de literatura relacionada), incluso existen procedimientos gráficos tan viejos como el de "gráficas de puntuación normal" (Cassie, 1954) o el de "gráficas de percentiles modificados" (Fowlkes, 1979). Sin embargo, no existen procedimientos para identificar mezclas de distribuciones Weibull a excepción de las aproximaciones generalizadas usando estimaciones Kernel (Silverman, 1981). La estimación es simple, suponga una muestra aleatoria de diámetros  $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n$ , entonces el estimador Kernel de la función de densidad para la distribución está dado por:

$$\hat{f}(y, h) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{y - Y_i}{h}\right)$$

Donde  $h$  controla la cantidad de desplazamiento y  $K(z) = (1/\sqrt{2\pi})e^{-1/2z^2}$  es la función de densidad de distribución normal estándar. Si  $h$  tiene un valor grande entonces  $\hat{f}(y, h)$  tiene un valor cercano a una distribución unimodal, sin embargo si es pequeño entonces  $\hat{f}(y, h)$  tendrá una moda en cada dato. Por tanto, el procedimiento consiste en estimar  $h_1, h_2, h_3, \dots$  donde  $h_k$  es el valor más pequeño de  $h$  que da por resultado una distribución con  $k$  modas  $[\hat{f}(y, h)]$ .

A fin de seleccionar los rodales bimodales se aplicó el procedimiento de Silverman, para lo cual se escribió un programa en FORTRAN 95. El programa rechaza cualquier distribución unimodal y con más de dos modas; posteriormente realiza la simulación "bootstrap" con aquellas muestras que han pasado el primer filtro. El procedimiento identificó solo 85 rodales bimodales de los 2,500 seleccionados. Una vez seleccionada la muestra, el análisis consistió en ajustar las estructuras diamétricas a dos diferentes distribuciones Weibull de dos parámetros, una unimodal y otra mezclada (esta última en realidad tiene 5 parámetros). Para el ajuste de la distribución unimodal se usó el programa WEST (Magaña et al., 1990) que incluye doce diferentes conjuntos de estimadores de una distribución Weibull unimodal,

<sup>1</sup> El procedimiento solo muestra la posibilidad de tener  $k$  modas, sin embargo es posible tener  $k+1$  modas y seguir cumpliendo las restricciones del procedimiento. Silverman (1986) propone una prueba para verificar que la distribución tiene más de  $k$  modas, en ella se contrasta el valor de  $h_k$  derivado de los datos reales con el valor que se obtiene de muestras aleatorias de la distribución  $\hat{f}(y, h)$  (a través de un remuestreo "bootstrap"), si el primero es significativamente más grande entonces existe la posibilidad de tener más de  $k$  modas.

dentro de los cuales siempre se uso el de “momentos ponderados probabilísticamente” dada su probada eficiencia en distribuciones sesgadas o con huecos (Greender et al., 1990). Para el ajuste de la distribución bimodal se uso regresión no lineal con el paquete estadístico SAS. En este ajuste el modelo utilizado fue:

$$\hat{F}(y) = \lambda \left( 1 - e^{-\left(\frac{y}{r_1}\right)^{\theta_1}} \right) + (1 - \lambda) \left( 1 - e^{-\left(\frac{y}{r_2}\right)^{\theta_2}} \right)$$

Donde  $\hat{F}(y)$  denota la distribución empírica u observada<sup>2</sup> de la variable aleatoria diámetro (y) y los demás elementos corresponden a parámetros del modelo.

Una vez realizada la estimación se calcularon los estadísticos de bondad de ajuste para cada una de las muestras. Los estadísticos calculados fueron: Kolmogorov-Smirnov (K-S) y Chi-cuadrada ( $\chi^2$ ); adicionalmente se calculó la desviación sobre la media de la distribución y el área basal. Finalmente, se compararon los ajustes de acuerdo a estos estadísticos.

## Resultados y Discusión

### Estimación de parámetros

La calidad de los ajustes con ambos procedimientos en general fue buena. El Cuadro 1 muestra algunas estadísticas sobre los valores de R<sup>2</sup> ajustada obtenidas en las estimaciones de parámetros. Observe la reducida desviación estándar de estos valores y lo alto de los valores promedio. En todos los casos, sin excepción, los estimadores fueron significativamente diferentes de cero<sup>3</sup> tanto para el ajuste con el modelo unimodal como para aquel del modelo bimodal. En algunos casos los ajustes fueron excepcionales para ambos modelos, sobre todo en aquellas distribuciones con dos modas débilmente separadas por una o dos categorías diamétricas.

En general el modelo bimodal presentó mejores ajustes que el modelo unimodal. Los únicos casos en los que el modelo unimodal presentó mejor ajuste fueron aquellos en los que la segunda moda no solo presentaba pocas

<sup>2</sup> La distribución empírica se calculó como el i-ésimo percentil de cada observación como sigue:

$$\hat{F}(y) = \frac{i - 0.5}{n}$$

donde i denota el número de observación (de una serie ordenada de menor a mayor) y n denota el tamaño de la muestra.

<sup>3</sup> Los valores de t calculados con los errores estándar asintóticos rechazaron la hipótesis nula de con  $\alpha \leq 0.05$ .

categorías con frecuencias pequeñas, sino que además estaba completamente separada de la primera moda con tres o cuatro categorías vacías.

Cuadro 1. Estadísticas sobre las R2 ajustadas obtenidas en el ajuste de los modelos.

Estimador †	Unimodal	Bimodal
Promedio	0.9244	0.9565
Desviación Estándar	0.0367	0.0264
Valor Mínimo	0.7931	0.8696
Valor Máximo	0.9731	0.9907

† Tamaño de muestra n = 85.

### Bondad de ajuste

La validación de las predicciones (con los mismos datos usados para el ajuste) mostró que solo el 52% de las distribuciones muestrales se ajustan a una distribución Weibull unimodal en forma marginal, dado que en el 78% (66%) de los casos el estadístico K-S ( $\chi^2$ ) no rechazó la hipótesis de igualdad de distribuciones con un nivel de confiabilidad del 95% (Cuadro 2). Solo en dos (seis) casos los niveles de significancia de la prueba fueron con  $\alpha < 0.01$ . Como se esperaba, el ajuste bimodal rindió mejores resultados. En este caso el 76% (79%) de las distribuciones mostró tener una distribución Weibull bimodal usando como criterio el estadístico K-S ( $\chi^2$ ), donde en más del 82% (91%) de las muestras no se rechazó la hipótesis de igualdad de distribuciones con un nivel de confiabilidad superior al 99%.

Las muestras ajustadas con el modelo bimodal que consistentemente no mostraron un buen desempeño en las pruebas de bondad de ajuste fueron aquellas en las que las modas se encontraban separadas por más de dos categorías vacías. Esto muestra que el modelo de distribuciones mezcladas tiene sus limitantes en estos tipos de distribuciones que podrían presentarse en rodales de árboles padre o rodales en la fase final de una corta de protección.

Cuadro 2. Resultados de las pruebas de validación de las distribuciones probadas†

Estadístico	Proporción de muestras aceptadas (%)	
	Unimodal	Bimodal
Kolmogorov-Smirnov (K-S)	51.78	76.28
Chi cuadrada ( $\chi^2$ )	61.22	79.31

† Las pruebas se realizaron con  $\alpha \leq 0.05$

Cabe señalar que aunque se usara un modelo de tres parámetros en el que se identificara un parámetro de localización para cada moda, el problema persistiría. Ello se debe a que las categorías vacías muestran discontinuidades en la función de densidad. Una forma de solucionar el problema es a través de modelos segmentados, mismos que tienen el problema de ser muy dependientes de condiciones específicas de la población.

### Sesgo en la predicción de momentos

Una de las deficiencias del procedimiento de “predicción de parámetros” con respecto al de “recuperación de parámetros” es que las estimaciones del diámetro medio (primer momento) y del área basal (transformación de un segundo momento) derivadas de la distribución predicha, regularmente no son compatibles con los valores observados. Estas diferencias ocasionan no solo que se acumulen errores para las predicciones en periodos posteriores, sino que afectan las estimaciones de número de árboles por categoría diamétrica y consecuentemente sesgan las recomendaciones sobre aclareo y turno que se puedan derivar de las predicciones de crecimiento. Evidentemente, mientras mejores son los estimadores de los parámetros de la distribución, más cercanos estarán los valores de diámetro medio y área basal a los valores observados. El Cuadro 3 muestra un comparativo de las diferencias encontradas en la estimación del primero y segundo momentos considerando la distribución observada y la distribución predicha.

Cuadro 3. Sesgo en la predicción de momentos

Variable	n	Distribución	Diferencia entre valor predicho y observado	
			Promedio	Desviación Estándar
Diámetro (cm.)	medio	Unimodal	-2.21	3.25
Diámetro (cm.)	medio	Bimodal	-0.80	0.90
Área (m <sup>2</sup> /ha)	Basal	Unimodal	-5.68	6.32
Área (m <sup>2</sup> /ha)	Basal	Bimodal	-1.86	1.97

Como se puede apreciar en el cuadro 3 los ajustes dieron como resultado una subestimación tanto del diámetro normal como del área basal (en promedio), independientemente del modelo usado. El diámetro promedio derivado de la distribución ajustada con un modelo bimodal tuvo una

desviación menor al centímetro, en contraste con el derivado de una distribución unimodal cuya desviación es cercana a la mitad de una categoría diamétrica. Esto último hace que las predicciones derivadas del modelo unimodal tengan una enorme fuente de variación cuando se usan modelos de totalidad del rodal o modelos matriciales de crecimiento, dando como resultado distribuciones muy diferentes a las distribuciones observadas. La diferencia entre ambos modelos es más abrumadora al considerar la desviación con respecto al área basal. En este caso el área basal obtenida con los modelos unimodales representa una subestimación promedio de 5.68 m<sup>2</sup>/ha, cifra que puede representar hasta el 25-50% del área basal del rodal (bajo las condiciones promedio de densidad en bosques templados de México). En contraste, la estimación de área basal derivada de los modelos bimodales presentó una desviación inferior a 2 m<sup>2</sup>/ha<sup>4</sup>, cifra que aunque sigue siendo grande es solo el 35% del sesgo derivado de distribuciones unimodales.

En todos los casos, a excepción de dos ajustes con el modelo bimodal, se presentó una subestimación del diámetro normal y del área basal. Esta subestimación es debida fundamentalmente a la forma de las modas que componen la distribución, ya que regularmente la primera moda tiene un sesgo positivo, mientras que la segunda tiene un sesgo negativo. Esta estructura es típica de poblaciones con un estrato superior muy maduro y un estrato inferior con una estructura incoetánea. En estos casos, a pesar de la flexibilidad que ofrece la distribución Weibull resulta muy difícil el ajuste, dado que la diferencia es tan grande que puede incluso hacer suponer que las distribuciones de cada moda son de familias paramétricas diferentes, lo que dificulta notablemente la estimación.

A pesar de estas deficiencias, la estimación de distribuciones multimodales con una mezcla de distribuciones prueba ser una buena alternativa para la predicción de distribuciones con estas características sin la necesidad de tener que separar las distribuciones de cada componente en la población.

---

<sup>4</sup> Las desviaciones obtenidas considerando exclusivamente aquellas distribuciones que mostraron tener una distribución bimodal con la prueba K-S, promediaron una desviación de -0.23 cm. con respecto al diámetro y de -0.47 m<sup>2</sup>/ha con respecto al área basal.

## Conclusiones

---

En este artículo se han presentado dos procedimientos valiosos para realizar proyecciones de distribuciones diamétricas. El primero es el uso de una función Kernel (Silverman, 1981) para definir el número de modas de una distribución multimodal y el segundo es la aplicación de las mezclas de distribuciones para predecir la distribución diamétrica de una población con más de una moda. El primer procedimiento resultó ser de gran utilidad, aunque es evidente que marginó distribuciones cuyas distribuciones de frecuencias muestran una aparente bimodalidad, pero que no tienen modas lo suficientemente separadas para garantizar tal estructura, por el contrario, favoreció la selección de algunas distribuciones con huecos entre modas, mismas que aumentan el problema de estimación al tener la necesidad de incorporar discontinuidades en la forma funcional. En este sentido, resulta evidente la necesidad de desarrollar un procedimiento para la selección de distribuciones multimodales que no solo sea eficiente cuantitativamente, sino que adicionalmente incluya algún criterio biológico en el que la diferencia de estratos definida por consideraciones silvícolas predomine sobre los indicadores numéricos que podrían ser engañosos.

Por otro lado, el uso de mezclas de distribuciones Weibull para realizar el ajuste resultó ser un procedimiento que supera tanto en el ajuste como en la calidad de las predicciones al modelo tradicional de una moda. Sin embargo, a pesar de que el procedimiento prueba ser efectivo para una predicción “actual” (predecir la condición de una distribución dadas sus parámetros) es necesario realizar más investigación sobre su aplicabilidad en predicciones futuras (predicción de rodales en etapas posteriores de crecimiento), en las que sea necesario predecir los parámetros de la distribución en términos de las variables de estado del rodal. En este sentido resultará indispensable la investigación sobre dinámica poblacional que permita definir cuales son las variables de estado o de control que determinan el desarrollo de más de un estrato en una población y si tal diferencia en estratos se puede calificar como una moda adicional. Tales variables serán indispensables para construir los modelos de predicción de parámetros de distribuciones con poblaciones multimodales.

## Bibliografía

---

- Bailey, R.L. 1972. *Development of unthinned stands of Pinus radiata in New Zealand*. Ph.D. Diss. Univ. of Georgia, Athens Georgia, U.S.A. 67 p.
- Cassie, R.M. 1954. Some uses of probability paper in the analysis of size frequency distribution. *Australian Journal of Marine Fisheries and freshwater resources*, 5:513-522.
- Crawford, S.L., M.H. DeGroot and J.B. Kadane. 1992. Modeling lake-chemistry distributions: Approximate Bayesian methods for estimating a finite-mixture model. *Technometrics*, 34:441-453.
- Everitt, B.S. and D.J. Hand. 1981. *Finite mixture distributions*, Chapman and Hall, New York.
- Foulkes, E.B. 1979. Some methods for studying the mixture of two normal (lognormal) distributions. *Journal of American Statistical Association*, 84:1020-1023.
- Greender, J.M., T.R. Dell, and R.M. Reich. 1990. *Theory and derivation for probability weighted moment estimates for Weibull parameter estimates*. Institute for Quantitative Studies, Southern For. Exp. Stn., USDA For. Serv., Res. Pap. SO-260, 19 p.
- Hessenmöller, D. y K. Gadow. 2001. Beschreibung der Durchmessererteilung von Buchenbeständen mit hilfe der bimodalen Weibullfunktion. *Allgemeine Forst und Jagdzeitung*, 172(3):46-50.
- Ishwaran, H. 1996. Uniform rates of estimation in the semiparametric Weibull mixture model. *Annals of Statistics* 24:1572-1585.
- Izenman, A.J. and C. Sommer. 1989. Philatelic mixtures and multimodal densities. *Journal of the American Statistical Association*, 83:941-953.
- Magaña T., O.S., J.M. Torres R. y M. Acosta M. 1992. *Manual de uso de WEST: Programa para estimar los parámetros de la función de distribución de probabilidades Weibull*. CIRCE-INIFAP, Campo Experimental Valle de México, Documento de Trabajo. Chapingo, México. 29 p.
- McLachlan, G.J. y K.E. Basford. 1988. *Mixture models: Inference and applications to clustering*. Marcel Dekker, New York
- Návar Ch., J.J. y J. Contreras A. 2000. Ajuste de la distribución Weibull a las estructuras diamétricas de rodales irregulares de pino en Durango, México. *Agrociencia*, 34:353-362
- Rodríguez C. R. 1991. *Memoria: Segundo Estudio Dasonómico del Estado de México*. PROBOSQUE, Gobierno del Estado de México, Rancho Guadalupe, Metepec, México, 450 p.
- Roeder, K. 1994. A graphical technique for determining the number of components in a mixture of normals. *J. Amer. Stat. Association*, 89:487-495.
- Schmidt P., 1982. An improved version of the Quandt-Ramsey MGF estimator for mixtures of normal distributions and switching regressions. *Econometrica*, 50:501-516.
- Silverman, B.W. 1981. Using kernel density estimates to investigate multimodality. *Journal of the Royal Statistical Society. Ser. B*, 43:97-99.

Swales, J.D. 1985. *Platt vs Pichering: an episode in recent medical history*. Cambridge, U.K. The Keynes Press.

Titterington, D.M. A.F.M. Smith, and U.E. Makov. 1985. *Statistical analysis of finite mixture distributions*, John Wiley. New York.

Woodward, W.A., W.C. Parr, W. R. Schucany, and L. Hildegard. 1984. A comparison of minimum distance and maximum likelihood estimation of a mixture proportion. *J. Amer. Stat. Association*, 79:590-598.

Zanakis S.H. 1979. A simulation study of some simple estimators for the three-parameter Weibull distribution. *J. Stat. Comp. Simulation*, 9:101-116



---

## Novedades

---

### DIVISIÓN DE ADMINISTRACIÓN PÚBLICA

Rowland , Allison , *La seguridad pública local en México: Una agenda sin rumbo* . AP-122

Yarahuán Pérez , Gabriela *Social Programs and Electoral Competition: The Political Economy of the Mexican National Fund for Social Enterprises (1992-2000)*. AP-123

Carrillo, Laura y Juan Pablo Guerrero Amparán, *Los salarios de los altos funcionarios en México desde una perspectiva comparativa*. AP-124

Piedras, Ernesto, *Infrastructure Capital and Economic Growth: The Long Term Mexican Experience*. AP-125

Tamayo Flores, Rafael y Antonio de Haro Mejía, *El proceso de mejora regulatoria en el municipio urbano mexicano: Una primera aproximación*. AP-126

Moreno, Carlos L., *Fiscal Performance of Local Governments in Mexico: The Role of Federal Transfers*. AP-127

Cabrero Mendoza, Enrique, *Políticas de modernización de la administración municipal. Viejas y nuevas estrategias para transformar a los gobiernos locales*. AP-128

Cabrero Mendoza, Enrique, *Los cambios en la agenda de políticas públicas en el ámbito municipal: Una visión introductoria*. AP-129

Arellano Gault, David & J. Ramón Gil García. *Public Management Policy and Accountability in Latin America: Performance-Oriented Budget in Colombia, Mexico and Venezuela*. AP-130

Graizbord, Boris, Allison Rowland & Adrián Guillermo Aguilar, *Spatial and Distributive Impacts of Globalization on Mexico City*. AP-131

### DIVISIÓN DE ECONOMÍA

Rubalcava , Luis y Graciela Teruel, *Escalas de equivalencia para México*. E-256

Guerrero, César L., *Chaos Vs. Patience in Macroeconomic Models of Capital Accumulation: New Applications of a Uniform Neighborhood Turnpike Theorem*. E-257

García, Francisco y F. Alejandro Villagómez, *Reforma al sistema de pensiones del ISSSTE*. E-258

Rosellón, Juan and Dagobert L. Brito, *Strategic Behavior and the Pricing of Gas*. E-259

Rosellón, Juan, *Different Approaches Towards Electricity Transmission Expansion*. E-260

---

---

Guerrero-Luchtenberg, César & C. Alós-Ferrer, *The Selection of Preferences in OLG Models with Endogenous Heterogeneity*. E-261

Guerrero-Luchtenberg, César, *Alternative Dynamics and Stability Results in a Standard OLG model: An Interpretation*. E-262

Parker, Susana W, *Evaluación del impacto de OPORTUNIDADES sobre la inscripción escolar: primaria, secundaria y media superior*. E-263

Rubalcava Peñafiel, Luis N. y Graciela Teruel Belismelis, *Análisis sobre el cambio en variables demográficas y económicas de los hogares beneficiarios del programa OPORTUNIDADES*. E-264

Antón, Arturo, *Optimal Taxation Under Time-Inconsistent Preferences*. E-265

#### DIVISIÓN DE ESTUDIOS INTERNACIONALES

Schiavon, Jorge A., *International Relations and Comparative Politics: Cooperation or Conflict?*. EI-89

Jones, Adam, *Reforming the International Financial Institutions*. EI-90

Schiavon, Jorge A., *Bicameralismo en América Latina: ¿Hace alguna diferencia?*. EI-91

Jones, Adam, *Paramilitarism, Death and Squads and Governance in Latin America*. EI-92

Ortiz Mena, Antonio, *Mexico's Trade Policy: Improvisation and Vision*. EI-93.

Mahon, James, *Fiscal Contracts, International Capital and the Quest for a Liberal*. EI-94

Kahhat, Farid, *Democracy as a Collective Problem In the Western Hemisphere: The Case of Peru During the 1990s*. EI-95

Ortiz Mena, Antonio, *Mexico in the Multilateral Trading System*. EI-96

Minushkin, Susan, *De Banqueros a Bolseros: La transformación estructural del sector financiero mexicano*. EI-97

Schiavon, Jorge Alberto, *Cohabitando en el Consejo de Seguridad: México y Estados Unidos ante la Guerra contra Irak*. EI-98

#### DIVISIÓN DE ESTUDIOS JURÍDICOS

Magaloni, Ana Laura y Layda Negrete, *El poder Judicial federal y su política de decidir sin resolver*. EJ-1

Pazos, María Inés, *Derrotabilidad sin indeterminación*. EJ-2

Pásara Pazos, Luis, *Reforma y desafíos de la justicia en Guatemala*. EJ-3

Bergman S., Marcelo, *Confianza y Estado de Derecho*. EJ-4

Bergman S., Marcelo, *Compliance with norms: The Case of Tax Compliance in Latin America*. EJ-5

---

---

---

## DIVISIÓN DE ESTUDIOS POLÍTICOS

Benton, Allyson, *Economic Reform in Decentralized Systems: When Institutions work to Protect Subnational Politicians from Economic Reform.* EP-150

Benton, Allyson, *The Strategic Struggle for Patronage: Political Careers, States Largesse and Factionalism Latin American Parties.* EP-151

Lehoucq, Fabrice and Clark C. Gibson, *The Local Politics of Decentralized Environmental Policy in Guatemala.* EP-152

Benton, Allyson, *Dissatisfied Democrats or Restrospective Voters? Economic Hardship, Political Institutions and Voting Behavior in Latin America.* EP-153

Colomer M., Josep, *Taming the Tiger: Voting Rights and Political Instability in Latin America.* EP-154

Colomer M., Josep, *Voting in Latin America: Low Benefits, High Costs.* EP-155

Colomer M., Josep, *Policy Making in Divided Government: A Pivotal Actors Model with Party Discipline.* EP-156

Dion, Michelle, *Mexico's Welfare Regime before and after the Debt Crisis: Organized Labor and the Effects of Globalization.* EP-157

Nacif, Benito, *Instituciones políticas y transición a la democracia en México.* EP-158

Langston, Joy, *Senate Recruitment and Party Organizational Change in Mexico's PRI.* EP-159

---

---

## DIVISIÓN DE HISTORIA

Pipitone, Ugo, *La región europea en formación.* H-15

Meyer, Jean, *Guerra, violencia y religión.* H-16

Meyer, Jean, *Guerra, religión y violencia, el contexto salvadoreño de la muerte de Monseñor Romero.* H-17

Pipitone, Ugo, *Caos y Globalización.* H-18

Barrón, Luis, *Un civil en busca del poder: La carrera política de José Vasconcelos 1910-1924.* H-19

Barrón, Luis, *La tercera muerte de la Revolución Mexicana: Historiografía reciente y futuro en el estudio de la revolución.* H-20

García Ayluardo, Clara, *De tesoreros y tesoros. La administración financiera y la intervención de las cofradías novohispanas.* H-21

Medina Peña, Luis, *Porfirio Díaz y la creación del sistema político.* H-22

Sauter J., Michael, *Visions of the Enlightenment: Johann Christoph Woellner and Prussia's Edict on Religion of 1788.* H-23

Sauter J., Michael, *Preachers, Ponytails and Enthusiasm: On the Limits of Publicness in Enlightenment Prussia.* H-24

---

---



## *Ventas*

---

### DIRECTAS:

57-27-98-00 Ext. 2906 y 2417  
Fax: 57-27-98-85

### INTERNET:

publicaciones@cide.edu  
www.cide.edu

### LIBRERÍAS DONDE SE ENCUENTRAN DOCUMENTOS DE TRABAJO:

- LIBRERÍA SALVADOR ALLENDE Tel. 56-58-91-48
- EL JUGLAR PRODUCCIONES S.A. DE C.V. Tel. 56-60-79-00
- FCE ALFONSO REYES Tel. 52-27-46-72
- INAP Tel. 55-70-16-11
- ARCHIVO GENERAL DE LA NACIÓN Tel. 51-33-99-00
- SIGLO XXI EDITORES S.A. DE C.V. Tel. 56-58-75-55
- UAM AZCAPOTZALCO Tel. 53-18-92-81
- UAM IZTAPALAPA Tel. 58-04-48-72

